



1973

ویرایش جدید

آمار و احتمال

پاورٹسٹ
PowerTest

• مصطفی دیداری
• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

مقدمه ویرایش جدید

«سلام علی جان، سلام بابا جان. پسر گلم می‌خوام چند کلمه‌ای باهات صحبت کنم. ببخشید که تو کودکی ولت کردم. اگر ما نمی‌رفتیم به حرم حضرت زینب جسارت می‌شد... علی جان خیلی دلم می‌خواد تو این راه، روسفید بشم. خیلی دلم می‌خواد یه بار قبل از ظهور شهید بشم... علی جان بابا پاک بودن داره روز به روز سخت‌تر می‌شه... تو باید خیلی مواظب خودت باشی. مواظب مادر و اطرافیان هم باشی... از همین الان رو خودت کار کن، رو درس خونذیت. رو شغل، رو راه و روش زندگیت، تو انتخاب رفیق‌هات، تو انتخاب آیندت. خیلی مواظب خودت باش. من همیشه به یادتم هستم... این چند جمله رو گفتم تا اگه یه روزی خواستی صدای بابات رو بشنوی، این چند جمله رو داشته باشی. خیلی دوستت دارم هم تو رو، هم مامانت رو. بعضی وقت‌ها دل‌کندن از یه چیزای خوب باعث می‌شه چیزای بهتری رو به دست بیاری... سعی کن به جوری زندگی کنی که خدا عاشقت بشه...»

این جمله‌ها رو از آخرین فایل صوتی شهید محسن حججی انتخاب کردم. تعجب نکنید، اخلاقم همین است! همیشه با بچه‌ها راجع به موضوعات مختلف صحبت می‌کنم. از بحث‌های اجتماعی و خانوادگی و دینی گرفته تا کل‌کل سر استقلال و پرسپولیس! وسط کلاس برای دانش‌آموز کنکوری، کتاب می‌خوانم. چرا؟ چون از کلیشه‌ها بیزارم. از آدا درآوردن و فیلم بازی کردن متنفرم. از شنیدن حرف‌هایی که می‌خواهند الکی بادمان کنند، کهنر می‌زنم. طرف زن دارد، بچه دوساله دارد که آن‌ها را خیلی خیلی دوست دارد. چه می‌شود که یک دفعه جانش را کف دستش می‌گیرد و می‌رود هزار کیلومتر آن طرف‌تر وسط بیابان. آخرش را هم، همه می‌دانید که قصه چه جوری به سر می‌رسد. این چه چیزی درون فکر و ذهن و قلب اوست که او را می‌کشاند و می‌برد؟ این چه چیزی است که مثل موتور روشن می‌شود و او را حرکت می‌دهد؟ چه می‌شود که طرف حاضر می‌شود این همه سختی را تحمل کرده و میدان را خالی نکند؟ همیشه به بچه‌ها این را می‌گویم:

قدم اول درس خواندن، انتخاب انگیزه‌های خوب است! انگیزه‌هایی که بتواند موتور شما را روشن کند، انگیزه‌هایی که به شما جهت‌های متعالی بدهد. اگر منتظر هستید که من برایتان از این جنس انگیزه‌ها بگویم، سخت در اشتباهید! این دیگر کار خودتان است.

ویژگی‌های این کتاب

- 1 درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- 2 طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!
- 3 اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.
- 4 توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.
- 5 هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.
- 6 پُر از تست‌های دوست‌داشتنی! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سکنه نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- 7 همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدیده.
- 8 پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال‌ها گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!
- 9 مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن.
- 10 تعداد تست‌هاش متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی.

راهنمای استفاده از کتاب

چند کلمه در مورد استفاده بهتر از این کتاب هم بگم. کتاب درسی آمار و احتمال در هر فصل، از چند درس تشکیل می‌شود. این جا هم همین است. در هر قسمت درس‌نامه داریم چه درس‌نامه‌ای! به علاوه تست‌های آن درس. (فقط یک استثنا داریم آن هم درس دوم و سوم فصل اول است که چون مطالب آن خیلی به هم وابسته بوده، آن‌ها را با هم آورده‌ام.) در آخر هر فصل هم باید خودت را با یک آزمون ۲۰ سؤالی، محک بزنی. حتماً بعد از زدن تست‌ها این آزمون رو در حل کن تا بفهمی چقدر از مطالب فصل رو مسلط هستی. اگر درصدت چندان مطلوب نبود، جای نگرانی نیست، فقط باید دوباره تست‌ها را حل کنی. همیشه به بچه‌ها می‌گم که حل دوباره ۱۰۰ تست، بهتر از حل یک‌باره ۲۰۰ تست است. جواب چرای آن خیلی ساده است، چون با حل یک‌باره، همه نکات در حافظه بلندمدت شما قرار نمی‌گیرد. حواستان باشد این درس‌نامه جای معلم محترم‌تان را نمی‌گیرد! اگر دو تا گوش دارید، دو تا هم قرض کنید و سر کلاس، درس را به خوبی یاد بگیرید. حالا درس‌نامه را بخوانید و شروع به حل تست‌ها حل کنید. سعی کرده‌ام که درس‌نامه‌ها شامل همه نکات مهم، به صورت مرتب و دسته‌بندی شده باشد تا بتوانید آن‌ها را بهتر به خاطر بسپارید. نکته‌هایی که در درجه دوم اهمیت قرار دارند درون پاسخ‌های تشریحی، تحت عنوان راهبرد قرار گرفته‌اند. این جوری بهتر می‌فهمید که هر نکته، مناسب کدام تیپ تست خواهد بود. به علاوه مجبور می‌شوید نگاهی به پاسخ‌ها هم داشته باشید!!

بچه‌ها شما اولین گروهی هستید که این کتاب‌های جدید را امتحان و کنکور می‌دهید. در تغییر نسل کتب درسی، همیشه تمرین‌های کتاب، پای ثابت آزمون‌ها است. سعی کرده‌ام همه فعالیت‌ها، کادر کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را که می‌شده است، تبدیل به تست کنم، بنابراین از هیچ نکته و تستی تا خوب خوب آن را یاد نگرفته‌اید، عبور نکنید. امیدوارم همتون با خواندن این کتاب، آمار و احتمال رو فول بشید و به من هم بگید تا دوباره حالی پیدا کنم و برای شما کتاب بنویسم. راستی تا یادم نرفته هر گونه نظری راجع به کتاب داشتید می‌تونید اینجا @didariamar به خودم بگید.

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم.

توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردم و درس‌نامه و مثال حل شده براتش آوردم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتم و اسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردم. «راهبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنی! بعد از درس‌نامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. فصل که تموم میشه به آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتم تا خودتو محک بزنی. بعد از آزمون، پاسخ کلیدی تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌های تشریحی اون فصل.

تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد پپرسید.

و اما قدردانی...

برای به ثمر رسیدن این کتاب افراد زیادی تلاش کردن. من وظیفه خودم می‌دونم که از اون‌ها قدردانی کنم.

■ اول از همه از جناب آقای احمد اختیاری مدیریت انتشارات که فرصت نگارش این کتاب را در اختیار من گذاشتن.
■ جناب آقای انوشه، مدیر شورای تألیف و جناب آقای اشرفی، مدیر گروه ریاضی که بدون راهنمایی‌های سازنده این دو نفر، کار به نتیجه مطلوب نمی‌رسید.

از همکاران محترم انتشارات به‌طور ویژه تشکر می‌کنم!

■ سرکار خانم دنیا سلیمی، مسئول ویراستاری، که امیدوارم بتونم روزی زحمات ایشون رو جبران کنم.
■ خانم‌ها آزاده فلاح‌زاده و مهرانوش رضوی که ویرایش علمی کتاب را برعهده داشتند.
■ جناب آقای محسن فرهادی مدیر هنری خلاق انتشارات و تیم هنری ایشان آقایان تایماز کاویانی و حسن شیرمحمدی و حسام طلایی.
■ سرکار خانم سمیرا سیاوشی مدیر تولید توانمند انتشارات و سرکار خانم رویا طبسی که با دقت و حوصله صفحه‌آرایی رو انجام دادند.

امیدوارم این کتاب به احتمال‌های مهر و ماهی زندگی شما رنگ تازه‌ای بده.

دوستدار شما

مصطفی دیداری

فهرست



۹

فصل اول آشنایی با مبانی ریاضیات

۴۳

فصل دوم احتمال

۷۹

فصل سوم آمار توصیفی

۱۰۱

فصل چهارم آمار استنباطی

۱۱۵

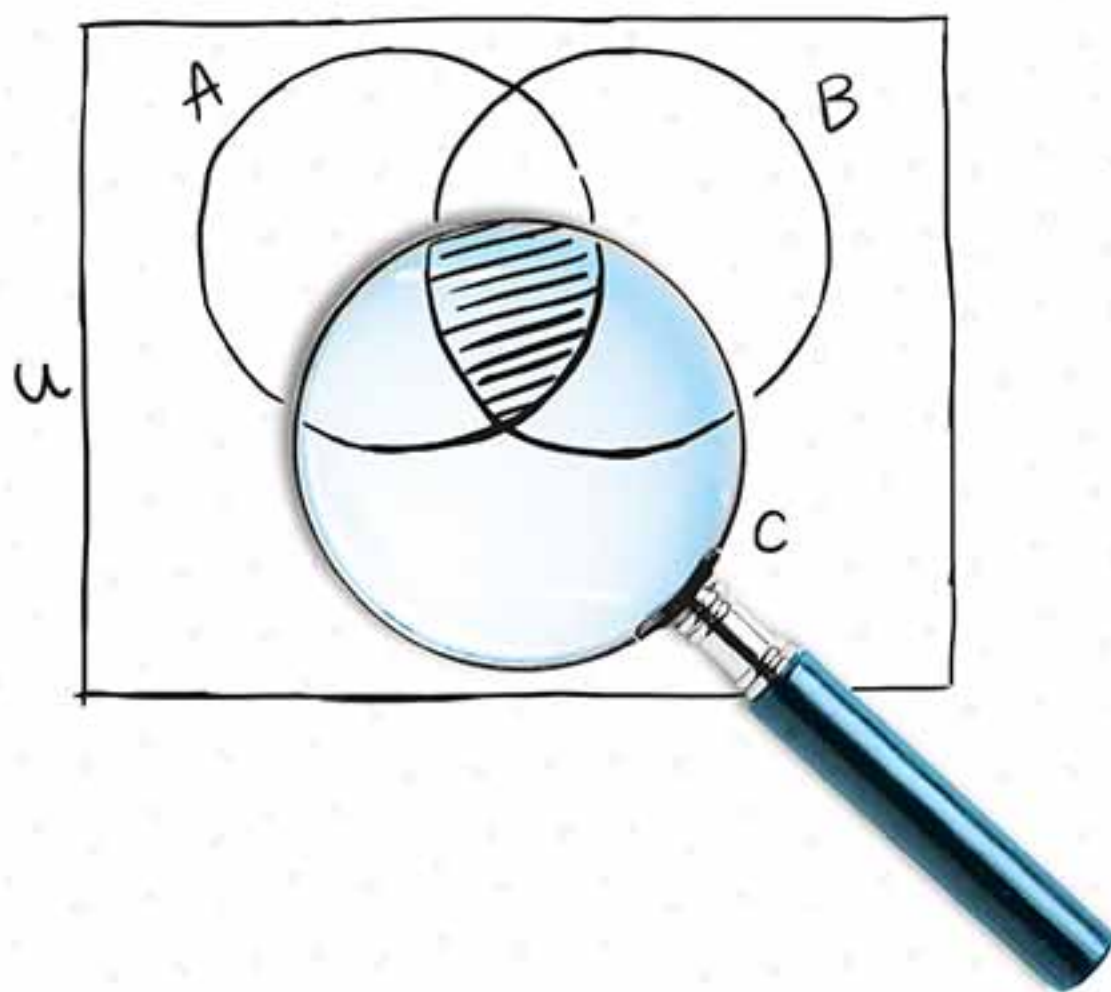
پاسخنامه تشریحی

۱۸۹

پاسخنامه کلیدی

آشنایی با مبانی ریاضیات

پدری به پسرش می گوید: پسر جان درس بخوان یا آدم باش. پدر آن دیگری! می گوید: پسر جان درس بخوان و آدم باش. پدر سومی هم به پسرش می گوید: اگر آدم باشی درس می خوانی. آیا این جمله ها مثل هم هستند؟ هر پسر چگونه می تواند صحبت پدر را گوش بدهد؟ این ها در چه شرایطی درست و در چه شرایطی نادرست هستند؟ گوش شیطان کر! در چه صورتی خلاف حرف پدر عمل کرده اند؟ جمله آدم نیستی یا درس می خوانی معادل کدام یک از این جمله هاست؟ در بخش اول فصل اول یاد می گیرید کمی منطقی تر فکر کنید، حرف بزنید و استدلال کنید. در بخش دوم این فصل نیز، روابط بین مجموعه ها برایتان کامل می شود و می توانید بدون رسم شکل، حاصل اجتماع، اشتراک و تفاضل آن ها را بیابید.



عکس نقیض ترکیب شرطی

◀ گزاره $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید. گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض گزاره شرطی می‌گوییم. هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است یعنی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

برای نمونه ترکیب شرطی «اگر دما منفی باشد، هوا خیلی سرد است» با عکس نقیض خود یعنی «اگر هوا خیلی سرد نباشد، دما منفی نیست» هم‌ارز است. اثبات برخی از قضیه‌ها به صورت مستقیم مشکل است؛ اما اثبات عکس نقیض ساده‌تر است. مثلاً به جای اثبات «اگر a^2 فرد باشد، a نیز فرد است» ثابت می‌کنیم «اگر a فرد نباشد (زوج باشد)، a^2 هم فرد نیست (زوج است)».

سورها

◀ دو نوع سور وجود دارد: ❶ سور عمومی، ❷ سور وجودی

❶ سور عمومی: به جای عبارت‌های فارسی «به ازای هر x » یا «به ازای جمیع مقادیر x » می‌نویسیم: $\forall x$.

❷ سور وجودی: به جای عبارت‌های فارسی «به ازای بعضی مقادیر x » یا «وجود دارد x » می‌نویسیم: $\exists x$.

برای نمونه سور « $\forall x \in \mathbb{R} : 2x \geq x$ » بیان می‌کند به ازای هر عدد حقیقی x ، $2x$ بزرگ‌تر یا مساوی x است. این سور نادرست است؛ چون اگر $x = -1$ باشد $-1 \not\geq -2$ اما سور « $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$ » درست است؛ چون مربع هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. همچنین سور « $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 = 0$ » بیان می‌کند عدد حقیقی x وجود دارد که $x^2 + 1 = 0$. این سور نادرست است؛ چون می‌دانیم معادله $x^2 = -1$ جواب حقیقی ندارد. پس چنین x ای وجود ندارد.

نکته

❶ سورها در ابتدای گزاره‌نماها قرار گرفته و آن را تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست می‌کند. عبارت‌های سوری همگی گزاره به حساب می‌آیند.

❷ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند، به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

❸ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

نقیض سور عمومی

◀ سور عمومی «رنگ پیراهن هر دانش‌آموز کلاس، سفید است» را در نظر بگیرید. نقیض آن این نیست که «رنگ پیراهن هیچ دانش‌آموزی سفید نیست» بلکه نقیض آن می‌شود «رنگ پیراهن برخی از دانش‌آموزان سفید نیست». به بیان دیگر «دانش‌آموزی وجود دارد که رنگ پیراهن او سفید نیست». به زبان ریاضی:

$$\text{رنگ پیراهن } x \text{ سفید نیست؛ دانش‌آموزان } \exists x \in \mathbb{R} \equiv (\text{رنگ پیراهن } x \text{ سفید است}) \sim ; \text{دانش‌آموزان } \exists x \in \mathbb{R} \equiv (\forall x \in \mathbb{R} ; p(x)) \sim$$

در حالت کلی داریم:

$$\sim (\forall x ; p(x)) \equiv \exists x ; \sim p(x)$$

نقیض سور وجودی

◀ سور وجودی «دانش‌آموزی وجود دارد که در امتحان مردود شده است» را در نظر بگیرید. نقیض آن می‌شود «دانش‌آموزی وجود ندارد که در امتحان مردود شده باشد» به بیان دیگر «همه دانش‌آموزان قبول شده‌اند». در حالت کلی می‌توانیم بگوییم:

$$\sim (\exists x ; p(x)) \equiv \forall x ; \sim p(x)$$

☕ **مثال:** نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R} ; (x < 0) \vee (x > 0)$ به کدام صورت است؟

❶ $\exists x \in \mathbb{R} ; (x \geq 0) \wedge (x \leq 0)$

❷ $\exists x \in \mathbb{R} ; (x > 0) \wedge (x < 0)$

❸ $\forall x \in \mathbb{R} ; (x > 0) \wedge (x < 0)$

❹ $\forall x \in \mathbb{R} ; (x \geq 0) \vee (x \leq 0)$

• پاسخ: ❶ ❷ ❸ ❹

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} ; (x < 0 \vee x > 0)) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; \sim ((x < 0) \vee (x > 0))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} ; \sim (x < 0) \wedge \sim (x > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; (x \geq 0) \wedge (x \leq 0)$$

(طبق قانون دمورگان)

۱۲۶. کدام سور نادرست است؟

$\forall n \in \mathbb{N}; 2^{2^n} + 1 \in P$ (۲)
 $\forall x \in \mathbb{O}; x^2 = \lambda k + 1$ (۴)

$\forall x, y \in \mathbb{R}; x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$ (۱)
 $\forall (x, y \in \mathbb{R} \wedge (x = y)); x^2 + y^2 = 2xy$ (۳)

۱۲۷. ارزش کدام سور درست است؟

$\forall x \in \mathbb{R}; (\tan x)(\cot x) = 1$ (۲)
 $\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 = 0)$ (۴)

$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$ (۱)

$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ (۳)

۱۲۸. کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x$ (۱)

$\exists x \in \mathbb{R}; |x + \frac{1}{x}| < 2$ (۳)

۱۲۹. فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است. کدام سور نادرست است؟

$\exists A \subseteq S; P(A) = \frac{1}{4}$ (۲)

$\forall A \subseteq S; 0 \leq P(A) \leq 1$ (۱)

$\exists A \subseteq S; P(A) = \frac{2}{3}$ (۴)

$\forall x \in \{1, 2, \dots, 6\}; P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ (۳)

۱۳۰. نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}; 1 + 2x > 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0)$ به کدام صورت است؟

$(\exists x \in \mathbb{R}; 1 + 2x > 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0)$ (۲)

$(\exists x \in \mathbb{R}; 1 + 2x \leq 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \neq 0)$ (۱)

$(\forall x \in \mathbb{R}; 1 + 2x \leq 2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \neq 0)$ (۴)

$(\forall x \in \mathbb{R}; 1 + 2x \leq 2) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \neq 0)$ (۳)

۱۳۱. چه تعداد از سورهای زیر درست است؟

$\forall x \in \{1, 2, 3\} \exists y \in \{1, 2, 3\}; x + y < 5$ (ب)

$\forall x \in \{1, 2, 3\} \forall y \in \{1, 2, 3\}; x + y < 5$ (الف)

$\exists x \in \{1, 2, 3\} \exists y \in \{1, 2, 3\}; x + y < 5$ (ت)

$\exists x \in \{1, 2, 3\} \forall y \in \{1, 2, 3\}; x + y < 5$ (پ)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۳۲. گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}; p(x, y)$ با کدام گزاره نمای $p(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

$xy = 6$ (۴)

$x + y = 6$ (۳)

$x - y = 6$ (۲)

$y - x = 6$ (۱)

(ریاضی فارغ ۹۸)

(ریاضی ۹۸)

یک گام تا صد

۱۳۳. دامنه هر کدام از گزاره‌نماهای زیر مجموعه \mathbb{Z} است. مجموعه جواب کدام گزینه با دامنه یکسان نیست؟

$x^2 \notin P$ (۴)

$x(x+1) \notin P$ (۳)

$x + (2x - 1) \in \mathbb{O}$ (۲)

$(2x + 1)^2 \in \mathbb{O}$ (۱)

۱۳۴. نقیض گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ به کدام صورت است؟

$(p \wedge q) \wedge \sim r$ (۴)

$(p \wedge q) \vee r$ (۳)

$\sim (p \wedge q) \vee r$ (۲)

$\sim (p \wedge q) \vee \sim r$ (۱)

۱۳۵. کدام گزینه سور «هیچ کدام از اعداد گویا، گنگ نیستند.» را به زبان نمادها نشان می‌دهد؟

$\exists x \in Q'; x \notin Q$ (۴)

$\exists x \in Q; x \notin Q'$ (۳)

$\forall x \in Q'; x \in Q$ (۲)

$\forall x \in Q; x \notin Q'$ (۱)

۱۳۶. نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ به کدام صورت است؟

$\forall x \in \mathbb{Z}; x \leq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ (۲)

$\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ (۱)

$\exists x \in \mathbb{R}; (x \leq 0) \wedge (x^2 > 0)$ (۴)

$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x^2 \leq 0)$ (۳)

۱۳۷. مجموعه جواب گزاره نمای «در پرتاب تاس احتمال پیشامد A برابر $\frac{2}{3}$ است» چند عضو دارد؟

۶۴ (۴)

۴۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

۱۳۸. گزاره سوری $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^+; p(x, y)$ با کدام گزاره نمای $p(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

$xy = 6$ (۴)

$x - y = 6$ (۳)

$x + \frac{1}{x} \geq y$ (۲)

$y + \frac{1}{y} \leq x$ (۱)

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \times D) \cup (A \times E) = A \times (D \cup E)$$

۲ ضرب دکارتی روی \cup و \cap - خاصیت پخشی دارد، یعنی: برعکس این رابطه همان فاکتورگیری است. برای نمونه: توجه دارید که در ضرب دکارتی ترتیب مجموعه‌ها مهم است. پس از $(A \times B) \cup (E \times A)$ نمی‌توانید فاکتور بگیرید. ۲ اگر مجموعه‌های A, B, C, D غیرتهی باشند، داریم:

$$A \times B = C \times D \Rightarrow \begin{cases} A = C \\ \wedge \\ B = D \end{cases}$$

$$A \times C = B \times C \xrightarrow{C \neq \emptyset} A = B$$

نتیجه: قانون حذف در ضرب دکارتی از نکته ۲ نتیجه می‌شود:

۲ برای به دست آوردن عضوی از $(A \times B) \cap (C \times D)$ مجموعه‌های اول را با هم و مجموعه‌های دوم را با هم اشتراک گرفته و در هم ضرب دکارتی کنید. یعنی:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \cap B)^2$$

نتیجه:

افراز یک مجموعه

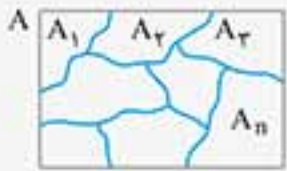
افراز یک مجموعه همان تقسیم‌بندی مجموعه به چند زیرمجموعه ناتهی است، به طوری که زیرمجموعه‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند. مثلاً یک افراز برای مجموعه $\{a, b, c\}$ به صورت $\{a\}, \{b, c\}$ است.

به زبان ریاضی، می‌گوییم مجموعه غیرتهی A به زیرمجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ $\forall i \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$ (یعنی زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند)

۲ $\forall i, j (i \neq j); A_i \cap A_j = \emptyset$ (یعنی اشتراک دو به دوی زیرمجموعه‌ها، تهی باشد)

۳ $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$ (یعنی اجتماع زیرمجموعه‌ها، برابر با مجموعه A باشد)



مثال: مجموعه ۳ عضوی $\{a, b, c\}$ را به چند صورت می‌توانیم افراز کنیم؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$\{a\} \{b, c\} - \{b\} \{a, c\} - \{c\} \{a, b\} - \{a\} \{b\} \{c\} - \{a, b, c\}$$

تعداد افرازاها

تعداد افرازاها برای مجموعه‌های یک تا پنج عضوی از جدول زیر به دست می‌آید:

تعداد عضوی (n) مجموعه	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد افرازاها	۱	۳	۷	۱۵	۵۲

تعداد افرازاها خاص

برای اینکه تعداد افرازاها به فرم‌های خاص را به دست آوریم، چند مثال می‌زنیم:

فرض کنید می‌خواهیم مجموعه ۵ عضوی را به یک مجموعه ۲ عضوی و یک مجموعه ۳ عضوی افراز کنیم.

تعداد این افرازاها می‌شود: $5 = 2 + 3 \Rightarrow \text{تعداد افرازاها} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

حالا فرض کنید می‌خواهیم مجموعه ۶ عضوی را به دو مجموعه ۳ عضوی افراز کنیم. این‌جا چون دو مجموعه با تعداد عضوی برابر داریم، در مخرج به غیر از $3!3!$ باید یک $2!$ دیگر هم قرار دهیم. پس:

تعداد افرازاها $6 = 3 + 3 \Rightarrow \text{تعداد افرازاها} = \frac{6!}{3!3! \times 2!} = 10$

به عنوان آخرین مثال، اگر مجموعه ۵ عضوی را به ۳ مجموعه تک‌عضوی و یک مجموعه دو عضوی افراز کنیم:

تعداد افرازاها $5 = 2 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow \text{تعداد افرازاها} = \frac{5!}{2!1!1!1! \times 3!}$

نمادهای \in و \subseteq

۱۳۹. اگر $A = \{1, \{2\}\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\{1\} \in A$ (۲) $1 \subseteq A$ (۳) $\{2\} \subseteq A$ (۴) $\{\} \subseteq A$

۱۴۰. $A = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}$ باشد، کدام گزینه نا درست است؟

- (۱) مجموعه A ، ۳ عضو دارد. (۳) $\{\{1\}\} \subseteq A$
(۲) $\{1, \{\{1\}\}\} \subseteq A$ (۴) $\{1, \{1\}\} \in A$

۱۴۱. اجتماع دو مجموعه $A = \{\{\emptyset, \{a\}, a\}$ و $B = \{a, \emptyset\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۲. اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x = 0\}$ و $B = \{\emptyset\}$ باشد، کدام گزینه نا درست است؟

- (۱) $A \in B$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A = B$ (۴) گزینه‌های «۱» و «۲»

۱۴۳. اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}$ کدام رابطه نا درست است؟

- (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $A \in C$

(ریاضی ۹۵)

۱۴۴. اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نا درست است؟

- (۱) $A \in B$ (۲) $A \in C$ (۳) $B \in C$ (۴) $A \subseteq C$

۱۴۵. کدام یک از مجموعه‌های زیر، هم عضو و هم زیرمجموعه، مجموعه $A = \{x, \{x\}, \{x, y\}\}$ است؟

- (۱) x (۲) $\{x\}$ (۳) $\{x, y\}$ (۴) $\{\{x, y\}\}$

۱۴۶. اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر زیرمجموعه A ، عضو A است. (۲) هر عضو A زیرمجموعه A است.
(۳) به ازای هر دو عضو، یکی عضو دیگری است. (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

تعداد زیرمجموعه‌ها

(ریاضی ۸۹)

۱۴۷. اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $B = \{a, b\}$ مجموعه $A - B$ چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۱۴

(ریاضی خارج ۹۴)

۱۴۸. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $A - B = C$ (۲) $B - C = \emptyset$ (۳) $B - C = \{1, 2\}$ (۴) $A - B = \{C\}$

(ریاضی خارج ۹۶)

۱۴۹. اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 2x\}$ ، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های سره و غیر تهی مجموعه $A - B$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۴

(ریاضی خارج ۸۹)

۱۵۰. اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ ، مجموعه $A - \{A\}$ چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۴

(ریاضی ۸۹)

۱۵۱. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۵۲. اگر $A = \{\{a, b\}, a, b\}$ ، $B = \{a, b\}$ و $C = \{\{a, b\}\}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $B \subseteq C \wedge B \in A \wedge B \subseteq A$ (۲) $B \not\subseteq C \wedge B \in A \wedge B \not\subseteq A$
(۳) $B \not\subseteq C \wedge B \notin A \wedge B \subseteq A$ (۴) $B \not\subseteq C \wedge B \in A \wedge B \subseteq A$

۱۵۳. چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟ $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, a\}\}$

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۶۳

۱۵۴. مجموعه A ، ۵ عضو بیشتر از مجموعه A' دارد. خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه کدام است؟

- (۱) خارج قسمت ۲۵ (۲) خارج قسمت ۳۲ (۳) تفاضل ۲۵ (۴) تفاضل ۳۲

۱۵۵. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(5n+1)$ عضوی برابر 8^{2n-3} است. n کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۴

۳۲۰. مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ را به چند طریق می‌توان، به دو مجموعه سه عضوی و یک مجموعه تک عضوی افراز کرد، به طوری که فاقد $\{a\}$ باشد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۰ (۳) ۵۶ (۴) ۶۰

۳۲۱. نمودار $A \times B$ به صورت دو پاره‌خط افقی و نمودار $C \times D$ به صورت دو پاره‌خط عمودی است. نمودار $B \times D$ به کدام صورت خواهد بود؟

- (۱) سطح یک مستطیل (۲) دو پاره‌خط افقی (۳) دو پاره‌خط عمودی (۴) چهار نقطه

۳۲۲. اگر $Y \subseteq A \cap B \subseteq X$ و $Y \subseteq A' \cup B' \subseteq X$ باشد، حاصل $(X \cup A) \cap (Y \cap B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) \emptyset (۴) مجموعه مرجع

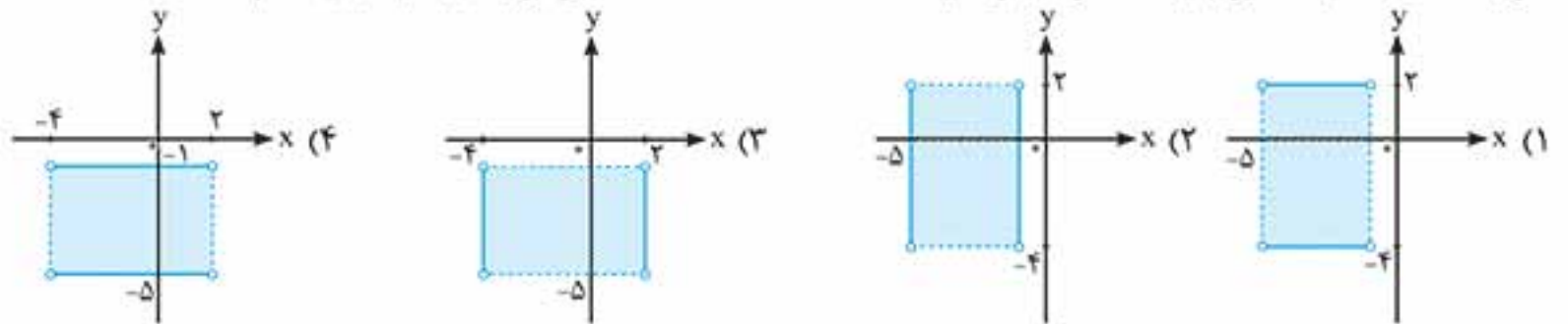
۳۲۳. کدام گزینه یک افراز از مجموعه $\{a, b, \{a, b\}, \emptyset\}$ است؟

- (۱) $\{a\}, \{b\}, \{\emptyset\}$ (۲) $\{\{a, b\}, b\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}$ (۳) $\{\{a, b\}\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}$ (۴) $\{\{a, b\}, b\}, \{a, \emptyset\}$

۳۲۴. مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ چند افراز دارد به طوری که a و b با هم عضو یک زیرمجموعه ۳ عضوی باشند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۳۲۵. اگر $A = \{x-1, 2x+3\}$ و $B = \{a\}$ دو مجموعه باشند که $A \cup B = A \cap B$ ، نمودار $[a, -1] \times (x, 2)$ کدام است؟



مدت زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

آزمون پایانی فصل اول



۱. کدام گزینه یک گزاره است؟

- (۱) $x^2 > 0$
 (۲) بین $x!$ و $(x+3)!$ عدد اولی وجود ندارد.
 (۳) هر عدد فرد بزرگتر از ۵ به صورت جمع سه عدد اول نوشته می‌شود.
 (۴) فاصله نقطه x روی محور از مبدا، دو واحد است.

۲. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $(a+1)^2 + (b-1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \wedge b = 1$
 (۲) $(a+1)(b-1) = 0 \Rightarrow a = -1 \wedge b = 1$
 (۳) $a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = -1$
 (۴) گزینه «۱» و «۳»

۳. به ازای کدام پیشامد A ، گزاره نمای «در پرتاب تاس، احتمال آنکه A رخ بدهد، برابر $\frac{1}{4}$ نیست» ارزش درستی دارد؟

- (۱) زوج آمدن (۲) مضرب ۳ بودن (۳) اول بودن (۴) کمتر از ۴ آمدن

۴. گزاره $(p \vee \sim q) \wedge q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) $p \vee q$ (۲) $p \wedge q$ (۳) T (۴) F

۵. گزاره «چنین نیست که x اول نباشد یا فرد باشد» با کدام گزاره هم‌ارز منطقی است؟

- (۱) x اول است یا x زوج است.
 (۲) x اول نیست و x فرد نیست.
 (۳) x اول و زوج است.
 (۴) x اول نیست ولی زوج است.

۶. می‌دانیم گزاره «اگر هوا آفتابی باشد به دریا می‌رویم» نادرست است. در این صورت:

- (۱) هوا آفتابی است ولی به دریا نمی‌رویم.
 (۲) هوا آفتابی است و به دریا می‌رویم.
 (۳) هوا آفتابی نیست و به دریا می‌رویم.
 (۴) هوا آفتابی نیست و به دریا نمی‌رویم.

۷. گزاره شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) T (۲) F (۳) $p \Rightarrow q$ (۴) $\sim p \Rightarrow q$

درس دوم - معیارهای گرایش به مرکز

در این دو درس می‌خواهیم معیارهایی (شاخص‌هایی) را معرفی کنیم که بتوانیم با توجه به آن‌ها وضعیت جامعه را تحلیل کنیم. معیارها به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

- ۱ معیارهای گرایش به مرکز (مرکزی): این شاخص‌ها محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند.
 - ۲ معیارهای پراکندگی: این شاخص‌ها میزان پراکندگی (دوری یا نزدیک بودن داده‌ها به هم) را نشان می‌دهند.
- معیارهای (شاخص‌های) گرایش به مرکز: سه نوع معیار گرایش به مرکز وجود دارد: ۱ میانگین ۲ میانه ۳ مد

نماد سیگما (Σ)

اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، مجموع آن‌ها را با نماد سیگما نشان می‌دهیم: (می‌خوانیم سیگمای i از ۱ تا n)

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

میانگین

همه شما فرمول میانگین را می‌دانید. اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، میانگین آن را با \bar{x} نمایش می‌دهیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

میانگین موزون (وزن‌دار) داده‌ها

فرض کنید داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب دارای فروانی (تعداد تکرار) w_1, w_2, \dots, w_n باشند. تعداد کل داده‌ها برابر $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ است. میانگین موزون داده‌ها را با \bar{x}_w نمایش داده و داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

x_i (داده‌ها)	x_1	x_2	...	x_n
فروانی	w_1	w_2	...	w_n



اگر میانگین چند درس با ضرایب مختلف را بخواهیم، ضرایب را به عنوان وزن هر نمره در نظر می‌گیریم و از میانگین موزون استفاده می‌کنیم.

مثال: درصدهای دانش‌آموزی در یک آزمون در دروس عمومی به صورت زیر بوده است. میانگین درصدهای او چقدر است؟

	ادبیات	عربی	معارف	زبان
درصد	۲۰٪	۱۵٪	۵۰٪	۴۰/۵٪
ضریب	۴	۲	۳	۲

$$۳۴/۱(۴)$$

$$۳۴(۳)$$

$$۳۱(۲)$$

$$۳۱/۳۷۵(۱)$$

$$\bar{x}_w = \frac{(۴ \times ۲۰) + (۲ \times ۱۵) + (۳ \times ۵۰) + (۲ \times ۴۰/۵)}{۴ + ۲ + ۳ + ۲} = ۳۱\%$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

به دست آوردن میانگین از روی فروانی نسبی

تعداد کل داده‌ها برابر $N = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ است، پس $\frac{w_i}{N}$ برابر فروانی نسبی داده i ام می‌شود.

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{N} = \frac{w_1}{N} x_1 + \frac{w_2}{N} x_2 + \dots + \frac{w_n}{N} x_n = \bar{w}_1 x_1 + \bar{w}_2 x_2 + \dots + \bar{w}_n x_n = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \cdot x_i$$

مثال: میانگین داده‌های زیر، کدام است؟

داده‌ها	۱	۲	۳	۴
فروانی نسبی	۰/۳	x	۰/۱	۰/۴
	۳(۴)	۲/۴(۳)	۲/۶(۲)	۲/۵(۱)

(ریاضی ۹۳ با تغییر)

۶۷۷. در جدول فراوانی زیر، میانگین جامعه برابر ۴۱ است. قطاع رنگ شده برای داده ۴۱ چه زاویه مرکزی دارد؟

داده‌ها	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی	۷	۱۰	۱۵	۱۲	a

- ۹۶° (۱) ۹۸° (۲) ۱۰۲° (۳) ۱۰۸° (۴)

(ریاضی ۹۸)

۶۷۸. نمرات ریاضی ۴۰ دانش آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

- ۱۴/۲ (۱) ۱۴/۲۵ (۲) ۱۴/۴ (۳) ۱۴/۷۵ (۴)

(ریاضی ۸۸)

۶۷۹. در جدول فراوانی زیر، میانگین به صورت $\bar{x} = 12 + 2a$ محاسبه شده است. \bar{a} کدام است؟

x_i	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
فراوانی	۲	۵	۵	۹	۳

- ۰/۲۵ (۱) ۰/۳۶ (۲) ۰/۵۴ (۳) ۰/۴۵ (۴)

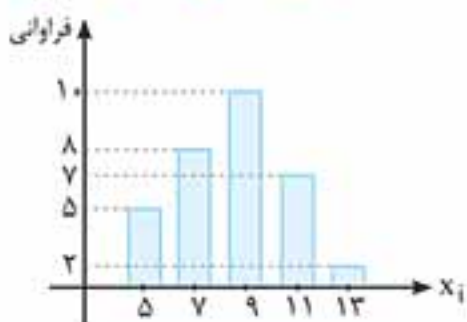
۶۸۰. میانگین موزون داده‌های مقابل برابر $22 + 3a$ است. a کدام است؟

داده‌ها	۱۶	۱۹	۲۲	۲۵	۲۸
فراوانی	۲	۴	۶	۳	۵

- ۰/۱۵ (۱) ۰/۲۰ (۲) ۰/۲۵ (۳) ۰/۴۵ (۴)

(ریاضی ۹۵ فارغ با اندکی تغییر)

۶۸۱. با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، میانگین موزون داده‌ها کدام است؟



- ۸/۴۲ (۱)
۸/۵۶ (۲)
۸/۶۵ (۳)
۸/۷۵ (۴)

۶۸۲. داده‌های دورافتاده را از داده‌های ۱، ۲، ۲۰، ۲۱، ۲۱، ۲۵ حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

- ۲۱/۷۵ (۱) ۱۷/۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۱/۶ (۴)

۶۸۳. در جدول مقابل اگر به همه داده‌ها ۱/۵ واحد اضافه کنیم، میانگین برابر ۱۰ می‌شود. فراوانی داده ۱۱ کدام است؟ (تمرین ۸۹ با اندکی تغییر)

داده‌ها	۳	۷	۱۱	۱۵
فراوانی	۴	۵	a	۳

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۶۸۴. در ۴۵ داده آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه شدیم که به جای داده ۱۰۲۴، عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع اشتباه، میانگین واقعی کدام است؟

(انسانی ۹۴ فارغ)

- ۱۱۱۹ (۱) ۱۱۲۰ (۲) ۱۱۲۱ (۳) ۱۱۲۲ (۴)

۶۸۵. جدول زیر درصد نمرات داوطلبی با ضرایب متفاوت است. اگر حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ باشد، حداقل نمره ادبیات وی برای پذیرش کدام است؟

(انسانی ۹۱)

دروس	ادبیات	معارف	زبان	اختصاصی
درصد نمره	?	۹۰	۸۱	۷۰
ضریب	۴	۲	۳	۸

- ۷۱ (۱) ۷۲ (۲) ۷۳ (۳) ۷۴ (۴)

برآورد نقطه‌ای

۸۳۴. درآمد جامعه‌ای از ۵ کارمند بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است. میانگین درآمد برآورد شده با نمونه دوتایی {۱, ۴} چقدر با میانگین جامعه اختلاف دارد؟

- ۱, ۱, ۲, ۳, ۴
- (۱) ۱/۱۵ (۲) ۱/۱ (۳) ۲/۱ (۴) ۳/۱

۸۳۵. تعداد مسافران یک تاکسی در ۵ بار طی کردن مسیری به صورت زیر است. چقدر احتمال دارد میانگین نمونه دوتایی انتخاب شده برابر ۲/۵ باشد؟

- ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ (مشابه تمرین کتاب درس)
- (۱) ۱/۵ (۲) ۱/۱ (۳) ۳/۱ (۴) ۴/۲

۸۳۶. تعداد اعضای چهار خانواده به صورت زیر است. کدام نمونه دوتایی برآورد بهتری از میانگین تعداد اعضای این خانواده‌ها ارائه می‌کند؟

- ۲, ۲, ۳, ۵
- (۱) {۲, ۲} (۲) {۲, ۳} (۳) {۲, ۵} (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۸۳۷. تعداد فرزندان ۴ خانواده به صورت مقابل است. کدام نمونه ۳ تایی برآورد بهتری برای میانگین تعداد فرزندان است؟

- ۱, ۴, ۲, ۳
- (۱) {۱, ۲, ۳} (۲) {۴, ۲, ۱} (۳) {۱, ۴, ۳} (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۸۳۸. از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی، نمونه‌های دوتایی انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که میانگین نمونه برابر ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) ۱/۴ (۲) ۱/۶ (۳) ۱/۱۲ (۴) ۱/۹

۸۳۹. از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی، نمونه‌های دوتایی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، میانگین نمونه برابر با میانگین جامعه است؟

- (۱) ۲/۹ (۲) ۱/۹ (۳) ۱/۱۲ (۴) ۱/۶

۸۴۰. با انتخاب نمونه‌های سه‌تایی از بین اعداد زیر چقدر احتمال دارد میانگین نمونه برابر ۲ باشد؟

- ۰, ۱, ۴, ۵, ۳, ۲
- (۱) ۱/۱ (۲) ۲/۱ (۳) ۱۵/۱ (۴) ۲۵/۱

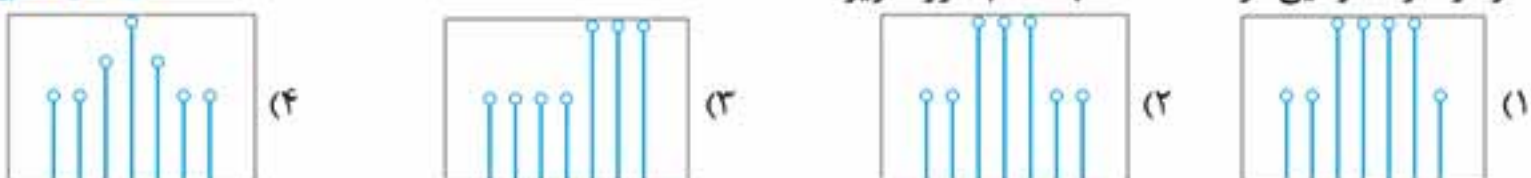
۸۴۱. نمونه‌های دوتایی از اعداد زیر انتخاب می‌کنیم. با احتمال ۲/۱ میانگین نمونه دوتایی برابر ۲/۵ می‌شود. x کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- ۰, ۲, ۳, x, ۱, ۴
- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

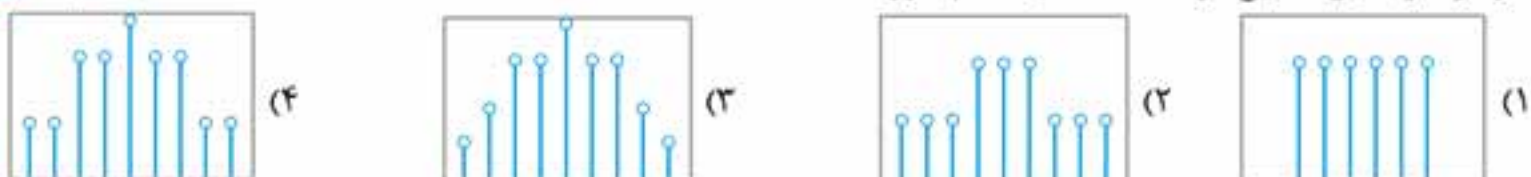
۸۴۲. از ۶ نفر در مورد تعداد دفعاتی که در سال گذشته به استادیوم ورزشی رفته‌اند، سوال می‌پرسیم. نتایج به صورت زیر بوده است. چقدر احتمال دارد میانگین نمونه ۵ تایی انتخاب شده برابر ۱ باشد؟

- ۰, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲
- (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۶ (۳) ۲/۳ (۴) ۱/۳

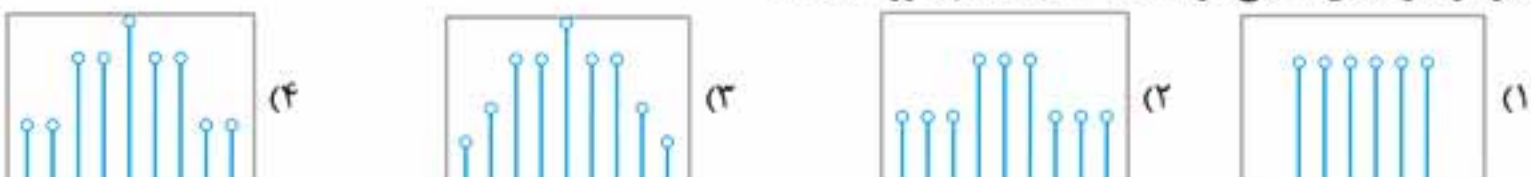
۸۴۳. نمودار نمونه دوتایی در تست ۸۳۶ به کدام صورت زیر است؟



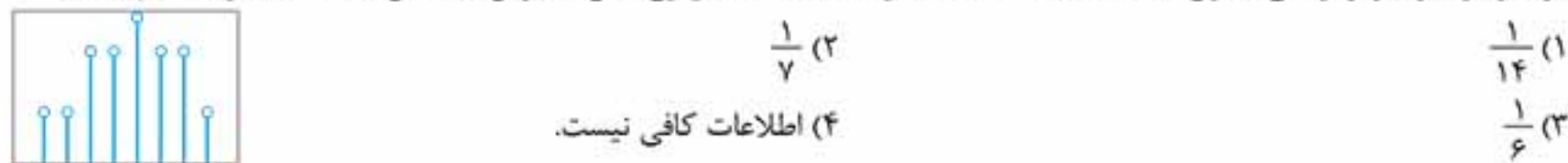
۸۴۴. نمودار نمونه‌های ۴ تایی در تست ۸۴۱ به کدام صورت است؟



۸۴۵. نمودار نمونه‌های ۵ تایی در تست ۸۴۱ به کدام صورت است؟



۸۴۶. در نمودار نمونه زیر ارتفاع ستون‌ها متناسب با اعداد ۱، ۲ و ۳ است. احتمال رخ دادن کمترین میانگین با انتخاب نمونه کدام است؟



پاسخ نامہ تشریحی

۱.

اولی می گوید ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج می شود، y و x هم که دو عدد طبیعی متوالی هستند پس ضرب آن ها یعنی xy زوج می شود.

۲.

علت بیماری از قند یا فشار است. حالا از قند نیست پس از فشار خون است.

۳.

B نتوانسته دو گل یا بیشتر به A بزند چون اگر زده بود A حذف می شد در صورتی که گفته A حذف نشده است.

۴.

عدد x مربع کامل نیست، چون اگر مربع کامل باشد، دیگر اول نخواهد بود؛ در صورتی که گفته x اول است.

۵.

گزینه «۲» یک جمله خبری است که فقط یک ارزش دارد پس گزاره است. جمله های پرسشی، عاطفی و امری گزاره نیستند، پس گزینه های «۱»، «۳» و «۴» گزاره نیستند.

۶.

گزینه «۱» گزاره نما است. مثلاً اگر $x=2$ قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل درست، ولی اگر $x=4$ قرار دهیم ارزش آن نادرست می شود. سایر گزینه ها جمله های خبری هستند که ارزش آن ها فقط درست است یا فقط نادرست. گزینه «۲» یکی از حدس های ریاضی است که درستی یا نادرستی آن هنوز مشخص نشده است ولی بالاخره این گزاره یا درست است یا نادرست. گزینه های «۳» و «۴» جمله های خبری هستند که فقط یک ارزش دارند پس گزاره هستند. توجه دارید که گزینه «۴» یک گزاره سوری است.

۷.

هر گزاره فقط یک ارزش دارد نه گزاره نما. ارزش گزاره نما به ازای مقادیر مختلف به جای متغیرها مختلف خواهد بود. سایر گزینه ها همگی درست هستند خوب است آن ها را به خاطر داشته باشید.

۸.

جمله «در پرتاب تاس احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است.» گزاره نما است، چون جمله خبری شامل متغیر A است. بنابراین نمی توانیم در مورد ارزش آن بحثی کنیم، مگر این که پیشامد A مشخص شده باشد. دو جمله دیگر، گزاره به حساب می آیند چون یک جمله خبری را بیان می کنند که ارزش آن ها فقط درست یا فقط نادرست است.

۹.

درست است که حاصل $3^{10} + 4^{1000}$ را نمی دانیم ولی بالاخره حاصل آن عددی طبیعی است پس گزینه «۲» درست است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه ۳: حواستان باشد اگر $a < 1$ باشد، هر چه به توان بیشتری برسد، کوچک تر می شود پس گزینه «۳» نادرست است.

گزینه ۴: داریم: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$ یعنی همه اعداد صحیح گویا هستند. پس $0 \in Q$ و $0 \times \sqrt{2} = 0$ و گزینه «۴» هم نادرست است.

۱۰.

گفتیم همه جمله های ریاضی که با «برای هر x از مجموعه ای معین...» یا «برای هیچ x از مجموعه ای معین...» یا «به ازای برخی مقادیر x از مجموعه ای معین...» شروع می شوند، دارای یک ارزش بوده و گزاره به حساب می آیند. این ها، همان سورها هستند که قبل از گزاره نماها قرار گرفته و آن ها را تبدیل به گزاره می کنند. پس گزینه های «۴»، «۲» و «۱» همگی

گزاره هستند. خوب است توجه کنید ارزش گزینه «۱» درست است، چون به ازای برخی مقادیر مثل $1/5, 1, 2, \dots, \sqrt{x}$ تعریف می شود. ارزش گزینه «۲» نادرست است، چون جمع هر دو عدد گنگ، لزوماً گنگ نمی شود. مثلاً $(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$. ارزش گزاره «۴» هم نادرست است، چون عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن مثبت نمی شود، مثل $0^2 = 0$. پس مربع هر عدد حقیقی مثبت نمی شود.

۱۱.

فضای نمونه ای پرتاب تاس $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ می شود. حالا داریم:

گزینه ۱: $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

گزینه ۲: $B = \{3, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

گزینه ۳: $C = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$

گزینه ۴: $D = \{4, 5, 6\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{3}$

۱۲.

اول معادله درجه دو را حل می کنیم:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

مجموعه جواب زیرمجموعه دامنه است. چون $D = (0, +\infty)$ ، فقط جواب $x=2$ قابل قبول است.

۱۳.

از نامعادله $2x+3 > 0$ نتیجه می گیریم $x > -1/2$ اما چون $D = \mathbb{Z}$ است مجموعه جواب می شود $\{-1, 0, 1, \dots\}$.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه ۲: مجموعه جواب $S = \{\pm 7, \pm 14, \dots\}$ است، چون مضارب صحیح عدد 7 به صورت $7k$ هستند که $k \in \mathbb{Z}$. اگر به جای k ، اعداد صحیح را قرار دهید مجموعه جواب به دست می آید.

گزینه ۳: مجموعه جواب $S = \{1, 4, 9, \dots\}$ است، چون اگر x منفی باشد \sqrt{x} تعریف نمی شود.

گزینه ۴: مجموعه جواب، همه اعداد صحیح به غیر از صفر هستند. چون مجموعه جواب (S) زیرمجموعه دامنه (D) است. دامنه برابر اعداد صحیح است پس مجموعه جواب از آن انتخاب می شود به طوری که گزاره به دست آمده درست باشد.

۱۴.

گزینه های «۱»، «۲» و «۴» گزاره نما نبوده، بلکه گزاره هستند اما گزینه «۳» گزاره نما است. به ازای هر عدد از اعداد طبیعی که به جای x قرار دهیم، $x+1 > -2$ می شود، پس مجموعه جواب برابر با کل اعداد طبیعی است. خوب است بدانید گزاره ای که در گزینه «۱» بیان شده است، معروف به حدس گلدباخ بوده که هنوز ثابت یا رد نشده است.

۱۵.

در گزینه «۱» اگر $n=1$ یا $n=4$ قرار دهیم $2^n - 1$ اول نمی شود. پس این دو عدد جزء جواب نبوده و بنابراین مجموعه جواب برابر با کل اعداد طبیعی نیست. گزینه «۲» نیز به ازای $n=1$ درست در نمی آید. گزینه «۴» هم به ازای $n=2$ درست نیست، اما گزینه «۳» به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است، یعنی مجموعه جواب برابر با کل اعداد طبیعی است.

۱۶۴

راهنما

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی به طوری که شامل k_1 عضو و فاقد k_2 عضو باشد، برابر $2^{n-k_1-k_2}$ است. به عبارت دیگر اگر تعداد زیرمجموعه‌های شامل یا فاقد عضوهای خاصی را بخواهید کلاً آن‌ها را کنار بگذارید چون هر کدام یک حالت بیشتر ندارند، اما $n-k_1-k_2$ عضو باقی‌مانده هر کدام دو حالت دارند (عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند).

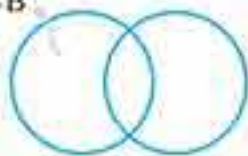
از راهنما $2^{4-1} = 2^3 = 8$ زیرمجموعه شامل عضو a وجود دارد. به زبان دیگر در کد چهار رقمی، a همیشه با عدد ۱ نظیر می‌شود ولی بقیه می‌توانند در کد با ۰ یا ۱ نظیر شوند. پس طبق اصل ضرب تعداد $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ زیرمجموعه شامل a وجود دارد.

۱۶۵

عضو $\{a, b\}$ تکراری است، پس آن را یک بار می‌شمیریم. $2 \cdot 8$ عضو دارد. طبق راهنما تست قبل $2^3 - 1 = 7$ زیرمجموعه وجود دارد که عضو $\{a, b\}$ را نداشته باشد. به عبارت دیگر در کدهای سه رقمی، نظیر $\{a, b\}$ همیشه صفر ولی دو رقم دیگر، دو حالت دارند.

۱۶۶

هر مجموعه n عضوی 2^n زیرمجموعه دارد، پس: $2^n = 512 = 2^9$
 $n = 9$ یعنی مجموعه A ، نه عضو دارد. از طرفی طبق قانون دمورگان:



$$(B \cup A')' = B' \cap A = A - B$$

A دارای ۹ عضو است که ۳ تا از آنها در $A \cap B$ هستند پس $A - B$ دارای ۶ عضو و در نتیجه $2^6 = 64$ زیرمجموعه است.

۱۶۷

$\{2, 3, 4\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 اعداد ۲، ۳ و ۴ حتماً عضو X هستند. اعداد ۱، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ ممکن است عضو X باشند یا نباشند یعنی هر کدام دو حالت دارند پس $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ می‌توان به جای X قرار داد.

۱۶۸

اعداد ۱ و ۲ حتماً باید عضو X باشند تا در اشتراک ظاهر شوند، اما $3 \notin X$. پس این‌ها یک حالت دارند. بقیه اعداد یک رقمی طبیعی یعنی ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ هر کدام دو حالت دارند، (عضو X باشند یا نباشند) پس $2^6 = 64$ مجموعه برای X وجود دارد.

۱۶۹

طبق راهنما قبل، $2^{6-1-1} = 16$ زیرمجموعه وجود دارد.

۱۷۰

راهنما

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$. یادآوری می‌کنیم که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۹ عدد طبیعی یک رقمی داریم. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن می‌شود:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$$

۱۷۱

راهنما

با استفاده از مفهوم تعداد زیرمجموعه‌ها چند اتحاد مهم را می‌توانیم به دست آوریم:

کل زیرمجموعه‌ها

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots$$

نصف کل زیرمجموعه‌ها $= 2^{n-1}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

نصف کل زیرمجموعه‌ها $= 2^{n-1}$

تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی می‌شود: $\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \dots + \binom{9}{9}$

طبق راهنما، حاصل این جمع برابر $2^8 = 256$ می‌شود.

۱۷۲

راهنما

فرمول کلی $\binom{n}{r}$ را به یاد داشته باشید ولی در بیشتر مواقع نیازی به آن نبوده و با نکته‌های زیر می‌توانید حاصل ترکیب را به دست آورید.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)}{r \times (r-1) \times \dots \times 1}$$

$$\binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \quad , \quad a + b = n \Rightarrow \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

مسئله به زبان ریاضی می‌شود: $\binom{n}{3} = \binom{n}{4} + 5$

باز کردن رابطه‌ها و حل معادله طولانی است. بهتر است n را با جستجو به دست آوریم. می‌دانیم $n \geq 4$ است.

$$n = 4 \Rightarrow \binom{4}{3} = \binom{4}{4} + 5 \Rightarrow 4 \neq 1 + 5$$

$$n = 5 \Rightarrow \binom{5}{3} = \binom{5}{4} + 5 \Rightarrow \binom{5}{3} = \binom{5}{1} + 5$$

$$\Rightarrow \frac{5 \times 4}{3} = 5 + 5 \quad \checkmark$$

پس کمترین تعداد عضوهای مجموعه برابر ۵ است. تعداد زیرمجموعه‌های

دو عضوی می‌شود: $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

۱۷۳

می‌خواهیم ۳ عضو از ۶ عضو مجموعه را انتخاب کنیم تا زیرمجموعه ۳ عضوی ساخته شود. از طرفی عضو a حتماً انتخاب می‌شود، پس کافی است

دو تا از پنج عضو دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{5}{2} = 10$ روش امکان پذیر

است. پس ۱۰ زیرمجموعه ۳ عضوی شامل a به وجود می‌آید.



۵۰۸

دقیقاً شبیه تست قبلی عمل می‌کنیم. درون ظرف جدید ۱۲ مهره وجود دارد که ۷ تا از جعبه اول و ۵ تا از جعبه دوم آمده است.

$$\frac{7}{12} \times \frac{6}{24} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{18} = \frac{7}{48} + \frac{5}{72} = \frac{21}{144}$$

از جعبه اول از جعبه دوم سفید بودن
از جعبه اول از جعبه دوم از جعبه اول

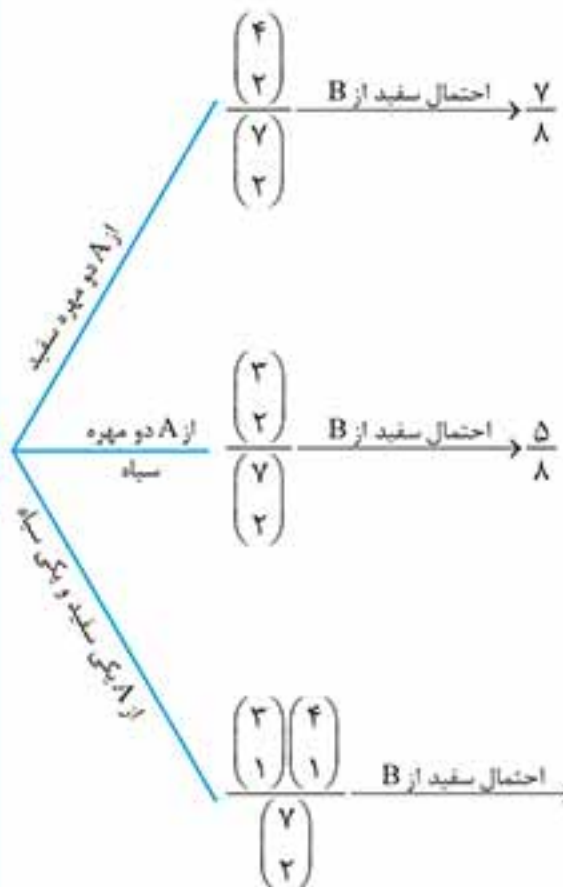
۵۰۹

درون صندوق جدید ۳۰ میوه وجود دارد که ۱۰ تا از صندوق A و ۲۰ تا از صندوق B درون آن قرار گرفته است. شبیه ۳ تست قبلی داریم:

$$P(\text{لکه‌دار}) = \frac{10}{30} \times \frac{8}{20} + \frac{20}{30} \times \frac{9}{45} = \frac{4}{45} + \frac{2}{15} = \frac{4+6}{45} = \frac{2}{9}$$

۵۱۰

سه حالت ممکن است برای دو مهره‌ای که از A انتخاب می‌کنیم، پیش آید:



$$P(B \text{ سفید بودن از } B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{2}{7} + \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} \times \frac{4}{7} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{6}{7} = \frac{6 \times 2 + 12 \times 4 + 3 \times 6}{21 \times 7} = \frac{129}{147} = \frac{43}{49}$$

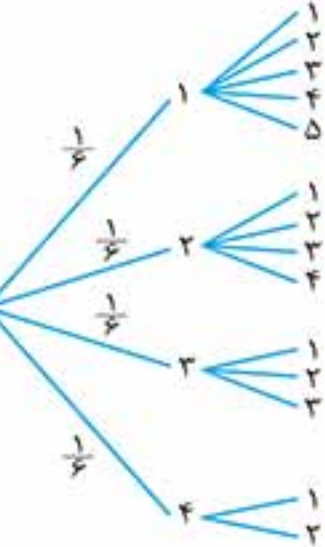
۵۱۱

$$P(\text{معیوب بودن دومی}) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{4}{8} \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7} \right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

نکته: در درس بعدی نشان می‌دهیم وقتی از یک جعبه چند مهره، پشت سر هم خارج می‌کنیم و از نتایج قبلی اطلاع نداریم، نتیجه مهره n ام مستقل از قبلی‌هاست. به عبارت دیگر برای محاسبه احتمال رنگ مهره n ام اصلاً فرض کنید قبلی‌ها خارج نشده باشد.

در همین مثال برای محاسبه احتمال معیوب بودن لامپ دوم فرض کنید اصلاً لامپ اول خارج نشده باشد پس احتمال معیوب بودن می‌شود $\frac{4}{8}$.

۵۱۲



$$P(Y \text{ کم‌تر از } 7) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{14}{6} = \frac{7}{18}$$

۵۱۳

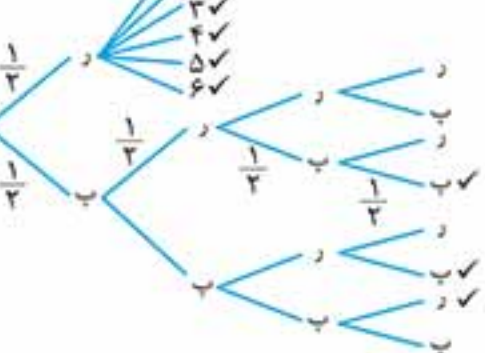
ابتدا با احتمال کل، احتمال مختلف را به دست می‌آوریم:

$$P(\text{تخلف}) = \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{100} = 0.034$$

$$P(\text{مرد} | \text{تخلف}) = \frac{P(\text{مرد}) \times P(\text{تخلف} | \text{مرد})}{P(\text{تخلف})} = \frac{60 \times 5}{2400} = \frac{3}{24}$$

۵۱۴

نمودار درختی فضای نمونه‌ای به صورت زیر است. شاخه‌هایی که زده‌ایم مطلوب است. پس:



$$P(A) = \frac{1}{2} \times 1 + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times 3 = \frac{11}{16}$$

۵۱۵

پیشامد آن که امیر از بابک بلندتر باشد را A و پیشامد اینکه امیر از نظر بلندی قد نفر چهارم باشد را B می‌گیریم. بنابراین $P(B|A)$ را می‌خواهیم. طبق قانون بیز:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)} = \frac{10 \times \frac{6}{9}}{\frac{1}{2}} = 10$$



پاسخنامه کلیدی

گزینه	تست
۳	۱۸۹
۲	۱۹۰
۳	۱۹۱
۱	۱۹۲
۱	۱۹۳
۴	۱۹۴
۲	۱۹۵
۲	۱۹۶
۴	۱۹۷
۳	۱۹۸
۴	۱۹۹
۳	۲۰۰
۱	۲۰۱
۱	۲۰۲
۴	۲۰۳
۳	۲۰۴
۴	۲۰۵
۱	۲۰۶
۲	۲۰۷
۱	۲۰۸
۲	۲۰۹
۳	۲۱۰
۴	۲۱۱
۴	۲۱۲
۳	۲۱۳
۳	۲۱۴
۳	۲۱۵
۴	۲۱۶
۱	۲۱۷
۳	۲۱۸
۳	۲۱۹
۲	۲۲۰
۳	۲۲۱
۴	۲۲۲
۳	۲۲۳
۴	۲۲۴
۴	۲۲۵
۱	۲۲۶
۱	۲۲۷
۴	۲۲۸
۳	۲۲۹
۱	۲۳۰
۴	۲۳۱
۱	۲۳۲
۱	۲۳۳
۴	۲۳۴
۴	۲۳۵

گزینه	تست
۳	۱۴۲
۱	۱۴۳
۲	۱۴۴
۲	۱۴۵
۴	۱۴۶
۳	۱۴۷
۴	۱۴۸
۴	۱۴۹
۴	۱۵۰
۳	۱۵۱
۴	۱۵۲
۱	۱۵۳
۲	۱۵۴
۱	۱۵۵
۱	۱۵۶
۲	۱۵۷
۴	۱۵۸
۳	۱۵۹
۲	۱۶۰
۴	۱۶۱
۲	۱۶۲
۳	۱۶۳
۲	۱۶۴
۱	۱۶۵
۴	۱۶۶
۴	۱۶۷
۱	۱۶۸
۱	۱۶۹
۴	۱۷۰
۳	۱۷۱
۱	۱۷۲
۲	۱۷۳
۱	۱۷۴
۴	۱۷۵
۴	۱۷۶
۴	۱۷۷
۲	۱۷۸
۳	۱۷۹
۲	۱۸۰
۱	۱۸۱
۲	۱۸۲
۱	۱۸۳
۴	۱۸۴
۲	۱۸۵
۴	۱۸۶
۳	۱۸۷
۲	۱۸۸

گزینه	تست
۲	۹۵
۱	۹۶
۲	۹۷
۲	۹۸
۳	۹۹
۴	۱۰۰
۳	۱۰۱
۱	۱۰۲
۳	۱۰۳
۳	۱۰۴
۲	۱۰۵
۴	۱۰۶
۲	۱۰۷
۱	۱۰۸
۳	۱۰۹
۳	۱۱۰
۳	۱۱۱
۴	۱۱۲
۱	۱۱۳
۳	۱۱۴
۴	۱۱۵
۳	۱۱۶
۱	۱۱۷
۲	۱۱۸
۳	۱۱۹
۳	۱۲۰
۴	۱۲۱
۴	۱۲۲
۳	۱۲۳
۳	۱۲۴
۴	۱۲۵
۲	۱۲۶
۴	۱۲۷
۱	۱۲۸
۲	۱۲۹
۴	۱۳۰
۳	۱۳۱
۱	۱۳۲
۳	۱۳۳
۴	۱۳۴
۱	۱۳۵
۳	۱۳۶
۲	۱۳۷
۲	۱۳۸
۴	۱۳۹
۲	۱۴۰
۱	۱۴۱

گزینه	تست
۲	۴۸
۱	۴۹
۴	۵۰
۴	۵۱
۱	۵۲
۳	۵۳
۲	۵۴
۳	۵۵
۲	۵۶
۲	۵۷
۱	۵۸
۲	۵۹
۴	۶۰
۴	۶۱
۱	۶۲
۴	۶۳
۳	۶۴
۳	۶۵
۱	۶۶
۱	۶۷
۲	۶۸
۴	۶۹
۳	۷۰
۲	۷۱
۳	۷۲
۱	۷۳
۴	۷۴
۲	۷۵
۳	۷۶
۱	۷۷
۲	۷۸
۴	۷۹
۱	۸۰
۲	۸۱
۱	۸۲
۱	۸۳
۲	۸۴
۳	۸۵
۳	۸۶
۴	۸۷
۳	۸۸
۳	۸۹
۴	۹۰
۴	۹۱
۱	۹۲
۳	۹۳
۱	۹۴

گزینه	تست
۲	۱
۱	۲
۳	۳
۲	۴
۲	۵
۱	۶
۱	۷
۳	۸
۲	۹
۳	۱۰
۲	۱۱
۴	۱۲
۱	۱۳
۳	۱۴
۳	۱۵
۳	۱۶
۳	۱۷
۳	۱۸
۲	۱۹
۱	۲۰
۲	۲۱
۱	۲۲
۴	۲۳
۲	۲۴
۲	۲۵
۳	۲۶
۴	۲۷
۲	۲۸
۱	۲۹
۴	۳۰
۲	۳۱
۴	۳۲
۲	۳۳
۲	۳۴
۲	۳۵
۳	۳۶
۱	۳۷
۳	۳۸
۱	۳۹
۲	۴۰
۲	۴۱
۴	۴۲
۳	۴۳
۳	۴۴
۴	۴۵
۴	۴۶
۱	۴۷



$$\sigma_{xy} = 0$$

گزینه	تست
۲	۷۶۶
۱	۷۶۷
۳	۷۶۸
۴	۷۶۹
۴	۷۷۰
۳	۷۷۱
۲	۷۷۲
۲	۷۷۳
۴	۷۷۴
۳	۷۷۵
۴	۷۷۶
۳	۷۷۷
۳	۷۷۸
۱	۷۷۹
۱	۷۸۰
۳	۷۸۱
۴	۷۸۲
۳	۷۸۳
۲	۷۸۴
۲	۷۸۵
۲	۷۸۶
۴	۷۸۷
۲	۷۸۸
۱	۷۸۹
۴	۷۹۰
۳	۷۹۱
۱	۷۹۲
۱	۷۹۳
۴	۷۹۴
۴	۷۹۵
۲	۷۹۶
۲	۷۹۷
۴	۷۹۸
۴	۷۹۹
۳	۸۰۰
۴	۸۰۱
۲	۸۰۲
۲	۸۰۳
۴	۸۰۴

گزینه	تست
۳	۸۰۵
۱	۸۰۶
۳	۸۰۷
۳	۸۰۸
۱	۸۰۹
۴	۸۱۰
۳	۸۱۱
۱	۸۱۲
۲	۸۱۳
۱	۸۱۴
۴	۸۱۵
۲	۸۱۶
۴	۸۱۷
۱	۸۱۸
۳	۸۱۹
۲	۸۲۰
۳	۸۲۱
۴	۸۲۲
۱	۸۲۳
۴	۸۲۴
۴	۸۲۵
۳	۸۲۶
۴	۸۲۷
۲	۸۲۸
۱	۸۲۹
۳	۸۳۰
۱	۸۳۱
۳	۸۳۲
۲	۸۳۳
۴	۸۳۴
۴	۸۳۵
۴	۸۳۶
۴	۸۳۷
۳	۸۳۸
۲	۸۳۹
۳	۸۴۰
۱	۸۴۱
۴	۸۴۲
۲	۸۴۳

گزینه	تست
۴	۸۴۴
۱	۸۴۵
۱	۸۴۶
۲	۸۴۷
۱	۸۴۸
۱	۸۴۹
۲	۸۵۰
۳	۸۵۱
۳	۸۵۲
۴	۸۵۳
۲	۸۵۴
۴	۸۵۵
۴	۸۵۶
۳	۸۵۷
۲	۸۵۸
۴	۸۵۹
۱	۸۶۰
۱	۸۶۱
۳	۸۶۲
۲	۸۶۳
۳	۸۶۴
۲	۸۶۵
۲	۸۶۶
۱	۸۶۷
۱	۸۶۸
۱	۸۶۹
۳	۸۷۰
۴	۸۷۱
۳	۸۷۲
۲	۸۷۳
۳	۸۷۴
۴	۸۷۵
۲	۸۷۶
۱	۸۷۷
۲	۸۷۸
۱	۸۷۹
آزمون ۱	
۳	۱
۴	۲

گزینه	تست
۲	۳
۲	۴
۳	۵
۱	۶
۱	۷
۲	۸
۴	۹
۴	۱۰
۲	۱۱
۳	۱۲
۲	۱۳
۲	۱۴
۱	۱۵
۱	۱۶
۲	۱۷
۱	۱۸
۲	۱۹
۳	۲۰
آزمون ۲	
۳	۱
۳	۲
۱	۳
۳	۴
۲	۵
۴	۶
۴	۷
۱	۸
۲	۹
۱	۱۰
۱	۱۱
۳	۱۲
۱	۱۳
۳	۱۴
۴	۱۵
۲	۱۶
۳	۱۷
۴	۱۸
۲	۱۹
۴	۲۰

گزینه	تست
آزمون ۳	
۳	۱
۳	۲
۲	۳
۴	۴
۱	۵
۲	۶
۱	۷
۲	۸
۳	۹
۱	۱۰
۲	۱۱
۲	۱۲
۱	۱۳
۳	۱۴
۲	۱۵
۱	۱۶
۱	۱۷
۳	۱۸
۴	۱۹
۲	۲۰
آزمون ۴	
۲	۱
۴	۲
۲	۳
۴	۴
۲	۵
۱	۶
۳	۷
۳	۸
۲	۹
۳	۱۰
۱	۱۱
۲	۱۲
۴	۱۳
۳	۱۴
۳	۱۵
۱	۱۶