

### اتحاد مربع دوجمله‌ای

ابتدا تعریف اتحاد و سپس چند اتحاد مهم را که در سال نهم با آن‌ها آشنا شده‌اید، بیان می‌کنیم تا آن‌ها را مرور کنید. بعد در ادامه با اتحاد‌های جدیدی آشنا می‌شوید و کاربردهای مهم آن‌ها را هم خواهید دید.

**اتحاد:** وقتی یک تساوی بین دو عبارت جبری، به‌ازای تمام مقادیر برای متغیّرش، همواره درست و برقرار باشد، به آن یک اتحاد می‌گوییم. مثلاً رابطه  $X - X^2 = X(1 - X)$  یک اتحاد است، چون به  $X$  هر مقدار دلخواهی بدهیم، دو طرف تساوی یکی می‌شوند. اگر به  $X$  مقدار ۱ بدهیم، دو طرف تساوی، برابر صفر می‌شوند، اگر به  $X$  مقدار ۲ بدهیم، دو طرف تساوی برابر  $-2$  می‌شوند، به همین ترتیب به‌ازای هر  $X$ ، به مقدار یکسانی در دو طرف تساوی می‌رسیم.

#### همیشه یادم باشه

وقتی یک اتحاد داریم، هر مقداری که به متغیّرش بدهیم، در دو طرف تساوی مقدار یکسانی به‌دست می‌آید.

**مثال** کدام یک از تساوی‌های زیر، یک اتحاد است؟

الف)  $X^2 - 1 = 2X - 1$       ب)  $2(X - 1) = 2X - 2$

**پاسخ:** الف) اگر این تساوی یک اتحاد باشد، باید به‌ازای هر مقداری برای  $X$  برقرار شود، اما مثلاً به‌ازای  $X = 3$  داریم:

$$3^2 - 1 = 2(3) - 1 \Rightarrow 9 - 1 = 6 - 1 \Rightarrow 8 = 5$$

همان‌طور که می‌بینید به یک تساوی نادرست رسیدیم، پس این تساوی، یک اتحاد نیست.

**فانم اجازه!** ما به  $X$  مقدار صفر دادیم، دو طرف مساوی  $-1$  شد، ما هم گفتیم، پس اتحاد هست! پس چرا شما به اتحاد نرسیدید؟

**پاسخ:** فیلی کار ببری کردی! اما سؤال فوبیه برای بچه‌هایی مثل تو که زیاد از این اشتباه‌ها می‌کنن. ما تو تعریف اتحاد پی گفتیم؟ گفتیم «به‌ازای هر مقدار  $X$  نه به‌ازای یک یا دو یا حتی ده مقدار  $X$ ، پس هیچ وقت آگه به‌ازای یک  $X$  به تساوی درست رسیدی، فوری نتیجه نگیری که اتحاد هست. باید به‌ازای همه  $X$ ها درست باشه و آگه حتی به‌ازای یک  $X$ ، تساوی برقرار نبود، اتحاد نیست. در واقع برای اثبات اتحاد بودن یک تساوی باید از خود تساوی به یک تساوی همواره درست برسید و اون وقت هست که می‌تونید به یقین بگیرد که تساوی داده‌شده، یک اتحاد.

ب) در این تساوی داریم:

$$2(X - 1) = 2X - 2 \Rightarrow 2X - 2 = 2X - 2 \Rightarrow 2X - 2X = 2 - 2 \Rightarrow 0 = 0$$

به یک تساوی همواره درست رسیدیم. پس تساوی داده شده یک اتحاد است و به‌ازای همه مقادیر  $X$  برقرار می‌باشد.

### اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای	مربع جمله دوم + ۲ برابر حاصل ضرب جمله اول در دوم + مربع جمله اول = مربع مجموع دو جمله
اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای	مربع جمله دوم + ۲ برابر حاصل ضرب جمله اول در دوم - مربع جمله اول = مربع تفاضل دو جمله

#### همیشه یادم باشه

در این اتحاد یک پرانتز با توان ۲ داریم که داخل آن ۲ تا جمله است و حاصل این پرانتز، ۳ تا جمله می‌باشد، ۲ تا جمله مربع کامل و یک جمله که مضرب ۲ است و علامت آن با علامت بین دو جمله داخل پرانتز یکسان می‌باشد.

**مثال** با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

$$\text{الف) } (\dots + \sqrt{3})^2 = 4x^2 - \dots + \dots \quad \text{ب) } (a + \dots)^2 = \dots + 6a + \dots$$

**پاسخ:** الف) سمت چپ یک پرانتز با توان ۲ داریم که بین دوجمله، جمع است، پس اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای می‌باشد. سمت راست ۳ تا جمله داریم و می‌دانیم که باید ۲ جمله از آن مربع کامل باشد، چون  $6a$  مربع کامل نیست، حتماً آن جمله‌ای است که مضرب ۲ می‌باشد، یعنی به شکل  $2 \times 3a$  است و  $3a$  همان حاصل ضرب جمله اول در دوم می‌باشد. طبق پرانتز سمت چپ، یکی از جمله‌ها  $a$  است، پس حتماً جمله دیگر ۳ می‌باشد. حال جاهای خالی سمت راست را با مربع این دو جمله پر می‌کنیم:

$$(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

ب) در سمت راست تساوی، جمله  $4x^2$  را داریم که مربع کامل می‌باشد و واضح است که  $4x^2$  مربع جمله دوم یعنی  $\sqrt{3}$  نیست. پس جمله اول با توجه به علامت منهای جمله وسط در سمت راست تساوی،  $-2x$  بوده که مربع آن  $(-2x)^2 = 4x^2$  شده است، بنابراین داریم:

$$(-2x + \sqrt{3})^2 = 4x^2 - \frac{2 \times 2x \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}x} + \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$$

**نته** اتحادهای کاربردی زیر، از اتحاد مربع دوجمله‌ای نتیجه می‌شوند:

$$\text{۱) } (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$\text{۲) } (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

**مثال** حاصل  $(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2$  به ازای  $a = 1000$  و  $b = 3500$  کدام است؟

$$-84000000 \quad (4) \quad 42000000 \quad (3) \quad 84000000 \quad (2) \quad -42000000 \quad (1)$$

**پاسخ:** اگر مقادیر  $a$  و  $b$  را از ابتدا در عبارت داده شده جای‌گذاری کنیم، محاسبات خیلی طولانی خواهیم داشت که احتمال خطا هم در آن زیاد است. اما اگر ابتدا عبارت را ساده کنیم، خواهیم دید که کارمان بسیار ساده خواهد شد. با استفاده از نکته فوق داریم:

$$(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2 = 4 \times 2a \times (-3b) = -24ab \quad \frac{a=1000}{b=3500} \Rightarrow -24 \times 1000 \times 3500 = -84000000 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

**نکته** حفظ کردن اتحادهای این نکته سخسته! ما که یادمون نمی‌مونه. اتحاد مربع دوجمله‌ای رو خوب یاد گرفتیم ولی این رو نه!

**پاسخ:** اشکالی نداره! همون اتحاد مربع دوجمله‌ای رو خوب یاد گرفتیم، کافیه اینا هم از همون نتیجه می‌شه. اصلاً نمی‌فوار فقط کنی. تو از همون اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کن و حاصلشون رو به‌دست بیار. یکیش رو ببین:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$

دیدی کاری نداشت! حالا فودت اون یکی رو هم به‌دست بیار.

۱- اگر تساوی  $ax - 2x + 1 = -6x + b - 3$  یک اتحاد باشد،  $a - b$  کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad -8 \quad (3) \quad 10 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۲- اگر تساوی  $ax^2 + 2 = 2(2x^2 + 1)$  یک اتحاد باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad -4 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۳- اگر تساوی  $ax - x^2 + b = -(3 + x)^2$  یک اتحاد باشد، مقدار  $a^2 + 2b$  کدام است؟

$$24 \quad (4) \quad -12 \quad (3) \quad 18 \quad (2) \quad 54 \quad (1)$$

آزمون‌های سراسری گاج

۴- اگر تساوی  $(x+1)(x^3 + ax^2 - x + 1) = x^4 + x^3 + bx^2 + c$  یک اتحاد باشد، حاصل  $\frac{a+b}{c}$  کدام است؟

$$-1 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۵- اگر تساوی  $(x+a)^2 = x^2 - 8x + b$  یک اتحاد باشد، حاصل  $a + b$  کدام است؟

$$16 \quad (4) \quad 12 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 20 \quad (1)$$

آزمون‌های سراسری گاج

۶- حاصل عبارت  $(1 - \sqrt{3}x)^2 - (1 + \sqrt{3}x)^2$  کدام است؟

$$-4\sqrt{3}x \quad (4) \quad -2\sqrt{3}x \quad (3) \quad 4\sqrt{3}x \quad (2) \quad 2\sqrt{3}x \quad (1)$$

۷- به‌ازای کدام مقدار  $a$ ، عبارت  $3x^2 - ax + 1$  مربع کامل است؟

$$\pm\sqrt{3} \quad (4) \quad \pm 2\sqrt{3} \quad (3) \quad \pm 6 \quad (2) \quad \pm 1 \quad (1)$$

آزمون‌های سراسری گاج

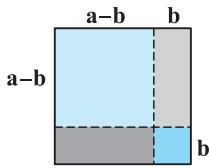
۸- به‌ازای کدام مقدار  $m$ ، عبارت  $4x^2 - \frac{m}{3}x + 9$  مربع کامل است؟

$$\pm 4 \quad (4) \quad \pm 36 \quad (3) \quad \pm 12 \quad (2) \quad \pm 18 \quad (1)$$

انسانی خارج ۹۵

۹- اگر  $5 = \left(3x + \frac{1}{2x}\right)$  باشد، حاصل  $\left(9x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)$  کدام است؟

$$22 \quad (4) \quad 21 \quad (3) \quad 20 \quad (2) \quad 18 \quad (1)$$



۱۰- از شکل مقابل، چه اتحادی نتیجه می‌شود؟

(۲) اتحاد مربع دوجمله‌ای

(۱) اتحاد مزدوج

(۴) اتحاد مکعب دوجمله‌ای

(۳) اتحاد جمله مشترک

۱۱- اگر بخواهیم عبارت  $9x^2 - \frac{19}{5}x + \frac{4}{25}$  مربع کامل باشد، باید کدام جمله را به آن اضافه کنیم؟

- (۱)  $\frac{13}{5}x$  (۲)  $\frac{7}{5}x$  (۳)  $-\frac{13}{5}x$  (۴)  $-\frac{7}{5}x$

انسانی داخل ۸۹

۱۲- با افزودن کدام عدد به عبارت  $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ ، مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۳- اگر  $(\sqrt{3} - x)^2 = y - 2\sqrt{6} + z$ ، آن‌گاه  $y^2 + z^2$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۸۵ (۳) ۱۱ (۴) ۲۵

۱۴- اگر  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 0$ ، آن‌گاه مقدار  $2x - y$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) ۲

۱۵- اگر  $a^2 + b^2 = 2a + 2b - 2$  باشد، حاصل  $(a+b)^3$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

آزمون‌های سراسری کاج

۱۶- اگر  $2a^2 + 4b^2 + 4ab + 1 = 2a + 4b + 1$  باشد، حاصل  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

آزمون‌های سراسری کاج

۱۷- اگر  $5a^2 + b^2 - 2ab + 4a + 1 = 0$  باشد، حاصل  $a^3 + b^3$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) صفر (۴)  $-\frac{1}{4}$

## درسنامه ۲

### اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک

#### اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مربع جمله دوم - مربع جمله اول = (جمله دوم - جمله اول) × (جمله دوم + جمله اول)

#### همیشه یادم باشه

در این اتحاد، ۲ تا پرانتز داریم و ۲ تا جمله که در هر دو پرانتز تکرار می‌شوند، فقط در یک پرانتز علامت بین دو تا جمله جمع و در پرانتز دیگر علامت بین ۲ تا جمله تفریق است. حاصل این ۲ تا پرانتز، ۲ تا جمله مربع کامل می‌باشد. مربع جمله‌ای که در دو تا پرانتز علامتش یکسان است (در هر دو یا مثبت یا منفی است)، در حاصل اتحاد، اول می‌آید، بعد علامت تفریق و بعد مربع آن جمله‌ای که در یکی از پرانتزها علامت مثبت و در پرانتز دیگر علامت منفی دارد.

**مثال** با استفاده از اتحاد مزدوج جاهای خالی را پر کنید.

(ب)  $(-x^2 - 2x)(\dots + \dots) = \dots - \dots$

(الف)  $(y + \dots)(\dots - \dots) = \dots - 2$

**پاسخ:** الف) در سمت چپ دو تا پرانتز با علامت‌های مثبت و منفی بین دو جمله آن‌ها و در سمت راست دو تا جمله با علامت تفریق بین آن‌ها داریم، پس حتماً اتحاد مزدوج است. اولین جمله در پرانتز اول  $y$  است، اما جمله دوم را نداریم که البته در سمت راست، حتماً عدد ۲ مربع جمله دوم می‌باشد، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$(y + \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) = y^2 - 2$$

ب) چون سمت چپ تساوی دو تا پرانتز داریم که بین دو تا جمله آن‌ها در یکی علامت جمع و در دیگری علامت تفریق است و همچنین سمت راست هم دو تا جمله با علامت تفریق بین آن‌ها داریم، پس حتماً اتحاد مزدوج می‌باشد، بنابراین در پرانتز دوم، جمله اول  $-x^2$  و جمله دوم  $2x$  است، پس داریم:

$$(-x^2 - 2x)(-x^2 + 2x) = (-x^2)^2 - (2x)^2 = x^4 - 4x^2$$

**فانم اجازه!** مگه تو صورت مثال خودش نگفته با اتحاد مزدوج جاهای خالی رو پر کنید؟ پس چرا شما دو ساعت توضیح می‌دین که به این دلیل و اون دلیل، این تساوی اتحاد مزدوجه!

**پاسخ:** آفرین، فوبه باز به همین هم رقت کردی! فورم می‌روم. براتون کامل توضیح می‌دم تا اولاً فوبه برای همه با پیفته، بعرض هم، همیشه که تو سؤال نمی‌که از کدوم اتحاد استفاده کنی، باید فوراً با توجه به ویژگی‌ت، تشخیص ببری چه اتضاریه و پی کار باید بلنی. افتار!!!

**نکته** دو عبارت  $(a+b)$  و  $(a-b)$  مزدوج یک‌دیگر نامیده می‌شوند، یعنی دو پرانتز کاملاً شبیه به هم که فقط علامت بین دو جمله با هم فرق می‌کند. در واقع یکی از جملات را نوشته و جمله دیگر را قرینه می‌کنیم، مثلاً مزدوج عبارت  $-x - y^2$ ، برابر  $-x + y^2$  یا  $x - y^2$  یا مزدوج عبارت  $3t + 1$ ، عبارت  $3t - 1$  یا  $3t + 1$  است.

**مثال** مزدوج عبارت  $a - b + 1$  را بنویسید.

**پاسخ:** برای نوشتن مزدوج این عبارت، علامت دو جمله را ثابت نگه داشته و آن‌ها را با هم می‌توان به عنوان یک جمله در نظر گرفت. و علامت جمله سوم را تغییر می‌دهیم. پس مزدوج‌های آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$a - b - 1 \quad \text{یا} \quad a + 1 + b \quad \text{یا} \quad 1 - b - a$$

**اتحاد جمله مشترک:**

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله مشترک  $\times$  مجموع جملات غیرمشترک + مربع جمله مشترک = (جمله غیرمشترک + جمله مشترک) (جمله مشترک + جمله مشترک) + حاصل ضرب جملات غیرمشترک

**همیشه یادم باشه**

در این اتحاد، ۲ تا پرانتز داریم که هر کدام ۲ تا جمله دارند، یکی از این جمله‌ها بین دو پرانتز مشترک است و جمله دیگر در هر کدام، متمایز از دیگری است. حاصل این پرانتزها، ۳ تا جمله است که فقط یک جمله (همان جمله مشترک) مربع کامل می‌باشد، یک جمله، ضرب جمله مشترک در یک عدد یا عبارت (مجموع جملات غیرمشترک) و جمله دیگر، یک عدد یا عبارت (ضرب دو جمله غیرمشترک) می‌باشد.

**مثال** جاهای خالی را با استفاده از اتحاد جمله مشترک کامل کنید.

$$(x - \dots)(x + 4) = \dots + 2x - \dots \quad \text{الف)} \quad (2x - 2)(2x - \dots) = \dots - \dots \times (2x) + 12 = \dots - \dots + 12 \quad \text{ب)}$$

**پاسخ:** الف) سمت چپ دو تا پرانتز و سمت راست، سه تا جمله داریم، پس حتماً اتحاد جمله مشترک است که جمله مشترک آن‌ها  $x$  می‌باشد. اما چه طوری جملات غیرمشترک را پیدا کنیم؟ در سمت راست، جمله  $2x$  را داریم که چون جمله مشترک  $x$  بود، پس حتماً عدد ۲، برابر مجموع دو جمله غیرمشترک است. چون یکی از جملات غیرمشترک، طبق پرانتز دوم سمت چپ، عدد ۴ است، پس جمله دیگر قطعاً  $-2$  می‌باشد  $(4 + (-2) = 2)$ . بنابراین جمله سوم سمت راست که حاصل ضرب جملات غیرمشترک است، برابر  $4 \times (-2) = -8$  می‌باشد و داریم:

$$(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$$

ب) باز هم با توجه به عبارت‌های سمت راست و چپ تساوی واضح است که اتحاد جمله مشترک با جمله مشترک  $2x$  را داریم. طبق سمت راست تساوی، حاصل ضرب دو جمله غیرمشترک، برابر ۱۲ شده و چون در پرانتز اول سمت چپ، یکی از جملات غیرمشترک  $-2$  داده شده، پس جمله غیرمشترک دیگر  $-6$  است  $(12 = (-2)(-6))$ . ضرب جمله مشترک، یعنی  $2x$  هم باید مجموع این دو جمله  $(-2) + (-6) = -8$  باشد. در نتیجه داریم:

$$(2x - 2)(2x - 6) = (2x)^2 - 8 \times (2x) + 12 = 4x^2 - 16x + 12$$

**نکته** گاهی با اتحادهایی روبه‌رو می‌شویم که کمی شبیه اتحاد جمله مشترک هستند ولی نه کاملاً. این اتحادها را می‌توانیم با تغییراتی به اتحاد

جمله مشترک تبدیل کنیم:

$$(x+a)(cx+b) = cx^2 + (ac+b)x + ab \Rightarrow \underbrace{(cx+ac)}_{\text{جمله مشترک}} \underbrace{(cx+b)}_{\text{جمله غیرمشترک}} = \underbrace{c^2x^2}_{\text{مربع جمله مشترک}} + \underbrace{(ac+b)(cx)}_{\text{جمله مشترک}} + abc$$

در واقع دو طرف تساوی را در عددی ضرب می‌کنیم که جملات مشترک در دو پرانتز سمت چپ ایجاد می‌شود و ضرب جمله مربع کامل  $(x^2)$  در سمت راست هم مربع کامل شود.

این نکته را در حد مطالعه در ذهن خود داشته باشید تا در قسمت تجزیه علت بیان آن را ببینید.

**مثال** با توجه به اتحاد  $(ax - 3)(x - b) = 2x^2 + cx - 15$ ، حاصل  $a + b - c$  را به دست آورید.

**پاسخ: روش اول:** چون عبارت داده شده یک اتحاد است، با قرار دادن مقادیر مختلف به جای  $x$  می‌توانیم مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow (0 - 3)(0 - b) = 2(0)^2 + c(0) - 15 \Rightarrow 3b = -15 \Rightarrow b = -5$$

$$x = 1 \Rightarrow (a - 3)(1 + 5) = 2(1)^2 + c(1) - 15 \Rightarrow 6a - 18 = c - 13 \quad (*)$$

$$x = -1 \Rightarrow (-a - 3)(-1 + 5) = 2(-1)^2 + c(-1) - 15 \Rightarrow -4a - 12 = -c - 13 \quad (**)$$

حال با جمع طرفین تساوی روابط  $(*)$  و  $(**)$  داریم:

$$2a - 30 = -26 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2, \quad (*) \Rightarrow 6a - 18 = c - 13 \xrightarrow{a=2} 12 - 18 = c - 13 \Rightarrow -6 = c - 13 \Rightarrow c = 7$$

**روش دوم:** تک تک جملات پرانتزهای سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(ax - 3)(x - b) = 2x^2 + cx - 15 \Rightarrow ax^2 - abx - 3x + 3b = 2x^2 + cx - 15$$

$$\Rightarrow \underbrace{ax^2 + (-ab - 3)x + 3b}_{=} = \underbrace{2x^2 + cx - 15}_{=} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 = 2x^2 \Rightarrow a = 2 \\ -ab - 3 = c \Rightarrow -2(-5) - 3 = c \Rightarrow 10 - 3 = c \Rightarrow c = 7 \\ 3b = -15 \Rightarrow b = -\frac{15}{3} = -5 \end{cases}$$

**روش سوم:** با استفاده از نکته قبل، اتحاد داده شده را به جمله مشترک، تبدیل می‌کنیم:

$$(ax - 3)(x - b) = 2x^2 + cx - 15 \xrightarrow{\times a} \underbrace{(ax - 3)(ax - ab)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 2ax^2 + acx - 15a$$

$$\Rightarrow \underbrace{(ax)^2 + (-3 - ab)(ax) + (-3)(-ab)}_{=} = \underbrace{2ax^2 + acx - 15a}_{=}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 = 2ax^2 \Rightarrow a = 2 \\ -3a - a^2b = ac \Rightarrow -3 - ab = c \xrightarrow{a=2} -3 - 2b = c \\ 3ab = -15a \Rightarrow 3b = -15 \Rightarrow b = -5 \end{cases} \Rightarrow -3 + 10 = c \Rightarrow c = 7$$

$$a + b - c = 2 - 5 - 7 = -10$$

بنابراین داریم:

همان‌طور که در حل این مثال دیدید، نکته قبل، برای حل این تیپ اتحادها کاربرد چندانی ندارد و شاید بهتر هم باشد که از این نکته در حل این سوالات استفاده نکنیم ولی بیان آن در این جا جهت آمادگی برای سوالات تجزیه‌ای است که در آن‌ها عباراتی شبیه این‌ها را داریم، پس فعلاً فقط نکته را در ذهن خود داشته باشید تا به قسمت اصلی مطلب برسیم، در آن جا خوب برایتان جا خواهد افتاد.

۱۸- در صورتی که تساوی  $(t - a)(t + \sqrt{8}) = t^2 + bt - 4$  یک اتحاد باشد،  $a - b$  کدام است؟

۴) صفر (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $-\sqrt{2}$  (۴) صفر

۱۹- حاصل  $(x + 1)^2 - (x - 2)(x + 4)$  کدام است؟

۴) ۹ (۱) ۷ (۲) -۷ (۳) -۹ (۴) ۹

۲۰- ضریب  $x^2$  در حاصل عبارت  $(x + 3)(x^2 - 2)(3 - x)$  کدام است؟

۴) ۱۱ (۱) ۱ (۲) -۱۱ (۳) -۱ (۴) -۱

۲۱- برای محاسبه حاصل کدام یک از عبارتهای زیر، از اتحاد مزدوج استفاده نمی‌شود؟

۴)  $(-x + 2)(2 - x)$  (۱)  $(-y + a)(y + a)$  (۲)  $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$  (۳)  $(x^2 - 2)(x^2 + \sqrt{4})$

۲۲- اگر  $(a - b)(t - c) = t^2 - 4t + 3$ ، آن‌گاه  $abc$  برابر کدام است؟

۴) ۴ (۱) ۴ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) ۳

۲۳- حاصل عبارت  $(x + a)(x + b) - (x - a)(x - b)$  برابر کدام است؟

۴)  $2(a + b)x$  (۱)  $(a + b)x$  (۲) صفر (۳)  $a + b$

۲۴- حاصل عبارت  $(x - \sqrt{5})(-2 - x) + (1 - \sqrt{5})^2$  دارای چند جمله با توان‌های مختلف  $x$  است؟

۴) ۴ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۳

۲۵- حاصل عبارت  $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$  کدام است؟

(۱)  $x^4 + y^4$  (۲)  $x^4 - x^2y^2 + y^4$  (۳)  $(x^2 - y^2)^2$  (۴)  $x^4 + x^2y^2 + y^4$

۲۶- برای محاسبه حاصل عبارت  $((a-2)(a+2))^2$  از کدام اتحادها استفاده می‌شود؟

(۱) مزدوج - جمله مشترک (۲) مربع دو جمله‌ای - مزدوج (۳) مربع دو جمله‌ای - جمله مشترک (۴) مربع دو جمله‌ای

۲۷- طول یک مستطیل، ۳ سانتی‌متر بیشتر از عرض آن است. اگر طول آن را ۴ واحد افزایش و عرض آن را ۴ واحد کاهش دهیم، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

(۱) ۲۸ واحد کاهش می‌یابد. (۲) ۱۱ واحد کاهش می‌یابد. (۳) ۱۱ واحد افزایش می‌یابد. (۴) ۲۸ واحد افزایش می‌یابد.

۲۸- حاصل عبارت  $\frac{(x-3+y)(x+3+y)}{x^2+y^2+2xy-9}$  به‌ازای  $x=100$  و  $y=1000$  کدام است؟

(۱) ۱۱۰۰ (۲)  $10^5$  (۳) ۱ (۴)  $10010$

۲۹- حاصل  $(a^6 + b^6)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{a^8 - b^8}{a + b}$  (۲)  $\frac{a^6 - b^6}{a - b}$  (۳)  $a^8 - b^8$  (۴)  $\frac{a^6 - b^6}{a + b}$

آزمون‌های سراسری گاج

۳۰- حاصل  $(1 + \frac{1}{256})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2}) - 2$  کدام است؟

(۱)  $2^{-15}$  (۲)  $2^{15}$  (۳)  $2^{17}$  (۴)  $2^{-17}$

آزمون‌های سراسری گاج

۳۱- حاصل عبارت  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{20} (5 - 2\sqrt{6})^{10}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $7^{20}$  (۳)  $7^{10}$  (۴) ۱۰

درسنامه ۳

اتحاد مکعب دو جمله‌ای

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای

<p>جمله دوم × مربع جمله اول × ۳ + مکعب جمله اول = مکعب مجموع دو جمله</p> <p>مکعب جمله دوم + مربع جمله دوم × جمله اول × ۳ +</p>	اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای
<p>جمله دوم × مربع جمله اول × ۳ - مکعب جمله اول = مکعب تفاضل دو جمله</p> <p>مکعب جمله دوم - مربع جمله دوم × جمله اول × ۳ +</p>	اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای

همیشه یادم باشه

در این اتحاد یک پرانتز با توان ۳ داریم که ۲ تا جمله داخل آن است و حاصل این پرانتز، ۴ تا جمله می‌باشد، ۲ تا جمله مکعب کامل و ۲ تا جمله مضرب ۳. فقط اگر جمله دوم، منفی باشد، یکی از مکعبها منفی و یکی از جملات مضرب ۳ هم علامتش منفی است.

مثال با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای، جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

(الف)  $(2a - \dots)^3 = \dots - \dots + 54ab^2 - \dots$  (ب)  $(\dots + \dots)^3 = \frac{1}{27}a^3 + \dots + \dots + 64$

پاسخ: الف) سمت راست تساوی ۴ تا جمله داریم و سمت چپ، یک پرانتز با توان ۳ و علامت منفی، پس واضح است که با اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای سروکار داریم. یکی از جمله‌ها ۲a است، اما جمله دیگر چی؟ باید از جمله  $54ab^2$  در سمت راست کمک بگیریم. اولاً که جمله مضرب ۳ است، پس داریم  $3 \times 18ab^2$  و با توجه به جمله اول ۲a نتیجه می‌شود: یعنی مربع جمله دوم  $9b^2$  است و در نتیجه خود جمله دوم  $3b$  (و در واقع  $-3b$ ) می‌شود و داریم:

$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 54ab^2 - (3b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

**نکته** قانم اجازه! از کجا فهمیدین  $54ab^2$  اون جمله‌ای بوده که مربع جمله دوم، تو ۳ ضرب شده نه مربع جمله اول؟

**پاسخ:** به دو تا دلیل واضح. اول این که جمله دوم، علامت منفی داره که وقتی مربع اون رو به دست میاریم، علامتش مثبت میشه، پس علامت منفی مال اون جمله‌ایه که خودش تو بقیه عبارت‌ها ضرب شده نه مربعش. دوم این که  $54ab^2$  اصلاً نمی‌تونه «جمله دوم»  $\times$  مربع جمله اول  $\times$  باشه! والا چرا؟ فوب ببین:

$$3 \times 4a^2 \times b^2 = 54ab^2 \quad \text{جمله دوم} \times (a^2) = 12ab^2 \times 3 = 36ab^2$$

به خاطر  $a$  در سمت راست و  $a^2$  در سمت چپ، هیچ‌گاه امکان نداره که این تساوی اتفاق بیفته.

(ب) باز هم اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم، اما این بار مجموع دوجمله است. طبق سمت راست تساوی، مکعب‌های دو جمله سمت چپ،  $\frac{1}{27}a^3$  و  $64$  هستند، پس خود جمله‌ها  $\frac{1}{3}a$  و  $4$  می‌باشند. در نتیجه داریم:

$$\left(\frac{1}{3}a + 4\right)^3 = \frac{1}{27}a^3 + 3\left(\frac{1}{3}a\right)^2(4) + 3\left(\frac{1}{3}a\right)(4)^2 + 64 = \frac{1}{27}a^3 + \frac{4}{3}a^2 + 16a + 64$$

**نکته** اتحادهای مهم زیر از اتحاد مکعب دوجمله‌ای نتیجه می‌شود:

۱)  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

۲)  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

وقتی مجموع و حاصل ضرب دو جمله را داشته باشیم و مجموع مکعبات آن‌ها را بخواهیم به دست آوریم از اتحاد شماره ۱ و وقتی تفاضل و حاصل ضرب دو جمله را داشته باشیم و تفاضل مکعبات آن‌ها را بخواهیم، از اتحاد شماره ۲ استفاده می‌کنیم.

**مثال** اگر  $x + y = 3$  و  $xy = -2$ ، مجموع مکعبات  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

**پاسخ:** با استفاده از اتحاد شماره ۱ داریم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3(-2)(3) = 27 + 18 = 45$$

### اتحاد مجموع یا تفاضل مکعب دوجمله‌ای

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای
(مربع جمله دوم + حاصل ضرب دو جمله - مربع جمله اول) (جمله دوم + جمله اول) = مکعب جمله دوم + مکعب جمله اول	اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای
(مربع جمله دوم + حاصل ضرب دو جمله + مربع جمله اول) (جمله دوم - جمله اول) = مکعب جمله دوم - مکعب جمله اول	اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای

#### همیشه یادم باشه

در این اتحاد یک طرف دو تا جمله مکعب کامل داریم و طرف دیگر ۲ تا پرانتز که یکی از پرانتزها ۲ تا جمله و یکی دیگر ۳ تا جمله دارد. علامت بین دو جمله در پرانتز دوجمله‌ای با علامت بین دو جمله مکعب کامل مثل هم است. در پرانتز ۳ جمله‌ای، ۲ تا جمله مربع کامل داریم و یک جمله که علامتش مخالف علامت بین دو جمله مکعب کامل می‌باشد.

**مثال** با استفاده از اتحاد مجموع یا تفاضل مکعب دوجمله‌ای، جاهای خالی را پر کنید.

(الف)  $\dots + \dots = (\dots + \dots)(\dots + \dots + \dots) + \dots$       (ب)  $\dots - \frac{1}{8} = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$

**پاسخ:** الف) از وجنات اتحاد، مشخص است که اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای را داریم. از پرانتز اول سمت چپ معلوم است که جمله اول  $2y$  می‌باشد و از پرانتز دوم سمت چپ، نتیجه می‌شود که مربع جمله دوم  $25$  است (حُب واضحه چرا! چون اولاً  $25$  مربع  $5$  نیست. ثانیاً ضرب دو جمله پرانتز اول هم نیست، چون  $2y$  در آن ندارد). بنابراین جمله دوم  $5$  می‌باشد و داریم:

$$(2y + 5)(4y^2 - 10y + 25) = (2y)^3 + 5^3 = 8y^3 + 125$$

(ب) این بار اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای را داریم که از سمت راست و چپ تساوی، می‌توان نتیجه گرفت که جمله اول  $t$  و مکعب جمله دوم  $\frac{1}{8}$  است، در نتیجه داریم:

$$t^3 - \frac{1}{8} = \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

**نکته** به این اتحاد، اتحاد چاق و لاغر! هم می‌گویند. چون یک پرانتز چاق و یک پرانتز لاغر داریم. در واقع علامت پرانتز لاغر با علامت بین دو

جمله مکعب کامل، یکی است و در پرانتز چاق، علامت جمله‌ای که مربع کامل نیست، مخالف علامت بین دو جمله مکعب کامل می‌باشد.

۳۲- در حاصل عبارت  $(\sqrt{3} - x)^3$ ، ضریب جمله  $x^2$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲)  $3\sqrt{3}$  (۳) -۹ (۴)  $-3\sqrt{3}$

آزمونهای سراسری گاج

۳۳- ساده شده عبارت  $(x+3)^3 - 3x(3x+9)$  کدام است؟

- (۱)  $x^3 - 27$  (۲)  $x^3 - 3x^2$  (۳)  $x^3 - 9x^2$  (۴)  $x^3 + 27$

۳۴- ضریب  $x^2y^2$  در حاصل عبارت  $(-2xy^2 + 3x)^3$  کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۵۴ (۳) -۳۶ (۴) -۵۴

۳۵- کدام یک از عبارتهای زیر، اتحاد مجموع یا تفاضل مکعب دوجمله‌ای است؟

- (۱)  $(3x-y)(9x^2+9x+y^2)$  (۲)  $(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)$  (۳)  $(2x+y)(4x^2-4xy+y^2)$  (۴)  $(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$

۳۶- حاصل عبارت  $8y^3 - (x^2 - 2xy + 4y^2)(x + 2y)$  به ازای  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  و  $y = \sqrt{2}$  کدام است؟

- (۱)  $2/625$  (۲)  $2/175$  (۳)  $3/125$  (۴)  $3/375$

آزمونهای سراسری گاج

۳۷- حاصل عبارت  $(x^2 - x + 1)(x^6 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)$  به ازای  $x = \sqrt[3]{2}$  کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۳۸- اگر  $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}$ ، آن‌گاه حاصل  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  کدام است؟

- (۱)  $34\sqrt{5}$  (۲)  $24\sqrt{5}$  (۳)  $32\sqrt{5}$  (۴)  $46\sqrt{5}$


۳۹- اگر تفاضل مکعبات دو عدد برابر ۳۵ و تفاضل آن‌ها برابر ۵ باشد، حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) -۹ (۴) -۶

آزمونهای سراسری گاج

۴۰- اگر مجموع دو عدد برابر ۶ و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $2\sqrt{2} - 6$  باشد، مجموع مکعبات آن دو کدام است؟

- (۱)  $36(3 - \sqrt{2})$  (۲)  $6(3 - \sqrt{2})$  (۳)  $6(3 + \sqrt{2})$  (۴)  $36(3 + \sqrt{2})$

۴۱- اگر  $x + y = 8$  و  $x^3 + y^3 = 392$ ، حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟ 

- (۱) ۵۴ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴) ۵۸

۴۲- اگر مجموع مجذورات دو عدد برابر ۲ و حاصل ضرب آن‌ها برابر  $-\frac{1}{4}$  باشد، مجموع مکعبات آن‌ها کدام است؟ 

- (۱)  $\pm \frac{3}{2}$  (۲)  $\pm \frac{1}{2}$  (۳)  $\pm 1$  (۴)  $\pm \frac{5}{2}$

۴۳- اگر  $a^2 + b^2 = 5$  و  $a + b = -1$ ، آن‌گاه حاصل  $a^3 + b^3$  کدام است؟ 

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۷ (۴) -۱

## درسامت ۴

### تجزیه

یکی از کاربردهای مهم اتحادها تجزیه است. حال تجزیه چیست و چه طوری انجام می‌شود؟ ببینید!

**تجزیه:** بعضی از عبارتهای جبری را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر (که توان متغیر آن‌ها کوچک‌تر از عبارت اولیه است) نوشت. به هر یک از این عبارتهای جبری کوچک‌تر، یک **عامل** یا **فاکتور** عبارت جبری اولیه می‌گوییم. توجه کنید که اگر این عبارتهای جبری کوچک‌تر، باز هم قابل تجزیه شدن بودند، تا جایی که امکان داشته باشد آن‌ها را تجزیه می‌کنیم. تجزیه به روش‌های مختلفی امکان‌پذیر است که مهم‌ترین و کاربردی‌ترین آن‌ها را در این درسنامه و درسنامه بعدی خواهید دید. اولین روش عبارت است از:

#### 1 تجزیه با دسته‌بندی و فاکتورگیری:

گاهی در یک عبارت جبری، جمله یا جمله‌هایی وجود دارند که در همه آن‌ها عامل مشترکی (غیر از ۱) به تنهایی یا به صورت ضرب در عامل دیگری تکرار شده است. می‌توانیم این عامل مشترک را از همه آن‌ها برداریم و به قولی فاکتور بگیریم و سپس در عامل دیگری که شامل تمام جملات غیرمشترک سایر جمله‌ها است (که با هم جمع یا تفریق شده‌اند)، ضرب کنیم. گاهی برای این کار لازم است که در ابتدا جملات را به صورت مناسبی دسته‌بندی کنیم (یعنی جمله‌هایی که عامل مشترک دارند، کنار هم بنویسیم) و بعد عمل تجزیه را انجام دهیم. البته این دسته‌بندی هم کار بسیار مهمی است. اگر در انجام آن خطا کنیم، تجزیه را هم نمی‌توانیم انجام دهیم و دچار اشتباه می‌شویم.



همیشه یادم باشه

برای تجزیه اول خوب به جملات نگاه کنیم و آن جمله‌هایی که عامل مشترک دارند، کنار هم بنویسیم. بعد از عامل مشترکشان فاکتور بگیریم و در بقیه جملات غیرمشترک با دقت در علامتشان، ضرب کنیم. دوباره اگر عامل مشترک ایجاد شد، همان کار را تکرار کنیم.

**فانم اجازه!** ما یک کم سرگیجه گرفتیم. چی گفتین شما!!!

**پاسخ:** بگم برا پی؟ واسه این که هواسه این یا نبور. حالا کجا بور فرا می‌دونه! آکه خوب و با دقت گوش می‌کرری کاملاً متوجه می‌شدی که من چی گفتم. حالا لااقل به مثال بعری فوب دقت کن، اون وقت هم توضیحات من برات روشن می‌شه، هم از سرگیجه درمیایی!

**مثال** عبارتهای زیر را به روش دسته‌بندی و فاکتورگیری تجزیه کنید.

الف)  $۱۲a^2b(۳+۲b)^۳ - ۲۸ab^2(۳+۲b)^۵$  (ب)  $x^3y + x^2y^2 - x - y$  (ج)  $۳a^2 - ۲b - ۶ab + a$

**پاسخ:** الف) دو جمله داریم که عامل‌های مشترک آن‌ها را به وضوح می‌توانیم ببینیم. بین ۱۲ و ۲۸، عامل ۴ مشترک است، بین  $a^2b$  و  $ab^2$  عامل  $ab$  مشترک می‌باشد و در نهایت بین  $(۳+۲b)^۳$  و  $(۳+۲b)^۵$ ، عامل  $(۳+۲b)^۳$  مشترک است. حال از این عامل‌های مشترک فاکتور می‌گیریم و در پرانتز بعدی، عامل‌های غیر مشترک (باقی‌مانده از هر جمله) را با توجه به علامت آن‌ها می‌نویسیم:

$$۱۲a^2b(۳+۲b)^۳ - ۲۸ab^2(۳+۲b)^۵ = ۴ab(۳+۲b)^۳(۳a - ۷b(۳+۲b)^۲)$$

ب) اول ببینیم چه عامل مشترکی می‌توانیم در جمله‌ها پیدا کنیم. در هر دو جمله اول، عامل  $x^2y$  وجود دارد، پس بهتر است از آن فاکتور بگیریم:

$$x^3y + x^2y^2 - x - y = x^2y(x+y) - x - y$$

حالا در صورتی که خوب به جملات نگاه کنیم، می‌بینیم که اگر از منفی در دو جمله آخر فاکتور بگیریم، باز عامل مشترک  $(x+y)$  ایجاد می‌شود و دوباره می‌توانیم فاکتور بگیریم:

$$\text{حاصل} = x^2y(x+y) - (x+y) = (x+y)(x^2y - 1)$$

دیگر چیزی برای تجزیه نداریم، پس کار تجزیه تمام است. توجه کنید که در واقع ابتدا دو جمله اول را یک دسته و دو جمله آخر را در یک دسته قرار دادیم و بعد هر دسته را تجزیه کردیم.

ج) در دو جمله اول، عامل مشترکی وجود ندارد، اما مثلاً بین جمله‌های اول و سوم یا اول و چهارم، عامل  $a$  مشترک است. حالا کدام دو جمله را با هم در یک دسته قرار دهیم؟

**فانم اجازه!** ما بگیم!

**پاسخ:** بفرمایید. ببینم درس رو بالا فره فهمیدی یا نه؟

فانم، ما هر دو تا رو امتحان کردیم. یک بار جمله‌های اول و سوم رو تو یک دسته گذاشتیم و از  $۳a$  فاکتور گرفتیم، یک بار جمله‌های اول و چهارم رو تو یک دسته و از  $a$  فاکتور گرفتیم. با هر دو تا ش تونستیم تجزیه رو انجام بدیم و جواب هم یکی شد.

**پاسخ:** آخرین بچه زرنگ. فکر کنم دیگه مفهوم تجزیه و دسته‌بندی رو خوب فهمیدی. حالا ببینیم:

روش اول:

$$۳a^2 - ۲b - ۶ab + a \stackrel{\text{دسته‌بندی}}{=} \underbrace{(۳a^2 - ۶ab)}_{۳a \text{ فاکتور از}} + (-۲b + a) = ۳a(a - ۲b) + (a - ۲b) \stackrel{\text{فاکتور از}}{(a - ۲b)} = (a - ۲b)(۳a + ۱)$$

روش دوم:

$$۳a^2 - ۲b - ۶ab + a \stackrel{\text{دسته‌بندی}}{=} \underbrace{(۳a^2 + a)}_{a \text{ فاکتور از}} + \underbrace{(-۲b - ۶ab)}_{-۲b \text{ فاکتور از}} = a(۳a + ۱) - ۲b(۱ + ۳a) \stackrel{\text{فاکتور از}}{(۳a + ۱)} = (۳a + ۱)(a - ۲b)$$

۴۴- حاصل  $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$  کدام است؟

(۱)  $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$  (۲)  $(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$  (۳)  $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$  (۴)  $(a^2 + x^2)(b^2 - y^2)$

۴۵- در تجزیه عبارت  $x^4 + ۳x^2 - ۶x - ۲x^3$  کدام عامل وجود ندارد؟

(۱)  $x^2 + ۳$  (۲)  $x - ۲$  (۳)  $x$  (۴)  $x + ۳$

انسانی داخل ۹۳

۴۶- در تجزیه عبارت  $x^4 - ۳x^3 + ۸x - ۲۴$  کدام عامل ضرب وجود دارد؟

(۱)  $x - ۴$  (۲)  $x - ۲$  (۳)  $x + ۲$  (۴)  $x + ۳$

آزمون‌های سراسری کاج

۴۷- در تجزیه عبارت  $x^3 - \sqrt{۳}x - ۳\sqrt{۳} + ۳$  کدام عامل وجود دارد؟

(۱)  $x$  (۲)  $x + \sqrt{۳}$  (۳)  $x - \sqrt{۳}$  (۴)  $x - ۳$

## تجزیه با اتحادها

یکی دیگر از روش‌های مهم و بسیار کاربردی تجزیه، استفاده از اتحادها است:

## ۲ تجزیه با اتحادها:

تجزیه با استفاده از اتحادهایی که یاد گرفتید را مورد به مورد بیان می‌کنیم:

شکل کلی اتحاد	شکل عبارت برای تجزیه با اتحاد	نام اتحاد
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	۳ تا جمله: ۲ تا مربع کامل و یکی مضرب ۲ با علامت مثبت	اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	۳ تا جمله: ۲ تا مربع کامل و یکی مضرب ۲ با علامت منفی	اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	۲ تا جمله: ۲ تا مربع کامل با علامت منفی بین آنها	اتحاد مزدوج
$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$	۳ تا جمله: یکی مربع کامل، یکی یک عدد یا عبارت ضرب در جذر مربع کامل و یک جمله دیگر	اتحاد جمله مشترک
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$	۴ تا جمله: ۲ تا مکعب کامل و ۳ تا مضرب ۳ با علامت مثبت	اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	۴ تا جمله: ۲ تا مکعب کامل که یکی علامت منفی دارد و ۲ تا مضرب ۳ که یکی علامتش منفی است.	اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	۲ تا جمله: ۲ تا مکعب کامل با علامت مثبت	اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	۲ تا جمله: ۲ تا مکعب کامل با علامت منفی بین آنها	اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)

## همیشه یادم باشه

- وقتی ۲ تا جمله داریم، اگر هر دو مربع کامل بود، از اتحاد مزدوج و اگر هر دو مکعب کامل بود، از اتحاد مجموع مکعب یا تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر) برای تجزیه استفاده می‌کنیم.
- وقتی ۳ تا جمله داریم، اگر ۲ تا از آنها مربع کامل بود، احتمال زیاد باید از اتحاد مربع دوجمله‌ای (در صورت داشتن شرط «جذر دومی  $\times$  جذر اولی  $\times$  ۲» برای جمله سوم) و در غیر این صورت، در صورت تجزیه پذیر بودن عبارت، باید از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم.
- وقتی ۴ تا جمله داریم، اگر ۲ تا مکعب کامل و ۲ تا مضرب ۳ بین آنها بود، به احتمال خیلی زیاد باید از اتحاد مکعب مجموع یا تفاضل دوجمله‌ای استفاده کنیم.
- وقتی جملات یک عبارت هیچ کدام از شرط‌های ۱، ۲ و ۳ را نداشت و یا تعداد جملات بیشتر از ۴ تا بود، با دسته‌بندی مناسب، در صورت امکان یکی از اتحادها را در آن پیدا می‌کنیم یا از فاکتورگیری برای تجزیه کمک می‌گیریم.

**فانم اجازه!** به جورایی تجزیه برعکس اتحادهاست که یاد گرفتیم. اون موقع از این ور می‌رفتیم به اون ور تساوی، حالا برعکسش رو می‌ریم. ما که خوب یاد گرفتیم، مخصوصاً با این دسته‌بندی که شما کردید دیگه هیچ وقت قاطی نمی‌کنیم.

**پاسخ:** آخرین کلمه! پرا یه پورایی برعکسه؟ خوب واقعاً برعکسه دیگه. دقیقاً درست گفتی، آگه اتحادها رو خوب یاد گرفته باشی، تجزیه هم همونه با یه عمل برعکس. پس دیگه قطعاً مشکلی نفواهی داشت.

**مثال** با استفاده از اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف)  $x^2 - x - y^2 + y$       ب)  $a^3 + 2a^2b + ab^2$       ج)  $x^2 - x - 20$       د)  $y^4 - 8x^3y + 12y^2x^2 - 6y^3x$

**پاسخ:** الف) ۴ تا جمله داریم ولی مکعب کامل بین آنها نیست که اتحاد مکعب باشد. اما ۲ جمله مربع کامل داریم. پس ممکن است به شکل اتحاد مربع دوجمله‌ای یا اتحاد مزدوج باشد. اولاً چون جمله مضرب ۲ نداریم و ثانیاً علامت یکی از جملات مربع کامل، منفی است، پس قطعاً اتحاد مزدوج است که با یک دسته‌بندی مناسب جملات، به هدفمان می‌رسیم:

$$x^2 - x - y^2 + y \stackrel{\text{دسته‌بندی}}{=} (x^2 - y^2) + (y - x) = (x - y)(x + y) + (y - x)$$

اتحاد مزدوج

حال اگر کمی دقت کنیم، خواهیم دید که اگر در جمله دوم از یک منفی فاکتور بگیریم، عامل مشترک  $(x - y)$  ایجاد می‌شود، پس:

$$\text{حاصل} = (x - y)(x + y) - (x - y) = (x - y)(x + y - 1)$$

ب) ۳ تا جمله داریم ولی نه شکل اتحاد مربع دوجمله‌ای و نه شکل اتحاد جمله مشترک است. اما در ۳ جمله عبارت، عامل  $a$  مشترک می‌باشد، پس بهتر است در ابتدا از  $a$  فاکتور بگیریم، ببینیم چه می‌شود!

$$a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2)$$

حالا اگر داخل پرانتز را خوب نگاه کنیم، می‌بینیم که اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای را داریم، پس:

$$\text{حاصل} = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a+b)^2$$

ج) ۳ تا جمله داریم که فقط یکی از آن‌ها مربع کامل است. پس احتمال ۹۰ درصد باید از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم. همان‌طور که به یاد داریم، در اتحاد جمله مشترک، ضریب  $x$ ، برابر مجموع دو جمله غیرمشترک بود و جمله دیگر، حاصل ضرب جملات غیرمشترک. بنابراین باید دو عددی را پیدا کنیم که مجموع آن‌ها  $(-1)$  و حاصل ضربشان  $(-20)$  باشد. اعداد ۴ و  $-5$  این شرط را دارند. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$$

د) ۴ تا جمله داریم ولی هیچ مکعب کاملی بین جملات وجود ندارد. اما در ۴ جمله، عامل  $y$  مشترک است، پس ابتدا از آن فاکتور می‌گیریم:

$$y^4 - 8x^3y + 12y^2x^2 - 6y^3x = y(y^3 - 8x^3 + 12yx^2 - 6y^2x)$$

حالا داخل پرانتز ۴ تا جمله داریم که ۲ تا از آن‌ها مکعب کامل با علامت منفی بین آن‌ها است و ۲ تا مضرب ۳ با علامت منفی برای یکی از آن‌ها وجود دارد. پس واضح است که اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای می‌باشد:

$$\text{حاصل} = y(y-2x)^3$$

**نتیجه** هر وقت عبارتی بین تمام جملات مشترک بود، ابتدا از آن فاکتور می‌گیریم، بعد سراغ پیدا کردن اتحادها و یا عامل مشترک در بین دو یا چند جمله می‌رویم.

**تذکره** همان‌طور که به یاد دارید در قسمت اتحاد جمله مشترک گفتیم، گاهی با اتحادهایی روبه‌رو هستیم که شبیه اتحاد جمله مشترک هستند و البته کاربرد اصلی آن‌ها در قسمت تجزیه مشخص می‌شود. حال چه وقت در تجزیه هم همین موضوع را داریم؟ در واقع وقتی در عبارت داده‌شده، ضریب  $x^2$ ، مربع کامل نیست، این اتفاق می‌افتد. در این حالت عبارت داده‌شده را  $A$  فرض می‌کنیم (به همین دلیل معمولاً به این روش، **تجزیه به روش A** گفته می‌شود). سپس طرفین تساوی را در ضریب  $x^2$  ضرب می‌کنیم. با این عمل، یک ۳ جمله‌ای ایجاد می‌شود که شرایط اتحاد جمله مشترک را دارد و قابل تجزیه شدن به این روش می‌باشد. پس از تجزیه، دوباره طرفین تساوی را بر عدد ضرب شده (ضریب  $x^2$  اولیه) تقسیم می‌کنیم.

**مثال** عبارت  $3x^2 - 5x + 2$  را تجزیه کنید.

**پاسخ:** این‌جا ۳ جمله داریم که فقط قسمتی از یک جمله آن  $(3x^2)$ ، مربع کامل است. پس احتمالاً با اتحاد جمله مشترک قابل تجزیه می‌باشد. اما ضریب  $x^2$  مربع کامل نیست، بنابراین از روش  $A$  برای تجزیه استفاده می‌کنیم:

$$A = 3x^2 - 5x + 2 \xrightarrow{\times 3} 3A = 9x^2 - 15x + 6$$

حالا سمت راست ۳ جمله با جمله مربع کامل  $9x^2$  را داریم. پس در صورت تجزیه شدن با اتحاد جمله مشترک، جمله مشترک  $3x$  است و بنابراین جمله وسط به شکل  $(-5)(3x) = -15x$  می‌باشد، یعنی مجموع دو جمله غیرمشترک  $(-5)$  است و حاصل ضرب آن‌ها هم ۶ می‌باشد. بنابراین دو عدد موردنظر  $(-2)$

و  $(-3)$  هستند و داریم:

$$3A = 9x^2 - 15x + 6 = (3x-2)(3x-3) \xrightarrow{\div 3} A = (3x-2)(x-1) \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$$

**توجه** دقت کنید که در جمله وسط، حتماً ابتدا جمله مشترک را جدا کنید تا در به‌دست آوردن مجموع دو جمله غیرمشترک اشتباه نکنید و در آخر هم، تقسیم بر ضریب  $x^2$  اولیه یادتان نرود.

۴۸- اگر  $A = x + \frac{1}{x}$ ، حاصل  $x(A-2)$  کدام است؟

(۱)  $(x+1)^2$  (۲)  $x^2 - 2x$  (۳)  $(x-1)^2$  (۴)  $x^2 + 2x$

۴۹- در تجزیه عبارت  $x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}x + x^2$  به صورت  $(x+a)(x - \frac{\sqrt{2}}{4})$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $-\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

انسانی خارج ۹۳

۵۰- در تجزیه عبارت  $4x^3 - 6x^2 + 2x$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

(۱)  $2x+1$  (۲)  $2x-1$  (۳)  $x+1$  (۴)  $x+2$

۵۱- در تجزیه عبارت  $2x^3 - x^2 - 8x + 4$  به صورت عوامل اول، کدام دوجمله‌ای وجود ندارد؟

(۱)  $x-2$  (۲)  $2x-1$  (۳)  $x+2$  (۴)  $2x+1$

آزمون‌های سراسری گاج

۵۲- در تجزیه عبارت  $x^4 + x^3 - y^3 - xy^3$  کدام عامل وجود ندارد؟

(۱)  $1+x$  (۲)  $x+y$  (۳)  $x^2+y^2+xy$  (۴)  $x-y$

۵۳- در تجزیه عبارت  $x^3 - x + x^2 - 1$  کدام عامل وجود دارد؟

(۱)  $x^2+1$  (۲)  $x+1$  (۳)  $(x-1)^2$  (۴)  $x^2$

- ۵۴- در تجزیه  $x^3 - 2x^2 - x - 2$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $x - 1$  (۲)  $x + 2$  (۳)  $x^2 + x + 1$  (۴)  $x^2 - x + 1$
- آزمونهای سراسری گاج
- ۵۵- در تجزیه  $x^3 - \sqrt{2}x^2 - 2x + 2\sqrt{2}$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $x - \sqrt{2}$  (۲)  $x^2 + 2$  (۳)  $x + \sqrt{2}$  (۴)  $x^2 - 2$
- انسانی خارج ۸۸
- ۵۶- در تجزیه عبارت  $a(a-2)(a-3) - 4a + 8$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $a - 1$  (۲)  $a - 2$  (۳)  $a + 1$  (۴)  $a - 4$
- انسانی خارج ۹۰
- ۵۷- در تجزیه عبارت  $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $x - 8$  (۲)  $x - 4$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $x + 4$
- آزمونهای سراسری گاج
- ۵۸- در تجزیه عبارت  $x^6 - 1$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $1 + x^2(x^2 + 1)$  (۲)  $x - 1$  (۳)  $x^2 - 1$  (۴)  $x^2 + 1$
- ۵۹- حاصل عبارت  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  بهازای  $x = 10002$  کدام است؟  
 (۱)  $10^{12}$  (۲)  $10^{64}$  (۳)  $10^6$  (۴)  $10^{32}$
- آزمونهای سراسری گاج
- ۶۰- در تجزیه عبارت  $a(a-3)(a-5) - 6a + 18$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $a + 1$  (۲)  $a + 2$  (۳)  $a - 6$  (۴)  $a - 3$
- انسانی داخل ۹۰
- ۶۱- در تجزیه عبارت  $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$  کدام عامل ضرب وجود ندارد؟  
 (۱)  $a - 6$  (۲)  $a - 3$  (۳)  $a - 2$  (۴)  $a + 2$
- ۶۲- اگر  $c - d = -7$  و  $c^2 - d^2 = 77$ ، مقدار  $(c + d)^2$  کدام است؟  
 (۱)  $64$  (۲)  $81$  (۳)  $121$  (۴)  $144$
- آزمونهای سراسری گاج
- ۶۳- اگر  $4x^2 - y^2 = -240$  و  $2x + y = 8$  باشد، حاصل  $(2x - y)^3$  کدام است؟  
 (۱)  $81000$  (۲)  $27000$  (۳)  $-27000$  (۴)  $-81000$
- انسانی خارج ۸۹
- ۶۴- اگر  $a + 2b = 3$ ، حاصل  $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$  کدام است؟  
 (۱)  $15$  (۲)  $16$  (۳)  $17$  (۴)  $18$
- ۶۵- اگر  $91 = a^2 - b^2$  و  $2a + b = 7$ ، مقدار  $a + b$  کدام است؟  
 (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $5$
- ۶۶- در تجزیه عبارت  $x^{19} - 256x^3$  کدام عامل وجود ندارد؟  
 (۱)  $x^4 + 4$  (۲)  $x + \sqrt{2}$  (۳)  $x^8 + 16$  (۴)  $x - 2$
- ۶۷- حاصل عبارت  $(4x^2y^4 - a^2)(4x^2y^4 + a^2) + 16x^4y^8 + 8a^2x^2y^4 + a^4$  بهازای  $x = \frac{1}{y}$ ،  $y = -2$  و  $a = 3$  برابر  $A^2$  می‌باشد.  $A$  مضرب کدام است؟  
 (۱)  $15$  (۲)  $49$  (۳)  $12$  (۴)  $25$
- ۶۸- اگر  $a^3 - b^3 = a - b$  و  $a \neq b$  باشد،  $(a - b)^2$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $1 - 3ab$  (۲)  $1 + ab$  (۳)  $1 + 3ab$  (۴)  $1 - ab$

درسامت ۶

محاسبات عددی با اتحادها و مثلث خیام

یکی از کاربردهای دیگر اتحادها محاسبات عددی است. بعضی از محاسبات عددی که ظاهری پیچیده و دشوار دارند، با استفاده از اتحادها به راحتی قابل انجام می‌شوند. ببینید:

مثال حاصل اعداد زیر را به دست آورید.

الف)  $10001^2$  پاسخ: الف)

ب)  $998 \times 1002$  ب)  $999996$

اتحاد مربع دو جمله‌ای  $10001^2 = (10000 + 1)^2 = 10000^2 + 2 \times 10000 \times 1 + 1^2 = 100000000 + 20000 + 1 = 100020001$

اتحاد مزدوج  $998 \times 1002 = (1000 - 2)(1000 + 2) = 1000^2 - 2^2 = 1000000 - 4 = 999996$

همیشه یادم باشه

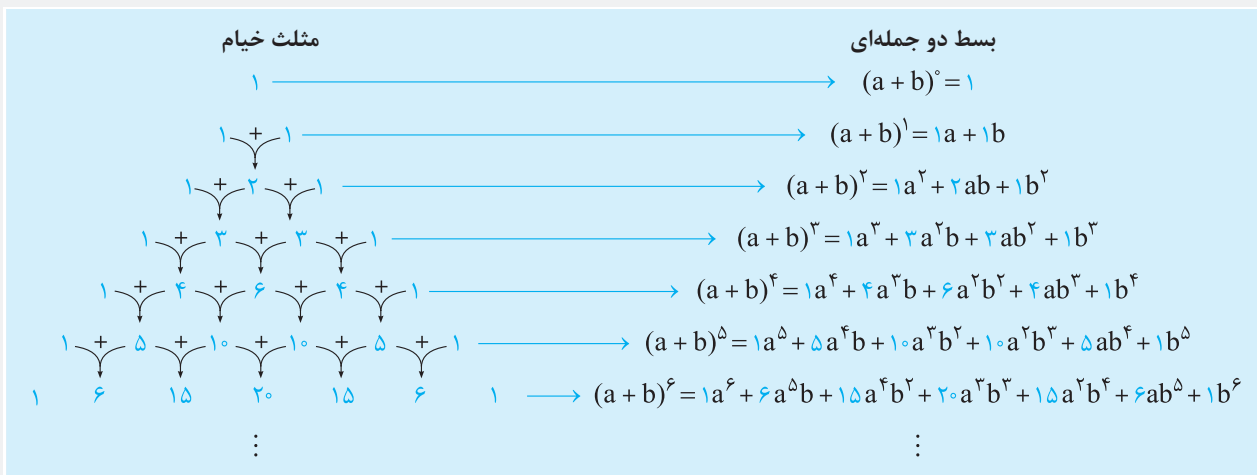
وقتی در محاسبات عددی، توان دوم عدد را می‌خواهیم به‌دست بیاوریم، از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک می‌گیریم. اگر حاصل ضرب دو عدد را داشتیم، اتحاد مزدوج یا جمله مشترک را باید به‌کار ببریم، در صورتی‌که فاصله دو عدد تا عددی مساوی بود (مثل  $99 \times 101$  که تا عدد ۱۰۰ به فاصله مساوی ۱ قرار دارند)، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم و در غیر این صورت (مثل  $98 \times 101$ ) اتحاد جمله مشترک را به‌کار می‌بریم.

**فانم اجازه!** یک کم سخته! از کجا بفهمیم از کدام اتحاد باید استفاده کنیم؟

**پاسخ:** این بار در مورد سفتی، درست‌گفتی. یک کم سفت هست ولی وقتی اتحادها رو خوب یاد گرفته باشی و تمرین هم زیاده‌اش کرده باشی، برات راحت می‌شه. تو این تیپ سؤالات باید به اعداد دازه شده دقت کنی و ببینی با چه تغییری تو اون‌ها می‌تونی یک اتحاد ایجاد کنی، مثلاً در مورد (الف) مثال قبل، واضمه که باید از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنی و چون مناسبه توان‌های ۱۰ آسونه، پس  $10001$  رو به صورت  $10000 + 1$  می‌نویسیم و ادامه می‌دیم. یا در مورد (ب) ۲ تا عدد داریم که به فاصله ۲ از ۱۰۰۰ قرار دارند (یکی ۲ واحد بیشتر و یکی ۲ واحد کم‌تر). پس آگه از عدد ۱۰۰۰ و اتحاد مزدوج استفاده کنیم به هر نمونه می‌رسیم. از این سؤالات زیاده‌اش کن تا خوب دستت راه بیفته.

مثلث خیام

دیدیم که عبارت‌های  $(a+b)^2$  و  $(a+b)^3$  را چه‌طور به کمک اتحادها محاسبه و ساده می‌کنیم و در واقع بسط می‌دهیم. اما برای توان‌های بالاتر چه‌کار کنیم؟ مثلاً  $(a+b)^5$  یا  $(a+b)^{100}$  را. محاسبه این عبارت‌ها دشوار و طولانی است! حکیم عمر خیام، مثلثی به نام مثلث خیام دارد که برای بسط دوجمله‌ای‌ها به ما کمک می‌کند. ببینید:



همان‌طور که می‌بینید، اعداد هر سطر در مثلث خیام، همان ضرایب جملات در بسط‌ها هستند، در واقع اعداد سطر  $(n+1)$  ام برابر ضرایب جملات در بسط  $(a+b)^n$  می‌باشند.

همیشه یادم باشه

در بسط  $(a+b)^n$ ، جمله وجود دارد و جمله‌های اول و آخر  $a^n$  و  $b^n$  هستند که ضریب آن‌ها ۱ است. اگر در نوشتن بسط از  $a^n$  شروع کنیم، در جمله بعدی یکی از توان  $a$  کم شده و یکی به توان  $b$  اضافه می‌شود، یعنی جمله بعدی  $a^{n-1}b$  می‌شود. به همین ترتیب جمله بعدی  $a^{n-2}b^2$  است تا جایی که توان  $a$  صفر شده و به  $b^n$  می‌رسیم. اما ضرایب این عبارات را چه عددی قرار دهیم؟ از مثلث خیام کمک می‌گیریم، می‌دانیم در این مثلث، در هر سطر به‌جز جمله اول و آخر که ۱ هستند، هر جمله از مجموع دو جمله بالا در سطر قبل آن به‌دست می‌آید. از طرفی جملات هر سطر در این مثلث، دو تا دو تا از اول و آخر یکی هستند، یعنی جمله اول و آخر که ۱ است، جمله دوم و ماقبل آخر، نیز مثل هم می‌باشند. جمله سوم و دو تا مانده به آخر مثل هم و ... اگر تعداد جملات بسط، فرد باشد که در توان‌های زوج  $n$  رخ می‌دهد، جمله وسط ضریب تک دارد و توان‌های  $a$  و  $b$  هم در آن برابرند و اگر تعداد جملات زوج باشد که در توان‌های فرد  $n$  رخ می‌دهد، ضرایب همه جملات دو به دو مثل هم می‌باشند.

**نتیجه** اعداد دوم و  $(n-1)$  ام در سطر  $n$  ام مثلث خیام، برابر  $n-1$  هستند.

**توجه** همیشه در هر جمله‌ای از بسط  $(a+b)^n$  مجموع توان‌های دو متغیر  $a$  و  $b$  برابر توان  $n$  می‌باشد، مثلاً در جمله  $a^{n-3}b^3$  داریم:

$$n - 3 + 3 = n$$

**مثال** بسط عبارت  $(a+b)^n$  را بنویسید.

**پاسخ:** به کمک اعداد سطر نهم مثلث خیام، بسط  $(a+b)^n$  را می‌نویسیم. از سطر هفتم مثلث خیام شروع می‌کنیم و اعداد سطر هشتم و بعد نهم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{سطر هفتم:} & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \text{سطر هشتم:} & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ \text{سطر نهم:} & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

حال از  $a^n$  با ضرب ۱ شروع می‌کنیم و یکی یکی از توان  $a$  کم کرده و به توان  $b$  اضافه می‌کنیم و اعداد سطر نهم مثلث خیام را به ترتیب، ضرایب جملات قرار می‌دهیم:

$$(a+b)^n = 1a^n + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8$$

**نکته** برای به دست آوردن بسط  $(a-b)^n$ ، کافی است در تمام جملات بسط  $(a+b)^n$  به جای  $b$ ،  $-b$  را قرار دهیم که با توجه به توان آن، علامت جمله‌ها در توان‌های زوج  $(-b)$  مثبت و در توان‌های فرد  $(-b)$  منفی می‌شود.

مثلث خیام کاربردهای زیادی دارد، مثلاً به یک نمونه مهم آن دقت کنید:

$$1 = 2^0 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر اول}$$

$$1+1 = 2 = 2^1 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر دوم}$$

$$1+2+1 = 4 = 2^2 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر سوم}$$

$$1+3+3+1 = 8 = 2^3 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر چهارم}$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = \text{مجموع اعداد سطر } n \text{ ام مثلث خیام}$$

$$1+4+6+4+1 = 16 = 2^4 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر پنجم}$$

$$1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5 \rightarrow \text{مجموع اعداد سطر ششم}$$

⋮

همان‌طور که می‌بینید مجموع اعداد هر سطر مثلث خیام برابر ۲ به توان شماره آن سطر منهای یک است. مثلاً مجموع اعداد سطر یازدهم برابر  $2^{11-1} = 2^{10}$  می‌باشد. در واقع می‌توان گفت مجموع ضرایب بسط چندجمله‌ای  $(a+b)^n$  برابر  $2^n$  است. انگار که به جای  $a$  و  $b$  عدد ۱ را قرار دهیم.

**مثال** مجموع ضرایب بسط چندجمله‌ای  $(2a+b)^5$  را به دست آورید.

$$(2+1)^5 = 3^5 = 243$$

**پاسخ:** طبق توضیحاتی که دادیم کافی است به جای  $a$  و  $b$  عدد ۱ را قرار دهیم:

$$11^0 = 1 \rightarrow \text{عدد سطر اول مثلث خیام}$$

$$11^1 = 11 \rightarrow \text{اعداد سطر دوم مثلث خیام}$$

$$11^2 = (1+10)^2 = 1+2 \times 10 + 10^2 = 1+20+100 = 121 \rightarrow \text{اعداد سطر سوم مثلث خیام}$$

$$11^3 = (1+10)^3 = 1+3 \times 10 + 3 \times 10^2 + 10^3 = 1+30+300+1000 = 1331 \rightarrow \text{اعداد سطر چهارم مثلث خیام}$$

$$11^4 = (1+10)^4 = 1+4 \times 10 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 10^4 = 1+40+600+4000+10000 = 14641 \rightarrow \text{اعداد سطر پنجم مثلث خیام}$$

این الگو تا همین جا درست است و برای توان‌های بالاتر ۱۱، یعنی  $11^5$ ،  $11^6$  و ... درست نمی‌باشد. مثلاً  $11^5 = 161051$  در صورتی که اعداد سطر ششم مثلث خیام  $161051$  است.

با این که ظاهراً به نظر می‌آید الگویی برای یافتن توان‌های ۱۱ با مثلث خیام وجود ندارد، اما این الگو به صورتی که در زیر می‌آوریم، وجود دارد. فقط کمی دقت و حوصله کنید تا خوب آن را یاد بگیرید.

از همین  $11^5$  شروع می‌کنیم. ابتدا سطر ششم مثلث خیام را می‌نویسیم:

برای نوشتن حاصل  $11^5$  ابتدا اولین عدد سمت چپ سطر ششم مثلث خیام را در نظر گرفته و آن را با رقم دهگان عدد بعدی جمع می‌کنیم. چون عدد

بعدی در این سطر ۵ است که رقم دهگان آن صفر می‌باشد، پس اولین رقم از سمت چپ در جواب  $11^5$  می‌شود:

برای دومین رقم از سمت چپ در جواب  $11^5$ ، رقم یکان دومین عدد سطر ششم (۵) را با رقم دهگان سومین عدد (۱۰) جمع می‌کنیم، پس:

برای سومین رقم از سمت چپ در جواب  $11^5$ ، رقم یکان سومین عدد (۱۰) را با رقم دهگان چهارمین عدد (۱۰) جمع می‌کنیم، پس:

رقم دهگان ۵ رقم یکان ۰

رقم دهگان ۱ رقم یکان ۵

به همین ترتیب برای ارقام بعدی ادامه می‌دهیم:

رقم ششم (یا آخر)  $\rightarrow 1$  ، رقم پنجم از سمت چپ  $\rightarrow 5 = 5 + 0$  ، رقم چهارم از سمت چپ  $\rightarrow 0 = 0 + 0$

$$11^5 = 161051$$

پس عدد  $11^5$  برابر است با:

این الگو برای توان‌های کم‌تر از ۵ هم برقرار است. در واقع چون در سطرهای قبل مثلث خیام، تمام ارقام دهگان، صفر هستند، جواب، همان اعداد سطرها می‌شوند.

**مثال** حاصل  $11^7$  را به دست آورید.

**پاسخ:** اعداد سطر هشتم مثلث خیام را می‌نویسیم:

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

الگوی توان‌های ۱۱ را اعمال می‌کنیم:

رقم اول:  $1+0=1$  ، رقم دوم:  $7+2=9$  ، رقم سوم:  $1+3=4$  ، رقم چهارم:  $5+3=8$   
 رقم پنجم:  $5+2=7$  ، رقم ششم:  $1+0=1$  ، رقم هفتم:  $7+0=7$  ، رقم هشتم: ۱

$11^7 = 19487171$

پس داریم:

**نکته فایده‌آمیز:** وقتی توان‌های ۱۱ بالاتر میره، اگر رقم یکان یک عدد سطر رو با دهگان عدد بعدی جمع کنیم، جواب، دو رقمی می‌شه، همون عدد دو رقمی رو بگذاریم؟

**پاسخ:** آخرین، سؤال قبلی فوبی پرسیدی. نه نباید این کار رو بکنی. باید اعداد به دست اومده رو مثل همون اعداد سطر مثلث قیام، تو به سطر بگذاری و برای بار دوم همون کار جمع کردن ارقام رو تکرار کنی تا جواب‌ها همه یک رقمی بشن. حاصل توان ۸ عدد ۱۱ رو بین پهتوری به دست میاریم تا فوب متوجه موضوع بشی:

۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱

به ترتیب ارقام  $11^8$  رو از سمت چپ به دست می‌آوریم:

رقم اول:  $1+0=1$  ، رقم دوم:  $8+2=10$  ، رقم سوم:  $8+5=13$   
 رقم چهارم:  $6+7=13$  ، رقم پنجم:  $0+5=5$  ، رقم ششم:  $6+2=8$   
 رقم هفتم:  $8+0=8$  ، رقم هشتم:  $8+0=8$  ، رقم نهم: ۱

۱ ۱۰ ۱۳ ۱۳ ۵ ۸ ۸ ۱

حال چون اعداد دو رقمی هم داریم، دوباره این اعداد به دست آمده را پشت سر هم قرار می‌دهیم:

رقم اول:  $1+1=2$  ، رقم دوم:  $0+1=1$  ، رقم سوم:  $3+1=4$   
 رقم چهارم:  $3+0=3$  ، رقم پنجم:  $5+0=5$  ، رقم ششم:  $8+0=8$   
 رقم هفتم:  $8+0=8$  ، رقم هشتم:  $8+0=8$  ، رقم نهم: ۱

بنابراین  $11^8$  برابر است با:

$11^8 = 214358881$

۶۹- جمله ثابت بسط  $(2a-3)^6$  کدام است؟

- ۱) ۱۹۲
- ۲) -۶۴
- ۳) -۱۹۲
- ۴) ۶۴

۷۰- ضریب جمله  $xy^5$  در بسط عبارت  $(x-y)^6$  کدام است؟

- ۱) ۱۵
- ۲) -۶
- ۳) -۱۵
- ۴) ۶

۷۱- مجموع اعداد سطر پانزدهم مثلث خیام کدام است؟

- ۱)  $2^{16}$
- ۲)  $2^{14}$
- ۳)  $2^{15}$
- ۴)  $2^{15}$

۷۲- در جمله چندم بسط  $(5y-x)^6$  توان‌های  $x$  و  $y$  برابرند؟

- ۱) ششم
- ۲) هفتم
- ۳) هشتم
- ۴) نهم

۷۳- اگر مجموع ضرایب بسط  $(3x+2y)^n$  برابر ۶۲۵ باشد،  $n$  کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

۷۴- در حاصل ضرب  $2005 \times 1995$  چند رقم ۹ وجود دارد؟

- ۱) ۵
- ۲) ۴
- ۳) ۶
- ۴) ۳

۷۵- در محاسبه حاصل عبارت  $98^3 - 101^3$ ، کدام یک از اتحادها کاربرد ندارد؟

- ۱)  $(a+b)^2$
- ۲)  $(a-b)^2$
- ۳)  $(a+b)(a+c)$
- ۴)  $a^2 - b^2$

۷۶- حاصل عبارت  $1 + (50+1)(2500-50+1) + 51(2500-50+1) + 49(2500+50+1)$  کدام است؟

- ۱)  $50^5$
- ۲)  $50^6 + 2$
- ۳)  $50^6$
- ۴)  $50^5 + 1$

## پاسخ‌های تشریحی

چون تساوی یک اتحاد است، پس به‌ازای هر مقداری برای  $x$  باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 0-0+1=0+b-3 \Rightarrow b-3=1 \Rightarrow b=4 \\ x=1 \Rightarrow a-2+1=-6+4-3 \Rightarrow a-1=-5 \Rightarrow a=-4 \end{cases} \Rightarrow a-b=-4-4=-8$$

چون این تساوی یک اتحاد است، پس به‌ازای هر مقداری برای  $x$  برقرار می‌باشد. می‌توانیم به  $x$  یک عدد دلخواه بدهیم، مثلاً به جای  $x$  عدد ۱

را قرار می‌دهیم:

$$a(1)^2 + 2 = 2(2(1)^2 + 1) \Rightarrow a + 2 = 2(2 + 1) \Rightarrow a + 2 = 6 \Rightarrow a = 4$$

روش اول: کافی است از دو طرف تساوی، عبارت‌های هم‌درجه را مساوی یک‌دیگر قرار دهیم:

$$ax - x^2 + b = -(9 + 6x + x^2) \Rightarrow ax - x^2 + b = -9 - 6x - x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax = -6x \Rightarrow a = -6 \\ -x^2 = -x^2 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \\ b = -9 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b = (-6)^2 + 2(-9) = 36 - 18 = 18$$

روش دوم: به  $x$  مقدارهای دلخواه می‌دهیم و مقادیر  $a$  و  $b$  را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 0-0+b=-(3+0)^2 \Rightarrow b=-9 \\ x=1 \Rightarrow a-1-9=-(3+1)^2 \Rightarrow a-10=-16 \Rightarrow a=-16+10=-6 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b = 36 - 18 = 18$$

روش اول:

$$(x+1)(x^2+ax^2-x+1) = x^4+x^3+bx^2+c \Rightarrow x^4+ax^3-x^2+x^3+ax^2+x+1 = x^4+x^3+bx^2+c$$

$$\Rightarrow \underline{x^4} + \underline{(a+1)x^3} + \underline{(a-1)x^2} + \underline{1} = \underline{x^4} + \underline{x^3} + \underline{bx^2} + \underline{c} \Rightarrow \begin{cases} a+1=1 \Rightarrow a=0 \\ a-1=b \xrightarrow{a=0} b=-1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{0-1}{1} = -1 \\ 1=c \end{cases}$$

روش دوم: چون تساوی یک اتحاد است، به‌ازای تمام مقادیر  $x$  برقرار می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow (1)(1) = c \Rightarrow c=1 \\ x=1 \Rightarrow (2)(1+a) = 2+b+c \xrightarrow{c=1} 2+2a=2+b+1 \Rightarrow 2a-b=1 \quad (*) \\ x=-2 \Rightarrow (-1)(-8+4a+3) = 8+4b+c \xrightarrow{c=1} 5-4a=9+4b \Rightarrow -4a-4b=4 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } -4} a+b=-1 \quad (**) \end{cases}$$

همیشه سعی کنید از اعدادی استفاده کنید که کار شما را راحت‌تر کنند و زودتر به جواب برسید. حال با جمع روابط (\*) و (\*\*) داریم:

$$3a=0 \Rightarrow a=0 \xrightarrow{2a-b=1} b=-1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{0-1}{1} = -1$$

$$\begin{cases} 2a = -8 \Rightarrow a = -4 \quad (*) \\ (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \\ (x+a)^2 = x^2 - 8x + b \quad \text{فرض:} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = -8 \Rightarrow a = -4 \quad (*) \\ a^2 = b \Rightarrow (-4)^2 = b \Rightarrow b = 16 \end{cases} \Rightarrow a+b = -4+16 = 12$$

روش اول:

$$(1-\sqrt{3}x)^2 - (1+\sqrt{3}x)^2 = 1 - 2\sqrt{3}x + 3x^2 - 1 - 2\sqrt{3}x - 3x^2 = -4\sqrt{3}x$$

روش دوم: از رابطه  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$  استفاده می‌کنیم:

$$(1-\sqrt{3}x)^2 - (1+\sqrt{3}x)^2 = -4(1)(\sqrt{3}x) = -4\sqrt{3}x$$

می‌خواهیم عبارت  $3x^2 - ax + 1$  مربع کامل باشد. جمله اول آن حتماً  $\sqrt{3}x$  بوده که وقتی به توان ۲ رسیده، برابر  $3x^2$  شده، هم‌چنین

چون  $-ax$  مربع کامل نیست، مربع جمله دوم آن ۱ بوده است. درنتیجه داریم:

$$(\sqrt{3}x \pm 1)^2 = 3x^2 \pm 2\sqrt{3}x + 1 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

**نشان بده!** چرا تو پرانتز، جمله دوم رو  $\pm 1$  نوشتید؟ مگه نگفتید جمله دوم ۱ هست، پس چرا  $-1$  رو نوشتید؟

**پاسخ:** گفتیم «مربع جمله ۳ است.» و می‌روئیم که  $1^2 = 1$  و  $(-1)^2 = 1$ . پس جمله ۳، هم می‌تونه ۱ باشه و هم  $-1$ . معلومه به حرف‌هایی که

زدیم فوب گوش نکردی، از اون سؤال‌ها پرسیدی!

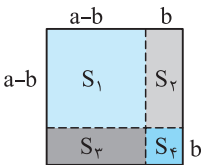


جملات  $4x^2$  و  $9$  مربع کامل هستند، پس دو جمله داخل پرانتز اتحاد مربع دو جمله‌ای  $2x$  و  $\pm 3$  یا  $\pm 2x$  و  $3$  بوده‌اند. پس داریم:

$$4x^2 - \frac{m}{3}x + 9 = (2x \pm 3)^2 = 4x^2 \pm 12x + 9 \Rightarrow -\frac{m}{3} = \pm 12 \Rightarrow m = \pm 36$$

$$\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} \left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای}} 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \left(\frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{4x^2} = 25$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 25 - 3 = 22$$



$$S_1 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

$$S_2 = (a-b)b = ab - b^2$$

$$S_3 = (a-b)b = ab - b^2$$

$$S_4 = b \times b = b^2$$

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow ((a-b) + b)^2 = (a-b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای}$$

از صورت سؤال و گزینه‌ها متوجه می‌شویم جمله‌ای که مشکل دارد  $-\frac{19}{5}x$  است و بنابراین نمی‌توانیم از آن برای پیدا کردن اتحاد استفاده

کنیم. چون  $9x^2$  و  $\frac{4}{25}$  مربع کامل هستند، پس جمله اول  $3x$  است که مربع آن  $9x^2$  شده و جمله دوم  $\pm \frac{2}{5}$  می‌باشد که مربع آن  $\frac{4}{25}$  شده

است. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \left(3x - \frac{2}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{25} \Rightarrow -\frac{19}{5}x + t = -\frac{12}{5}x \Rightarrow t = \frac{19}{5}x - \frac{12}{5}x = \frac{7}{5}x \\ \text{یا} \\ \left(3x + \frac{2}{5}\right)^2 = 9x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{4}{25} \Rightarrow -\frac{19}{5}x + t = \frac{12}{5}x \Rightarrow t = \frac{19}{5}x + \frac{12}{5}x = \frac{31}{5}x \end{cases}$$

تنها عبارت  $\frac{7}{5}x$  در گزینه (۲) وجود دارد.

از جمله  $4x^2$  می‌فهمیم جمله اول که به توان ۲ رسیده  $2x$  بوده است. از طرفی برای جمله وسط داریم:

$$2 \times \text{جمله اول} \times \text{جمله دوم} = -6x \Rightarrow 2 \times 2x \times \text{جمله دوم} = -6x \Rightarrow \text{جمله دوم} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

در واقع اتحاد به شکل  $(2x - \frac{3}{2})^2$  می‌شود، یعنی داریم:

$$\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \text{عدد مطلوب} = \frac{1}{4} = 2$$

توجه کنید که چون در صورت سؤال گفته شده بود کدام عدد را به عبارت اضافه کنیم، پس از جمله  $\frac{1}{4}$  نمی‌توانستیم برای به دست آوردن اتحاد

استفاده کنیم (در واقع این جمله ایراد دارد)، به جای آن، جملات اول و دوم مشکلی نداشتند و آن‌ها معیار حل تست شدند.

$$(\sqrt{3} - x)^2 = y - 2\sqrt{6} + z$$

از سمت چپ تساوی واضح است که اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای داریم که یک جمله آن  $\sqrt{3}$  است. از طرفی چون  $-2\sqrt{6}$  مربع کامل نیست

و مضرب ۲ هم می‌باشد، پس همان جمله‌ای است که به شکل «جمله دوم  $\times$  جمله اول  $\times$  ۲» می‌باشد. یعنی داریم:

$$\cancel{x} \times \sqrt{3} \times (\cancel{x}) = \cancel{2} \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{3} \times x = \sqrt{6} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \frac{3}{y} - 2\sqrt{6} + \frac{2}{z} \Rightarrow y^2 + z^2 = 9 + 4 = 13$$

سمت چپ تساوی دو عبارت نامنفی (همواره صفر یا مثبت) و سمت راست تساوی، صفر را داریم. پس این تساوی تنها وقتی امکان‌پذیر است

که هر دو عبارت  $(x-2)^2$  و  $(y-5)^2$  برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ (y-5)^2 = 0 \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$$

شکل عبارت داده شده ما را به یاد اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌اندازد. پس سعی می‌کنیم با تغییراتی این اتحاد را ایجاد کنیم:

$$a^2 + b^2 = 2a + 2b - 2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$\downarrow$   
 اتحاد مربع دوجمله‌ای      اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^3 = (1+1)^3 = 8$$

👉 **شانم اجازه!** ما که به ذهنمون نمی‌رسه همچین کاری کنیم. از کجا باید بفهمیم؟؟

**پاسخ:** یک کم به نظر سفت میار. ولی وقتی حسابی تمرین کنی و به اتحادها مسلط بشی، این ریگه برات کاری ندراره. پس مثل همیشه سعی کن تمرین زیارتی اتمام ببری. البته از این دست سؤالات، تو لنگور انسانی شاید به ندرت وجود داشته باشه، پس زیاد نگران نباش.

با یک دسته‌بندی مناسب می‌توانیم در یک طرف تساوی، عبارت‌های مربع کامل ایجاد کنیم:

$$2a^2 + 4b^2 + 4ab + 1 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + a^2 + 4ab + 4b^2 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 + (a+2b)^2 = 0$$

$\downarrow$   
 $a^2 + a^2$       اتحاد مربع دوجمله‌ای      اتحاد مربع دوجمله‌ای

جمع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است، پس حتماً هر دو برابر صفر بوده‌اند:

$$\begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 & (*) \\ a+2b=0 \Rightarrow a=-2b & (*) \end{cases} \Rightarrow a+b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$5a^2 + b^2 - 2ab + 4a + 1 = 0 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 + a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$\downarrow$   
 $4a^2 + a^2$       اتحاد مربع دوجمله‌ای      اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\Rightarrow (2a+1)^2 + (a-b)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ a-b=0 \Rightarrow a=b \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

واضح است که اتحاد جمله مشترک می‌باشد. پس داریم:

$$(t-a)(t+\sqrt{\lambda}) = t^2 + (-a+\sqrt{\lambda})t + (-a)(\sqrt{\lambda}) = t^2 + bt - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + \sqrt{\lambda} = b \\ (-a) \times (\sqrt{\lambda}) = -4 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \times a = 4 \Rightarrow a = \sqrt{\lambda} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} = b \Rightarrow -\sqrt{\lambda} + 2\sqrt{\lambda} = b \Rightarrow b = \sqrt{\lambda}$$

$$\Rightarrow a - b = \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} = 0$$

$$(x+1)^2 - (x-2)(x+4) = x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 2x - 8) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 8 = 9$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای      اتحاد جمله مشترک

$$(x+3)(x^2-2) - (3-x)(x-3) = -(x+3)(x-3)(x^2-2) = -(x^2-9)(x^2-2) = -(x^4 + (-9-2)x^2 + (-9)(-2)) = -x^4 + 11x^2 - 18$$

اتحاد مزدوج      اتحاد جمله مشترک

اصلاً لازم نیست برای پیدا کردن جواب، حاصل همه گزینه‌ها را به دست بیاوریم، البته شما برای تمرین، حتماً این کار را انجام دهید، ولی در یک سؤال تستی احتیاجی به این کار نیست. می‌دانیم در اتحاد مزدوج، ۲ تا پرانتز داریم با دو جمله در آن‌ها که یک جمله بین دو پرانتز مشترک است و جمله دیگر قرینه یکدیگر می‌باشد. حال گزینه‌ها را بررسی کنیم:

۱)  $(-y+a)(y+a) = (a-y)(a+y)$  ✓

۲)  $(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) = ((x-1)-\sqrt{2})((x-1)+\sqrt{2})$  ✓

۳)  $(x^2-2)(x^2+\sqrt{4}) = (x^2-2)(x^2+2)$  ✓

۴)  $(-x+2)(2-x) = (2-x)(2-x) = (2-x)^2 \Rightarrow$  اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

از سمت راست و چپ تساوی به وضوح نتیجه می‌شود که با اتحاد جمله مشترک سر و کار داریم. جمله مشترک  $t$  (چون تنها جمله مربع کامل سمت راست است) و جملات غیرمشترک که حاصل ضربشان برابر ۳ و حاصل جمعشان برابر  $-4$  شده است. حالا کمی فکر کنیم، ببینیم چه عددی می‌تواند جای جملات غیرمشترک باشند؟ (۱ و ۳؟ نه!) اعداد  $-1$  و  $-3$  این شرایط را دارند، چون  $(-3) \times (-1) = 3$  و  $(-3) + (-1) = -4$  پس داریم:

$$(t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3 \Rightarrow abc = t \times 1 \times 3 = 3t$$

$$\underbrace{(x+a)(x+b)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} - \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = \underbrace{x^2 + (a+b)x + ab}_{-(a+b)} - \underbrace{(x^2 + (-a-b)x + (-a)(-b))}_{ab}$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab - x^2 - (-a-b)x - ab = 2(a+b)x$$

$$(x-\sqrt{5})(-2-x) + (1-\sqrt{5})^2 = \underbrace{-(x-\sqrt{5})(x+2)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} + \underbrace{(1-\sqrt{5})^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} = -(x^2 + (2-\sqrt{5})x - 2\sqrt{5}) + (1 - 2\sqrt{5} + 5)$$

دارای ۳ جمله با توان‌های مختلف  $x$  (صفر، ۱ و ۲) است.  $\Rightarrow -x^2 + (\sqrt{5}-2)x + 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5} = -x^2 + (\sqrt{5}-2)x + 6$

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = \underbrace{(x^2 + y^2 + xy)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(x^2 + y^2 - xy)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$

$$\underline{\underline{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

$$(a-2)(a+2) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} a^2 - 4 \Rightarrow ((a-2)(a+2))^2 = (a^2 - 4)^2 \stackrel{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}{=} a^4 - 8a^2 + 16$$

روش اول:

$$((a-2)(a+2))^2 = (a-2)^2(a+2)^2 \stackrel{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}{=} (a^2 - 4a + 4)(a^2 + 4a + 4)$$

$$= ((a^2 + 4) - 4a)((a^2 + 4) + 4a) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (a^2 + 4)^2 - (4a)^2 = a^4 + 8a^2 + 16 - 16a^2 = a^4 - 8a^2 + 16$$

همان‌طور که می‌بینید در هر دو روش، از اتحاد مزدوج و اتحاد مربع دو جمله‌ای برای محاسبه حاصل عبارت، استفاده کردیم.

فرض کنیم طول مستطیل اولیه  $X$  و عرض آن  $Y$  باشد، در این صورت  $X = Y + 3$  است و داریم:

$$28 = \text{مساحت مستطیل اولیه} = xy = (y+3)y = y^2 + 3y$$

$$\text{مساحت مستطیل جدید} = (x+4)(y-4) \stackrel{x=y+3}{=} (y+3+4)(y-4) = (y+7)(y-4) = y^2 + 3y - 28$$

$$\Rightarrow -28 = \text{مساحت اولیه} = \text{مساحت جدید} \Rightarrow -28 = y^2 + 3y - 28 - (y^2 + 3y) = y^2 + 3y - 28 - y^2 - 3y = -28$$

پس مساحت مستطیل ۲۸ واحد کاهش می‌یابد.

عبارت داده شده، خیلی بزرگ است. پس اگر بخواهیم در ابتدا  $X = 100$  و  $Y = 1000$  را در آن قرار دهیم، ممکن است حال‌احالها نتوانیم به جواب برسیم، بنابراین بهتر و عاقلانه‌تر این است که اگر عبارت، ساده‌شدنی است، ابتدا آن را ساده کنیم، بعد مقادیر  $X$  و  $Y$  را در آن قرار دهیم:

$$\frac{((x+y)-3)((x+y)+3)}{x^2 + y^2 + 2xy - 9} \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{(x+y)^2 - 9}{x^2 + y^2 + 2xy - 9} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 9}{x^2 + y^2 + 2xy - 9} = 1$$

ببینید، حاصل برابر ۱ شد، یعنی  $X$  و  $Y$  هرچه که باشند، جواب همیشه برابر ۱ است. چقدر راحت شدیم! اوف!

**👏 خانم اجازه!** شما چه قدر باهوشید! ما که هیچ وقت از این کارها نمی‌کردیم، همون اول می‌فهمیدیم  $X$  و  $Y$  رو تو عبارت قرار می‌دادیم!

**پاسخ:** من چه قدر باهوشم؟! درسته که هوش مهمه ولی مهم‌تر از اون تمرین و تکراره، وقتی تو هم زیاد تمرین حل کنی، اون وقت مثل آب خوردن می‌تونی جواب این پور تست‌ها رو به دست بیاری و اون زمانه که به فوریت میگی: وای من چه قدر باهوشم!

با کمی دقت در عبارت داده شده و ابتکار عمل، خواهیم دید که به راحتی با اتحاد مزدوج می‌توان حاصل آن را به دست آورد. اگر عبارت داده شده را در  $(a+b)$  ضرب و بر آن تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{\underbrace{(a-b)(a+b)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)}{(a+b)} = \frac{\underbrace{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(a^4 + b^4)}{(a+b)} = \frac{\underbrace{(a^4 - b^4)(a^4 + b^4)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}{(a+b)} = \frac{a^8 - b^8}{a+b}$$

عبارت  $(1 + \frac{1}{256})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2})$  را در  $(1 - \frac{1}{2})$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$2 - \underbrace{(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{256})}_{\text{اتحاد مزدوج}} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 - \underbrace{(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{256})}_{\text{اتحاد مزدوج}} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2 - 2(1 - \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{256}) = 2 - 2(1 - \frac{1}{256})(1 + \frac{1}{256}) = 2 - 2(1 - \frac{1}{256}) = 2 - 2(\frac{256-1}{256})$$

$$= 2 - \frac{256-1}{128} = \frac{256-255}{128} = \frac{1}{128} = 2^{-7}$$

**فانم اجازه!** تو این دوتا سؤال آخر، از کجا فهمیدید که باید این عبارتها رو ضرب و تقسیم کنید؟

**پاسخ:** صورت سؤالاتی که این طوری حل میشن، معمولاً مثل همه. نگاه کن تو هر دو سؤال، پرانتزهایی داریم که در اون‌ها دو جمله مربع کامل وجود داره و فقط جملات یکی از پرانتزها مربع کامل نیست، در سؤال قبلی، پرانتز  $(a - b)$  و تو این سؤال، پرانتز  $(1 + \frac{1}{2})$  مربع کامل نیستن و کلید حل این دو تا سؤال هم همین پرانتزها هستن. عبارتها رو در مزدوج این پرانتزهای کلیدی ضرب و تقسیم می‌کنیم و با این کار، پی‌درپی اتحاد مزدوج ایبار همیشه که به راحتی می‌تونیم جواب رو به دست بیاریم.

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2 \stackrel{(*)}{=} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 ((\sqrt{3} - \sqrt{2})^2)^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (3 - 2)^2 = 1$$

(\*) دقت کنید که  $\sqrt{5} - 2\sqrt{6}$  را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  تبدیل کردیم، زیرا داریم:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

البته این مدل سؤالات معمولاً در کنکورهای ریاضی و تجربی مطرح می‌شود تا انسانی. پس بابت دشواری آن نگران نباشید. ©  
با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{3} - x)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2(x) + 3(\sqrt{3})(x)^2 - (x)^3 = 3\sqrt{3} - 9x + 3\sqrt{3}x^2 - x^3$$

$$(x + 2)^3 - 3x(3x + 9) = x^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 + 2^3 - 3x(3x) - 3x(9) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 9x^2 - 27x = x^3 + 27$$

$$3x - 2xy^2 \stackrel{\text{اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای}}{=} (3x)^3 - 3(3x)^2(2xy^2) + 3(3x)(2xy^2)^2 - (2xy^2)^3 = 27x^3 - 54x^2y^2 + 36x^3y^4 - 8x^3y^6$$

پس ضریب  $x^3y^2$  برابر  $-54$  است.

**روش اول:** باید عبارتهایی به شکل  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$  یا  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$  داشته باشیم. در هر گزینه با استفاده از پرانتز لاغر، پرانتز چاق را در صورتی که عبارت، اتحاد باشد، می‌نویسیم تا ببینیم کدام گزینه به این صورت است.

**بررسی گزینه‌ها:**

- ۱)  $(3x - y)((3x)^2 + (3x)(y) + y^2) = (3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$  ✗
- ۲)  $(x + 2y)(x^2 - (x)(2y) + (2y)^2) = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$  ✗
- ۳)  $(2x + y)((2x)^2 - (2x)(y) + y^2) = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$  ✗
- ۴)  $(5x - y)((5x)^2 + (5x)(y) + y^2) = (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$  ✓

**روش دوم:** حاصل هر گزینه را می‌نویسیم تا ببینیم کدام یک به شکل اتحاد مجموع یا تفاضل مکعب دوجمله‌ای است. که تنها گزینه (۴) به این صورت است:

$$(5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) = (5x)^3 - y^3 = 125x^3 - y^3$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $a$   $b$   $a^2$   $ab$   $b^2$   $a^3$   $b^3$

محاسبه حاصل عبارت به‌زای مقادیر داده‌شده، به نظر خیلی طولانی می‌آید ولی اگر عبارت را ساده کنیم، خواهید دید که کارمان بسیار ساده خواهد شد:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 = x^3 + 8y^3 - 8y^3 = x^3$$

اتحاد چاق و لاغر

حالا فقط کافی است  $x = 1 \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  را در عبارت به‌دست آمده، قرار دهیم:

$$x^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3.375$$

اگر بخواهیم در همین ابتدا مقدار  $x$  را در عبارت داده شده قرار دهیم، کار خیلی سختی خواهیم داشت، چون با محاسبات زیادی روبه‌رو خواهیم بود که امکان خطا هم زیاد است. پس بهتر است در ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده کنیم و سپس مقدار  $x$  را در آن قرار دهیم:

$$\underbrace{(x^7 - x + 1)(x^6 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}_{\text{اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای}} = \underbrace{(x^6 + 1)(x^3 - 1)(x^3 + 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{(x^6 + 1)(x^3 - 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$= x^{12} - 1 \stackrel{x = \sqrt[3]{2}}{=} (\sqrt[3]{2})^{12} - 1 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

چون حاصل  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  را می‌خواهیم، طرفین تساوی  $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}$  را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(a + \frac{1}{a})^3 = (2\sqrt{5})^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2(\frac{1}{a}) + 3a(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{a})^3 = 40\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} = 40\sqrt{5} \Rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} = 40\sqrt{5} - 3(a + \frac{1}{a})$$

$$\stackrel{a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}}{\Rightarrow} a^3 + \frac{1}{a^3} = 40\sqrt{5} - 3(2\sqrt{5}) = 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 34\sqrt{5}$$

چون تفاضل مکعبات و تفاضل دو عدد را داریم، از اتحاد  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$  استفاده می‌کنیم:

$$35 = 5^3 + 3ab(5) \Rightarrow 35 = 125 + 15ab \Rightarrow 15ab = -90 \Rightarrow ab = -6$$

چون مجموع و حاصل ضرب دو عدد را داریم و مجموع مکعبات دو عدد را می‌خواهیم، از اتحاد  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  استفاده می‌کنیم. اگر دو عدد را  $x$  و  $y$  فرض کنیم، آن‌گاه طبق مفروضات سؤال داریم:

$$x + y = 6 \quad \text{و} \quad xy = 6 - 2\sqrt{2}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 6^3 - 3(6 - 2\sqrt{2})(6) = 216 - 108 + 36\sqrt{2} = 108 + 36\sqrt{2} = 36(3 + \sqrt{2})$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \Rightarrow 392 = 8^3 - 3xy(8) \Rightarrow 392 = 512 - 24xy \Rightarrow 24xy = 120 \Rightarrow xy = 5$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 2xy(x + y) = 8^3 - 2(5)(8) = 64 - 80 = -16$$

دو عدد مطلوب را  $x$  و  $y$  فرض می‌کنیم. پس داریم:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 2 + 3(-\frac{1}{2})(x + y) = 2 - \frac{3}{2}(x + y) \stackrel{\text{جذر}}{\Rightarrow} (x + y)^3 = 1 \Rightarrow x + y = \pm 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (\pm 1)^3 - 3(-\frac{1}{2})(\pm 1) = \pm 1 \pm \frac{3}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (*)$$

طبق اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای، برای محاسبه  $a^3 + b^3$ ، احتیاج به مجموع دو جمله، مجموع مربعات دو جمله و حاصل ضرب دو جمله داریم. طبق مفروضات سؤال، حاصل ضرب دو جمله را نداریم. اما می‌توانیم با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، آن را به دست آوریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \stackrel{a+b=-1}{\Rightarrow} (-1)^2 = 1 + 2ab \Rightarrow 1 - 1 = 2ab \Rightarrow -4 = 2ab \Rightarrow ab = -2$$

$$(*) \Rightarrow a^3 + b^3 = (-1)(1 - (-2)) = (-1)(1 + 2) = -3$$

حال داریم:

$$(ax + by)^3 - (ay + bx)^3 = a^3x^3 + 3a^2bxy + 3ab^2y^2 + b^3y^3 - (a^3y^3 + 3a^2bxy + 3ab^2x^2 + b^3x^3)$$

$$= a^3x^3 + 3a^2bxy + b^3y^3 - a^3y^3 - 3a^2bxy - b^3x^3 \stackrel{\text{دسته‌بندی}}{=} \underbrace{a^3x^3 - b^3x^3}_{\text{فکتور از } x^3} + \underbrace{b^3y^3 - a^3y^3}_{\text{فکتور از } y^3}$$

$$= x^3(a^3 - b^3) + y^3(b^3 - a^3) = x^3(a^3 - b^3) - y^3(a^3 - b^3) \stackrel{\text{فکتور از } (a^3 - b^3)}{=} (x^3 - y^3)(a^3 - b^3)$$

روش اول:

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 - 6x - 2x^3}_{\text{فکتور از } x^2} = x^2(x^2 + 3) - 2x(3 + x^2) \stackrel{\text{فکتور از } (x^2 + 3)}{=} (x^2 + 3)(x^2 - 2x) = (x^2 + 3)x(x - 2)$$

روش دوم:

$$x^4 + 3x^2 - 6x - 2x^3 = x^2(x-2) + 3x(x-2) \stackrel{\text{فکتور از } (x-2)}{=} (x-2)(x^2+3x) = (x-2)x(x^2+3)$$

فکتور از  $x^2$       فکتور از  $x$

روش سوم:

$$x^4 + 3x^2 - 6x - 2x^3 \stackrel{\text{فکتور از } x}{=} x(x^3 + 3x - 6 - 2x^2) = x(x(x^2+3) - 2(x^2+3)) \stackrel{\text{فکتور از } (x^2+3)}{=} x(x^2+3)(x-2)$$

فکتور از  $x$       فکتور از  $x^2+3$       فکتور از  $x$

همان طور که می بینید برای تجزیه این عبارت، به سه روش مختلف، جملات را دسته بندی کردیم و فاکتور گرفتیم. پس همواره یک روش منحصر به فرد برای حل این مدل از تستها وجود ندارد ولی همیشه سعی کنید مناسب ترین و ساده ترین دسته بندی را انجام دهید تا به جواب برسید.



$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = x^3(x-3) + 8(x-3) \stackrel{\text{فکتور از } (x-3)}{=} (x-3)(x^3+8) = (x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$$

فکتور از  $x^3$       فکتور از  $8$       اتحاد چاقی و لاغر



$$x^3 - \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 3 \stackrel{\text{دسته بندی}}{=} x^3 - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 3 = x^3 - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

↑  
 $(\sqrt{3})^2$   
اتحاد چاقی و لاغر      فکتور از  $-\sqrt{3}$

$$= (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3) - \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) \stackrel{\text{فکتور از } (x - \sqrt{3})}{=} (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3})$$

**👉 خانم اجازه!** آخه ما از کجا این کارهایی که شما کردین به ذهنمون برسه؟ اصلاً از کجا فهمیدین باید چه طوری جمله ها رو دسته بندی کنید؟

**پاسخ:** این بار رو راست می گوی! این تست یک کم سفته که البته با تمرین و تکرار، می تونی تشفیص بری که پیکار کنی. ببین مثلاً من بیام  $x^3$  و  $\sqrt{3}x$  رو تو یه دسته قرار بدم و از  $x$  اون فاکتور بگیرم. چی میشه:

$$x(x^2 - \sqrt{3}) - 3\sqrt{3} + 3 = x(x^2 - \sqrt{3}) - 3(\sqrt{3} - 1)$$

فکتور از  $-3$

ببین به هیچ چیز به درر بفروری نرسیدیم. حالا مثلاً  $x - \sqrt{3}$  و  $-3\sqrt{3} + 3$  رو تو یه دسته بگذاریم و از  $-\sqrt{3}$  فاکتور بگیریم:

$$x^2 + 3 - \sqrt{3}(x + 3)$$

حالا چی شد؟ باز هم به عبارت جالبی نرسیدیم که تمیزه اش به نظر غیر ممکن میار. پس تنها دسته بندی مناسبی که به درر بفرور باشه، همونیه که ما انجام دادیم. گفته بودم دسته بندی خیلی مهمه و با دسته بندی اشتباه به جواب نمی رسیم!

در عبارت  $x(A-2)$  مقدار  $A$  را جای گذاری می کنیم:



$$x\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1 \stackrel{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}{=} (x-1)^2$$



$$x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 = (x+a)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

یک اتحاد داریم، پس باید دو طرف تساوی با هم مساوی باشند. حاصل طرف راست را با استفاده از اتحاد جمله مشترک به دست می آوریم و جملات متناظر را مساوی می گیریم:

$$x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 = x^2 + \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x - \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = a - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ -1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow a = \sqrt{2} \end{cases}$$



$$4x^3 - 6x^2 + 2x \stackrel{\text{فکتور از } 2x}{=} 2x(2x^2 - 3x + 1) = 2x(2x-1)(x-1)$$

تجزیه به روش A

تجزیه عبارت  $2x^2 - 3x + 1$  به روش A را به صورت زیر انجام دادیم:

$$A = 2x^2 - 3x + 1 \stackrel{\times 2}{\Rightarrow} 2A = 4x^2 - 6x + 2 \Rightarrow 2A = (2x-1)(2x-2) \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} A = (2x-1)(x-1)$$

$(2x)(-3)$        $2(x-1)$



$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x-1) - 4(2x-1) \stackrel{\text{فکتور از } (2x-1)}{=} (2x-1)(x^2-4) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (2x-1)(x-2)(x+2)$$

فکتور از  $x^2$       فکتور از  $-4$

پس تنها عامل  $2x+1$  در تجزیه عبارت وجود ندارد.

۲ ۵۲

$$\underbrace{x^f + x^3}_{\text{فاکتور از } x^3} - \underbrace{y^3 - xy^3}_{\text{فاکتور از } -y^3} = x^3(x+1) - y^3(x+1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x+1)} (x+1)(x^3 - y^3) \xrightarrow{\text{اتحاد چاتی و لاغر}} (x+1)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

۲ ۵۳

$$x^3 - x + x^2 - 1 \xrightarrow{\text{دسته بندی}} \underbrace{x^3 + x^2}_{\text{فاکتور از } x^2} - \underbrace{x - 1}_{\text{فاکتور از } -1} = x^2(x+1) - (x+1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x+1)} (x+1)(x^2 - 1)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

۴ ۵۴

$$\underbrace{x^4 + 2x^3}_{\text{فاکتور از } x^3} - \underbrace{x - 2}_{\text{فاکتور از } -1} = x^3(x+2) - (x+2) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x+2)} (x+2)(x^3 - 1) \xrightarrow{\text{اتحاد تفاضل مکعب دوجمله ای}} (x+2)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

۲ ۵۵

$$\underbrace{x^3 - \sqrt{2}x^2}_{\text{فاکتور از } x^2} - \underbrace{2x + 2\sqrt{2}}_{\text{فاکتور از } -2} = x^2(x - \sqrt{2}) - 2(x - \sqrt{2}) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x - \sqrt{2})} (x - \sqrt{2})(x^2 - 2) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

**فانم اجازه!** در عبارت  $x^2 - 2$  که دو تا جمله، مربع کامل نیست، فقط  $x^2$  مربع کامله، پس چرا و چه طوری از اتحاد مزدوج استفاده کردید؟  
 پاسخ: باز بی‌دقتی کردی! فقط به ظاهر توجه کردی و از اون سؤال‌ها پرسیدی!  
 مگه نمی‌شه ۲ رو به صورت  $(\sqrt{2})^2$  نوشت و در واقع گفت که ۲ مربع عدد  $\sqrt{2}$  هست؟ پس یعنی عبارت ما به شکل  $x^2 - (\sqrt{2})^2$  هست.  
 مربع کامل فقط نباید مربع اعداد صحیح باشه، پس بقیه عددها، مگه عدد نیستن!؟

۱ ۵۶

$$a(a-2)(a-3) - \underbrace{4a + 8}_{\text{فاکتور از } -4} = a(a-2)(a-3) - 4(a-2) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (a-2)} (a-2)(a(a-3) - 4) = (a-2)(a^2 - 3a - 4)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (a-2)(a-4)(a+1)$$

۴ ۵۷

$$(x^2 - 6x - 4)^2 - \underbrace{144}_{12^2} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12) = (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x-4)(x-8)(x+2)$$

۴ ۵۸

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 \xrightarrow{\text{اتحاد تفاضل مکعب دوجمله ای}} (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2(x^2+1) + 1)$$

فاکتور از  $x^2$  اتحاد مزدوج

با کمی دقت در عبارت داده شده، خواهیم دید که اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای داریم. پس به جای این که مقدار  $x$  را در عبارت داده شده قرار دهیم و یک سری محاسبات طولانی و سخت انجام دهیم که امکان اشتباه هم زیاد است، مثل همیشه ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم، بعد مقدار  $x$  را در آن قرار می‌دهیم:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 \xrightarrow{x=10002} (10002-2)^3 = 10000^3 = (10^4)^3 = 10^{12}$$

۲ ۶۰

$$a(a-3)(a-5) - \underbrace{6a + 18}_{\text{فاکتور از } -6} = a(a-3)(a-5) - 6(a-3) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (a-3)} (a-3)(a^2 - 5a - 6) \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (a-3)(a+1)(a-6)$$

۳ ۶۱

$$a(a-3)(a-4) - \underbrace{12a + 36}_{\text{فاکتور از } -12} = a(a-3)(a-4) - 12(a-3) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (a-3)} (a-3)(a(a-4) - 12)$$

$$= (a-3)(a^2 - 4a - 12) \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (a-3)(a+2)(a-6)$$

۳ ۶۲

$$\begin{cases} d^2 - c^2 = 77 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (d-c)(d+c) = 77 \\ c-d = -7 \Rightarrow d-c = 7 \end{cases} \Rightarrow 7(d+c) = 77 \Rightarrow d+c = 11 \Rightarrow (c+d)^2 = 11^2 = 121$$

۳ ۶۳

$$4x^2 - y^2 = -240 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2x-y)(2x+y) = -240 \xrightarrow{2x+y=8} (2x-y) = \frac{-240}{8} = -30 \Rightarrow (2x-y)^3 = (-30)^3 = -27000$$

۱ ۶۴

$$a(a+2) + 2b(b+1) + 2ab = a^2 + 2a + 2b^2 + 2b + 2ab \quad (*)$$

در صورت سؤال، رابطه  $a + 2b = 3$  داده شده است، پس باید در عبارت  $(*)$ ،  $a + 2b$  را ایجاد کنیم:

$$(*) = \underbrace{a^2 + 2ab + 2b^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} + \underbrace{2a + 2b}_{\text{فاکتور از ۲}} = (a + 2b)^2 + 2(a + 2b) \stackrel{a+2b=3}{=} 3^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

۱ ۶۵

$$2a^2 - b^2 = 91 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2a - b)(2a + b) = 91 \xrightarrow{2a+b=7} (2a - b)(7) = 91 \Rightarrow 2a - b = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ 2a - b = 13 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = 20 \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{2a+b=7} 2(5) + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 10 = -3 \Rightarrow a + b = 5 - 3 = 2$$

اول از  $x^3$  که در هر دو جمله مشترک است، فاکتور می‌گیریم:

۴ ۶۶

$$x^3(x^{16} - 2^8) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} x^3(x^8 - 2^4)(x^8 + 2^4) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} x^3(x^4 - 2^2)(x^4 + 2^2)(x^8 + 16)$$

$$\stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} x^3(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 4)(x^8 + 16) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} x^3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)(x^4 + 4)(x^8 + 16)$$

پس تنها عامل  $x - 2$  در تجزیه آن وجود ندارد.

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

۴ ۶۷

$$(16x^8y^8 + 8a^2x^2y^4 + a^4)(4x^2y^4 - a^2)^2 = (4x^2y^4 + a^2)^2(4x^2y^4 - a^2)^2$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$= ((4x^2y^4 + a^2)(4x^2y^4 - a^2))^2 \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} ((4x^2y^4)^2 - (a^2)^2) = (16x^4y^8 - a^4)^2$$

حال مقادیر داده شده را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\text{حاصل} = \left(16 \left(\frac{1}{2}\right)^4 (-2)^8 - 3^4\right)^2 = \left(16 \times \frac{1}{16} \times 256 - 81\right)^2 = 175^2 = A^2 \Rightarrow A = 175 = 25 \times 7$$

پس  $A$  مضرب ۲۵ است.

۱ ۶۸

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (*)$$

از فرض تست استفاده کرده و مقادیری که برای محاسبه فوق نیاز داریم، پیدا می‌کنیم:

$$a^3 - b^3 = a - b \xrightarrow{\text{اتحاد جایی و لاغر}} (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a - b$$

چون طبق فرض  $a \neq b$  است، می‌توانیم  $a - b$  را از طرفین تساوی حذف کنیم:

$$a^2 + ab + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 - ab \quad (**)$$

حال داریم:

$$(*) \text{ و } (**)\Rightarrow (a - b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{1-ab} - 2ab = 1 - ab - 2ab = 1 - 3ab$$

**شانم اجازه!** تو این مدل سؤال‌ها از کجا بفهمیم، باید چی رو به دست بیاریم؟ همیشه روند کار رو به توضیحی بدین؟

**پاسخ:** امان از دست شما! یعنی اصلاً نمی‌فویین به فودتون زحمت بدین یه کم فکر کنید. پس لاقول فوب گوش کن ببین چی میگم. توضیح کلی رو همراه با مراحل حل همین تست، هم‌زمان میگم تا فوب، برات با بیفته. اول به عبارتی که حاصل اون فواسته شده، دقت می‌کنیم، یعنی  $(a - b)^2$ ، آگه قابل ساده شدن بود، اول ساده شده اون رو می‌نویسیم، یعنی به صورت  $a^2 - 2ab + b^2$ ، آگه هم که نه، می‌ذاریم همون طوری بمونم. بعد به مفروضات سؤال نگاه می‌کنیم، باید از اون‌ها برای به دست آوردن جواب استفاده کنیم. پس اون مفروضات رو به شکلی می‌نویسیم که عبارت فواسته شده یا قسمتی از عبارت، در اون‌ها ایبار شه، یعنی  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a - b$  و در نتیجه  $a^2 + ab + b^2 = 1$ . حالا مقدار  $a^2 + b^2$  رو که در فواسته سؤال هم وجود داره، داریم. اکنون با قرار دادن داره‌ها، یعنی  $a^2 + b^2 = 1 - ab$  در عبارت فواسته شده به مطلوب سؤال می‌رسیم، یعنی  $(a - b)^2 = 1 - ab - 2ab = 1 - 3ab$ .

چون یکی از جمله‌ها  $3a$  و دیگری  $-2$  است، پس جمله ثابت بسط، همان جمله آخر می‌شود که برابر توان ۶، عدد  $-2$  است. در نتیجه:

۴ ۶۹

$$\text{جمله ثابت} = (-2)^6 = 64$$

۲ ۷۰

بسط عبارت  $(x - y)^6$  را می‌نویسیم:

$$(x - y)^6 = x^6 + 6x^5(-y) + 15x^4(-y)^2 + 20x^3(-y)^3 + 15x^2(-y)^4 + 6x(-y)^5 + (-y)^6$$

$$= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

پس ضریب جمله  $xy^5$  برابر  $-6$  است.

$$15 - 1 = 14$$

می‌دانیم مجموع اعداد هر سطر در مثلث خیام برابر  $1 - \text{شماره سطر}$  است. در نتیجه:

۲ ۷۱