

به نام پروردگار مهربان



حسابان ۲

ریاضی

دوازدهم

آموزش و مرور ویژه امتحان نهایی

میثم خرمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

این کتاب رو، با همه وجودم به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم تا شاید بخش کوچکی (در حد میل می‌کند به صفر!) از زحماتشون رو جبران کرده باشم.



مقدمه

دوستان عزیز سلام!

بالاخره رسیدیم به سال آخر. این جمله می‌تونه خبر خوشی باشه اگه به امید خدا، دوتا موفقیت باهاش همراه بشه! اولی در امتحان نهایی و دومی در کنکور. البته من مطمئنم شما دوستان عزیزم، در هر دو امتحان، سربلند میشید! پس تبریک می‌گم که رسیدین به سال آخر. از اون جایی که می‌دونم تمرکزتون بیشتر روی کنکوره، من به همراه دوستانم در انتشارات مهروماه تصمیم گرفتیم که امسال هم با کتاب لقمه که صرفاً با هدف امتحان نهایی نوشته شده، در خدمتتون باشیم! یعنی همین کتابی که الان دستتونه! تمرکزمونم گذاشتیم روی کتاب درسی و سؤالات امتحان نهایی سال‌های گذشته با یه عالمه چاشنی‌های به درد بخور.

تأکید می‌کنم که اول جزوه‌ها و گفته‌های دیران محترمتون رو بخونین و خوب یاد بگیرین و بعدش بیاین سراغ این لقمه.

آرزوی بهترین‌ها رو براتون دارم.

تشکر و قدردانی

قدردان زحمات همه عزیزانی هستیم که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند!

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
 - جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیخته شورای تألیف انتشارات
 - جناب آقای عباس اشرفی مدیر باتدبیر گروه ریاضی
 - سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری گروه ریاضی
 - سرکار خانم‌ها زهرا انیشه، کبری ملکی و راحله فریدون‌نژاد ویراستارهای علمی
 - گروه تولید خستگی‌ناپذیر انتشارات به مدیریت سرکار خانم سیاوشی
 - جناب آقای میلاد صفایی (مدیر فنی)، خانم مژگان داودی (صفحه‌آرا)، خانم مریم صابری برون (رسام) و خانم مهناز ستاری (تایپیست)
 - گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای فرهادی
 - جناب آقای تایماز کاویانی، طراح گرافیک و جناب آقای حسام طلایی طراح جلد
- و همه عزیزانی که در تهیه این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما

میثم خرّمی

فهرست

- | | | |
|-----|---------------------------------|-------|
| ۷ | تابع | فصل ۱ |
| ۶۵ | مثلثات | فصل ۲ |
| ۹۹ | حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت | فصل ۳ |
| ۱۴۹ | مشتق | فصل ۴ |
| ۲۰۵ | کاربردهای مشتق | فصل ۵ |
| ۲۶۵ | پیوست ۱: فرمول نامه | |
| ۲۸۱ | پیوست ۲: امتحان نهایی | |

فصل چهارم

مشتق

مشتق

درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

- ◀ یادآوری معادله خط
- ◀ خط مماس
- ◀ تعریف مشتق
- ◀ فرمول‌های مشتق
- ◀ مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری)
- ◀ مشتق مرتبه دوم

مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس دوم

- ◀ مشتق‌پذیری
- ◀ بررسی نقاط دسته اول (ناپیوستگی‌ها)
- ◀ بررسی نقاط دسته دوم (پیوسته اما مشتق‌ناپذیر)
- ◀ دامنه تابع مشتق
- ◀ مشتق‌پذیری روی بازه
- ◀ خط مماس و قائم

درس سوم

آهنگ متوسط تغییر و
آهنگ لحظه‌ای تغییر

- ◀ آهنگ تغییر



فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از خط L باشند؛
در این صورت:

$$\begin{cases} \text{شیب خط } L = m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \text{معادله خط } L = y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$

توجه کنید که در معادله خط L ، به جای x_A و y_A به ترتیب می‌توان
 x_B و y_B را قرار داد.

Δx و Δy را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta y = y_B - y_A = \text{تغییرات عمودی خط } L \\ \Delta x = x_B - x_A = \text{تغییرات افقی خط } L \end{cases}$$

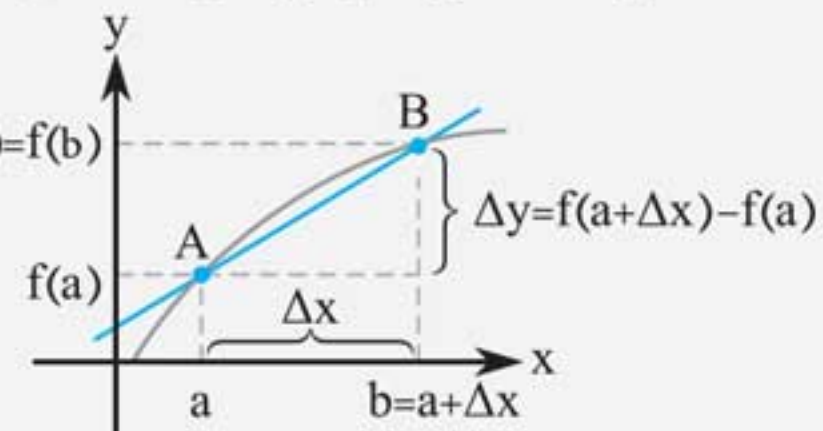
در این صورت می‌توان گفت:

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

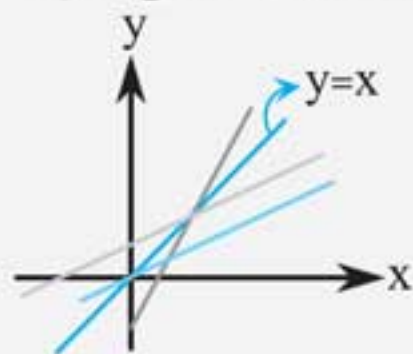
پیشنهاد: فرض کنید دو نقطه A و B روی منحنی تابع
 $y = f(x)$ قرار داشته باشند، در این صورت مختصات آن‌ها را
می‌توان به شکل $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ نمایش داد.
با توجه به تعریف Δx می‌توان گفت:

$$\Delta x = b - a \Rightarrow b = a + \Delta x$$

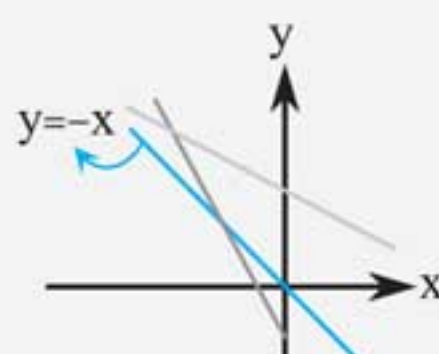
بنابراین مختصات A و B به صورت $A(a, f(a))$ و $B(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ خواهد بود؛ در این صورت شیب خط گذرنده (قاطع) از این دو نقطه برابر است با:

$$m = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$


◀ بهتر است نمودار دو خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) با شیب ۱ (مثبت) و $y = -x$ (نیمساز ناحیه دوم و چهارم) با شیب -1 (منفی) را به خاطر بسپارید. در این صورت هر خط که شبیه $y = x$ باشد شیب مثبت و هر خط که شبیه $y = -x$ باشد، شیب منفی دارد.

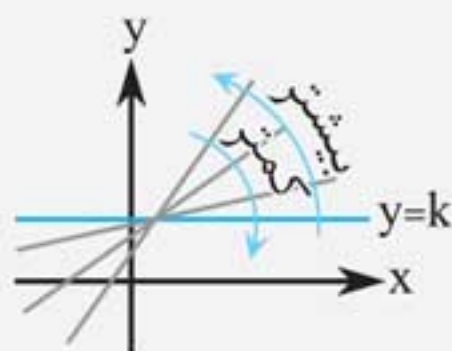


خطوط با شیب مثبت

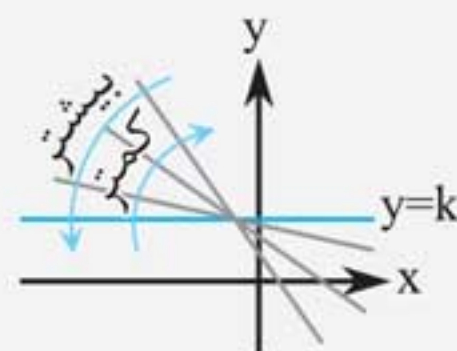


خطوط با شیب منفی

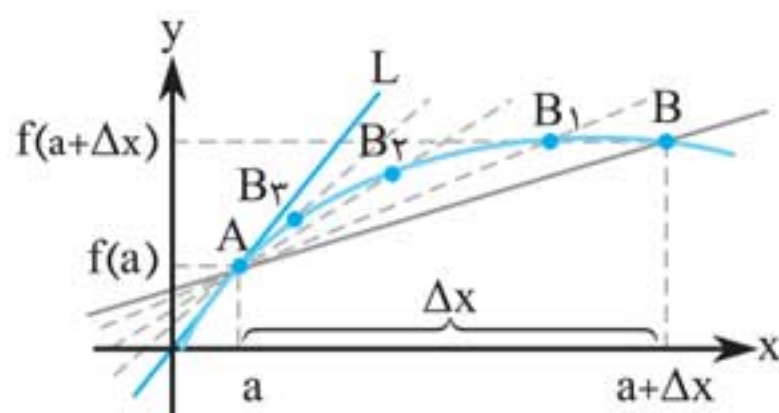
◀ در نمودار هندسی خطوط با شیب مثبت، هرچه نمودار به خط افقی ($y = k$ با شیب صفر) نزدیک تر شود، شیب آن کمتر و هرچه از خط افقی دور تر شود، شیب آن بیشتر می شود. درباره خطوط با شیب منفی، این نکته برعکس است.



خطوط با شیب مثبت



خطوط با شیب منفی



فرض کنید نقطه $A(a, f(a))$ روی منحنی تابع $f(x)$ قرار داشته و ثابت باشد (شکل بالا)؛ در این صورت اگر $B(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ نقطه دیگری از این تابع باشد، شیب خط قاطع BA به صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

اگر مقدار Δx را کوچک و کوچک تر کنیم، نقطه B روی نمودار تابع $f(x)$ حرکت می کند و کم کم به نقطه A نزدیک می شود (نقاط B_1, B_2, \dots در شکل بالا) و خطوط قاطع AB_1, AB_2, \dots نیز به خط L که در نقطه A بر تابع $f(x)$ مماس است، نزدیک و نزدیک تر می شوند. دقت کنید که شیب همه این خطوط قاطع از همان رابطه قبل یعنی

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به دست می آید، با این تفاوت که مقدار Δx در

هریک از نقاط B_i با دیگری متفاوت است؛ بنابراین شیب خط L (خط مماس)، حد شیب های خطوط قاطع AB_i است، به شرطی که B_i ها به قدر کافی به A نزدیک شده باشند.

با این حد و نحوه محاسبه آن در وعده بعدی آشنا خواهیم شد؛ پس شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر است با:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنه D_f باشد. تابع مشتق $f'(x)$ یعنی $f'(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

این همان تعریف اول مشتق است که به جای نقطه مشخص a ، x قرار گرفته است. طبق فرمول‌های گفته شده برای مشتق، تابع مشتق برخی توابع را فراگرفتیم. مثلاً می‌دانیم تابع مشتق برای تابع

$f(x) = \sqrt{x}$ به صورت $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است. دامنه تابع مشتق را

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{f'} = \{x \in D_f : f'(x) \text{ موجود باشد}\}$$

تذکر: توابع چند جمله‌ای، در همه نقاط حقیقی، پیوسته و مشتق پذیر (حتی دو بار مشتق پذیر) هستند؛ یعنی برای توابع چند جمله‌ای داریم:

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

چاشنی: برای راحتی تشخیص نقاط مشتق ناپذیری، برخی از این نقاط را به خاطر بسپارید که حتماً در صورت مشاهده آنها باید بررسی شوند.

۱ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$

۲ نقاطی مانند $x = a$ که به صورت $|x - a|^1$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط گوشه‌ای هستند.

۳ نقاطی مانند $x = a$ که به صورت $\sqrt[3]{(x-a)^2}$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط بازگشتی هستند.

۴ نقاطی مانند $x = a$ که به صورت $\sqrt[3]{x-a}$ ظاهر می‌شوند، مشکوک به نقاط عطف قائم هستند.

۵ نقاط مرزی توابع چندضابطه‌ای

۶ نقاطی که زیر رادیکال فرجه زوج را صفر می‌کنند.

مثال: دامنه مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را بیابید.

پاسخ $D_f = [0, +\infty)$ است. با توجه به تابع مشتق یعنی

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتق‌پذیر نیست، $x = 0$ است (زیرا مخرج را صفر می‌کند) و در

بقیه نقاط بازه $[0, +\infty)$ مقدار $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ تعریف شده و مشخص

است. همچنین توجه کنید که چون $f(x)$ در 0^- تعریف نشده

است، اصلاً در $x = 0$ پیوسته نیست و بنابراین $f'(0)$ موجود

$$D_{f'} = [0, +\infty) - \{0\} = (0, +\infty)$$

نیست؛ پس:

مثال: دامنه مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را بیابید.

پاسخ تابع به صورت $f(x) = |(x-2)(x+2)|$ است. با توجه به

چاشنی گفته شده $x = 2$ و $x = -2$ مشکوک به گوشه‌ای بودن هستند.

بررسی $x = 2$:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|(x-2)(x+2)|}{x-2} \begin{cases} x \rightarrow 2^+ \rightarrow f'_+(2) = 4 \\ x \rightarrow 2^- \rightarrow f'_-(2) = -4 \end{cases}$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|(x-2)(x+2)| - 0}{x+2} \quad \text{بررسی } x = -2:$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow (-2)^+ \rightarrow f'_+(-2) = -4 \\ x \rightarrow (-2)^- \rightarrow f'_-(-2) = +4 \end{array}$$

پس هر دو نقطه $x = 2$ ، $x = -2$ گوشه هستند، بنابراین $f(x)$ در این نقاط مشتق پذیر نیست؛ پس:

$$D_{f'} = D_f - \{2, -2\} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

تذکره: در مسئله بالا، در تابع $f(x)$ بقیه نقاط مشتق پذیر است، زیرا علامت داخل قدرمطلق این تابع با توجه به جدول تعیین علامت در بقیه نقاط، در اطراف آن نقاط ثابت است؛ بنابراین قدرمطلق از بین می رود و تابع به چند جمله ای تبدیل می شود که در همه نقاط به جز 2 و -2 مشتق پذیر است.

وعدۀ ۱۱



مشتق پذیری روی بازه

الف تابع $f(x)$ روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

ب تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر بوده و در $x = a$ مشتق راست و در $x = b$ مشتق چپ داشته باشد.

پ تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b)$ مشتق پذیر است، هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر بوده و در $x = a$ مشتق راست داشته باشد (به مشتق چپ در $x = b$ نیاز نیست).

ت تابع $f(x)$ روی بازه $(a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر بوده و در $x = b$ مشتق چپ داشته باشد (به مشتق راست در $x = a$ نیاز نیست).

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را روی بازه $[1, 9]$ بررسی کنید.

پاسخ می‌دانیم \sqrt{x} در $x = 0$ مشتق ندارد و $D_{f'} = (0, +\infty)$ ؛ بنابراین در همه نقاط بازه $(1, 9)$ مشتق پذیر است. همچنین در $x = 1$ و $x = 9$ که ابتدا و انتهای بازه هستند نیز از هر دو طرف مشتق پذیر است، بنابراین مشتق راست عدد ۱ و مشتق چپ عدد ۹ نیز موجود است؛ پس تابع $f(x)$ روی این بازه مشتق پذیر است.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = [x]$ را روی بازه $[1, 2)$ بررسی کنید.

پاسخ توابع شامل براکت، در نقاطی مشکوک به مشتق ناپذیری هستند که داخل براکت عدد صحیح شود. در بازه $(1, 2)$ هیچ نقطه‌ای داخل $[x]$ را عدد صحیح نمی‌کند، پس فقط باید مشتق راست تابع $f(x)$ را در $x = 1$ بررسی کنیم:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - [1]}{x - 1} = \frac{[1^+] - [1]}{0^+} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0.$$

از آنجایی که $f'_+(1)$ عدد مشخصی شده است، پس $f'_+(1)$ موجود است؛ بنابراین $f(x)$ روی بازه $[1, 2)$ مشتق پذیر است. **تذکر:** تابع $[x]$ در $x = 1$ مشتق پذیر نیست؛ چون $f'_-(1)$ موجود نیست. اما توجه کنید که تعریف مشتق پذیری روی بازه فقط ایجاب می‌کند که $[x]$ از راست در $x = 1$ مشتق پذیر باشد.

پیوست ۱

فرمول‌نامه

ویژه امتحان نهایی

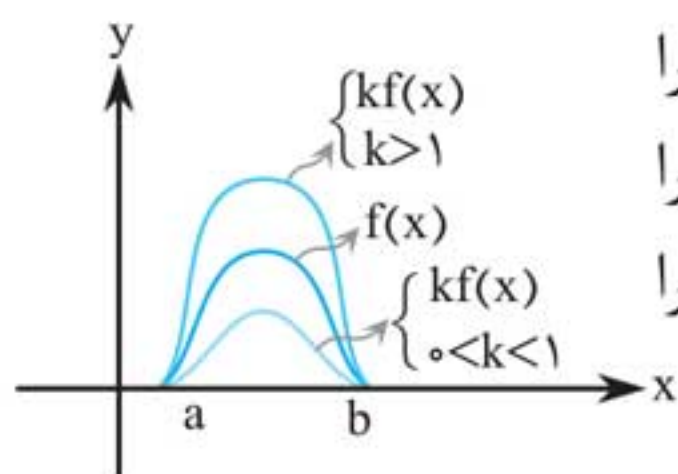
تابع

۱ انقباض و انبساط عمودی ($y = kf(x)$):

برای رسم نمودار $y = kf(x)$ کافی است عرض نقاط تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

الف $k > 1$: در این صورت نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی تابع $f(x)$ به دست می آید.

ب $0 < k < 1$: در این صورت نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی تابع $f(x)$ به دست می آید.



پ $k < 0$: در این صورت ابتدا منفی را

نادیده می گیریم و انبساط یا انقباض را

انجام می دهیم؛ سپس نمودار حاصل را

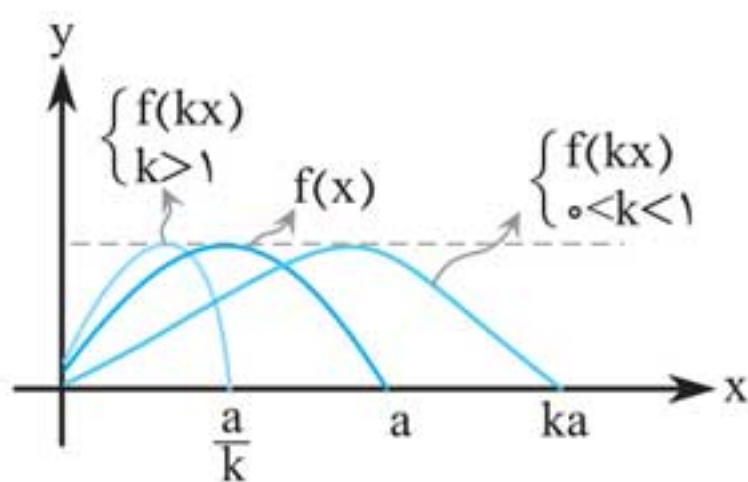
نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

۲ انقباض و انبساط افقی ($y = f(kx)$):

برای رسم نمودار $y = f(kx)$ کافی است طول همه نقاط تابع $f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

الف $k > 1$: در این صورت نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی تابع $f(x)$ به دست می آید.

ب $0 < k < 1$: در این صورت نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی تابع $f(x)$ به دست می آید.



پ k عددی منفی باشد: در این صورت ابتدا منفی را نادیده می‌گیریم و انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم؛ سپس نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

۳ تابع چند جمله‌ای:

تابع $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن a_0, a_1, \dots, a_n اعدادی حقیقی و $a_n \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ است، تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

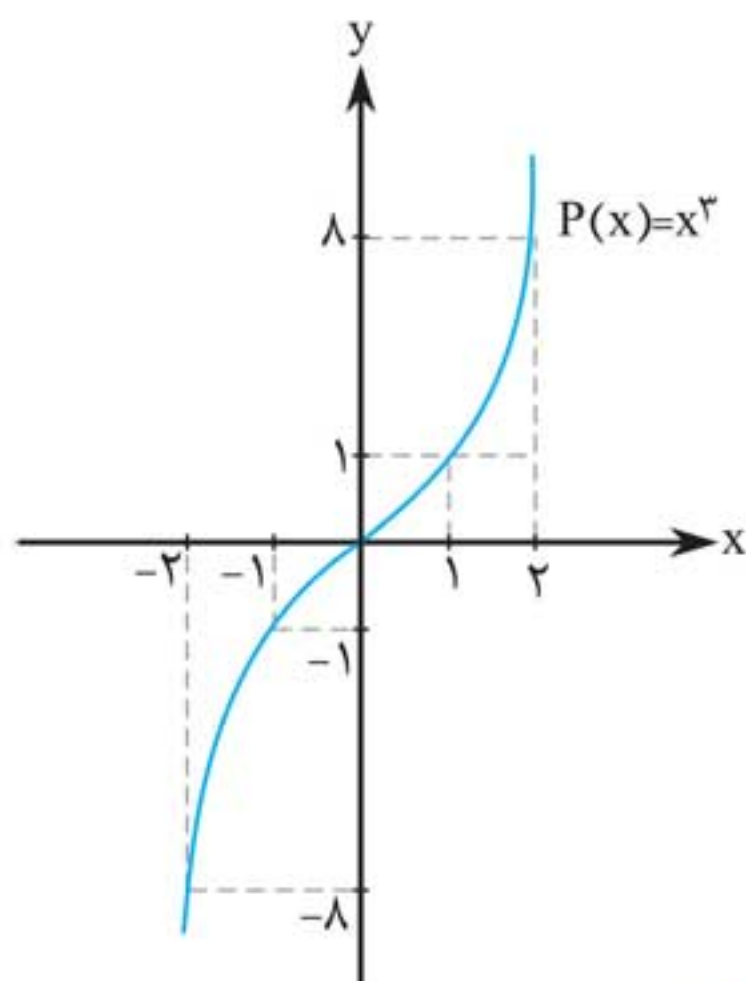
الف $p(x) = c$ ($c \neq 0$) چند جمله‌ای از درجه صفر است.

برای $p(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.

ب $p(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) چند جمله‌ای درجه ۱ است.

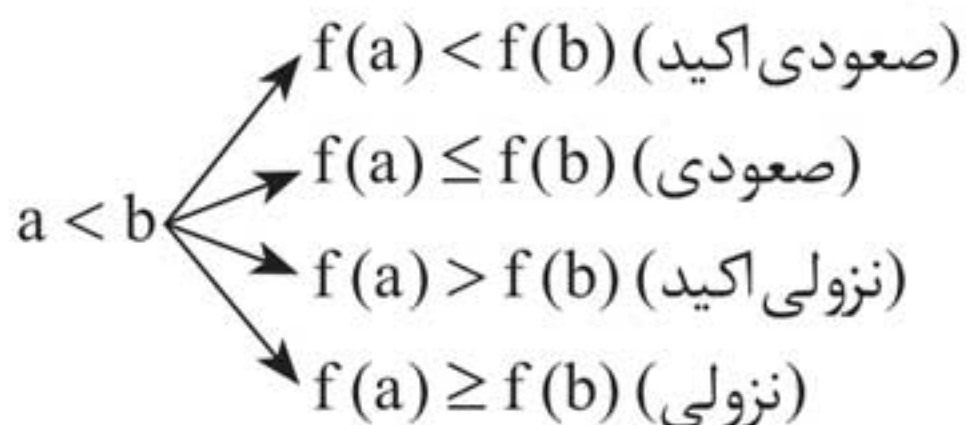
پ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) چند جمله‌ای درجه ۲ است.

ت $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) چند جمله‌ای درجه ۳ است.



ساده‌ترین تابع درجه ۳، تابع $p(x) = x^3$ است که نمودار آن به صورت صفحه مقابل است:

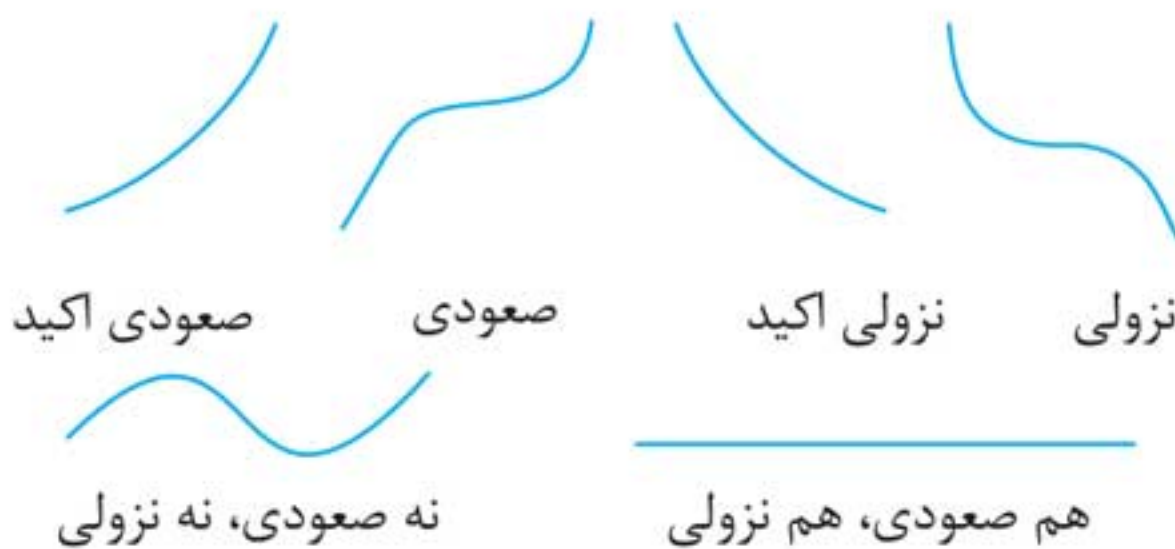
۴ یکنوایی (صعودی - نزولی):



تابعی را که در یک بازه، صعودی یا نزولی باشد، **یکنوا** می‌نامیم و اگر روی این بازه، صعودی یا نزولی اکید باشد، آن تابع را **یکنوای اکید** روی آن بازه می‌نامیم.

تابعی که در قسمت‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در قسمت‌هایی نزولی باشد، در دامنه‌اش **نه صعودی است و نه نزولی**.

تابع ثابت تنها تابعی است که **هم صعودی است و هم نزولی**.



۵ بخش پذیری و قضیه تقسیم:

الف باقی‌مانده تقسیم تابع چندجمله‌ای $P(x)$ به چندجمله‌ای درجه یک $ax + b$ برابر است با:

$$r = p\left(\frac{-b}{a}\right)$$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \xrightarrow{\text{در } p(x)} r = p\left(\frac{-b}{a}\right)$$

ب چند اتحاد مهم:

$$① \quad x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

این اتحاد برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

$$② \quad x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1})$$

این اتحاد فقط برای عدد طبیعی و فرد n ، برقرار است.

$$③ \quad x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x - a^n)$$

این اتحاد فقط برای عدد طبیعی و زوج n برقرار است.

مثلات

۱ تناوب و تابع تنازانت:

الف تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت T طوری یافت شود که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب اصلی تابع $f(x)$ می‌نامیم.

ب برای دو تابع $f(x) = a \sin(bx) + c$ و $f(x) = a \cos(bx) + c$

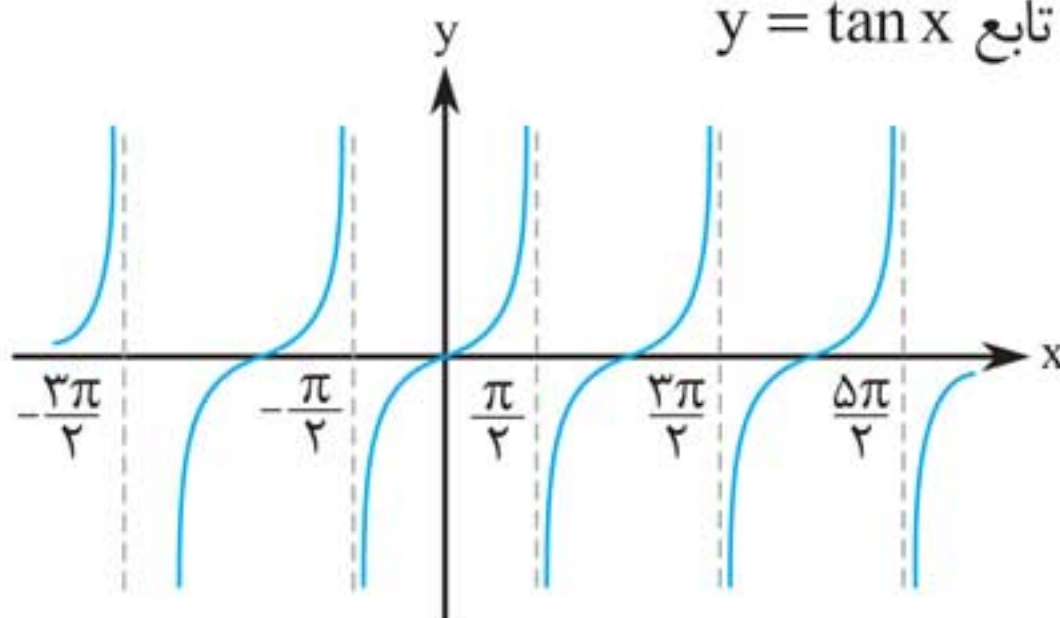
$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \max = |a| + c \quad \min = -|a| + c \quad \text{داریم:}$$

پ اگر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب (T) توابع $f(x) = a \sin(bx) + c$

و $f(x) = a \cos(bx) + c$ را داشته باشیم، می‌توانیم ضرایب a ، b و c این توابع را مشخص کنیم:

$$|b| = \frac{2\pi}{T} \quad |a| = \frac{|\max - \min|}{2} \quad c = \frac{\max + \min}{2}$$

ت نمودار تابع $y = \tan x$



$$\begin{cases} D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

دوره تناوب تابع $T = \pi$ است. به طور کلی دوره تناوب تابع

$$T = \frac{\pi}{|b|} \quad f(x) = a \tan(bx) + c \text{ برابر است با:}$$

تابع $y = \tan x$ در هر چهار ناحیه، صعودی اکید است، ولی در دامنه‌اش غیریکنواست.

۲ معادلات مثلثاتی:

الف $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

ب $\cos x = \cos(\alpha) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

ج $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

۳ نسبت‌های کمان $\alpha \pm \beta$:

الف $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ حالت خاص:

ب $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ حالت خاص: