مقدمه
ویرایش جدید

«در یک سـمینار رموز موفقیت، سخنران از حضار پرسید: برادران رایت هرگز تسـلیم شدند؟ حضار فریاد زدند: نه! نشدند. سخنران پرسـید: توماس ادیسون تسلیم شـد؟ حضار: نه! نشد. سخنران پرسید: لانس آرمسترانگ تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران برای چهارمین بار پرسـید: مارک راسـل تسلیم شد؟ مدتی سـکوت در کلاس حاکم شد، سـپس یکی از حاضران پرسید: مارک راسل دیگر کیست؟ ما تا حالا اسم او را نشنیده‌ایم! سخنران گفت: حق دارید که اسمش را نشنیده باشید، چون تسلیم شد!»

این داسـتان رو نوشـتم که چند تا نکته رو بهت بگم. وقتی هنوز یک سال و اندی تا کنکور باقی مونده و تو مشغول خوندن این کتاب تست هستی، معلوم می‌شه جزء دانش‌آموزای خوب و هدفمند هستی و آرزوی رفتن به دانشگاه‌های بزرگ رو در سر داری.
در حالی که خیلی از رقیبای تو، در خواب سنگینی به سر می‌برن و هرچی بهشون می‌گی شروع کن می‌گن کو تا کنکور! هنوز وقت هست! عرب‌ها یه ضرب‌المثل دارن می‌گن: «شترت را به خدا بسپار ولی افسارش را به درختی ببند.»؛ یعنی امیدت به خدا باشه ولی خودت هم حرکتی، زحمتی، کاری ... .
برگردیم سراغ خودت:

بدان و آگاه باش که خوب موقعی شـروع کردی و اگه با همین فرمون تا انتها بری و تسـلیم نشـی، به یاری خدا، بهترین رشـته رو توی برترین دانشـگاه‌ها قبول می‌شـی. دقت کن وضعیت الانت مهم نیسـت! حتی اگه تا حالا ریاضی رو نفهمیدی و از فرمول‌هاش سردرنیاوردی، به کمک این کتاب به راحتی از پَسِش برمیای. یادت باشه تو این مسیر پرفراز و نشیب تا کنکور، خسته می‌شی، می‌بُری و از همه بدتر شاید ناامید شی! اما اینو فراموش نکن که هیچ‌وقت نباید تسلیم ناامیدی بشی! تسلیم شدن رو کلاً از ذهنت پاک کن. برای این‌که بتونی این مسیر رو تا انتها بری، با این کتاب همراهتیم.این کتاب آخرشه! باور کن! بهش اعتماد کن و ریاضی‌ات رو به ما بسپار.

ویژگی‌های این کتاب

۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.

۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو یه جا بخونی!

۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.

۴ توی محدودهٔ مطالب کتاب درسـی، عمـق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو بـرات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.

۵ هیـچ مطلبـی رو بدون مثال برات باقی نذاشـتیم. همهٔ مثال‌هامون هم از فیلتر اسـتادای عالی و باتجربه گذشـتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.

۶ پُر از تسـت‌های دوست‌داشتنیه! تسـت‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سکته نکنی ☺ و از ریاضی فراری نشی.

۷ همهٔ تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدیده.

۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالیه! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤالا گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامهٔ این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!

۹ مثل کتاب درسـی، تست‌هامون رویکرد مسـائل واقعی گرفتن، مثلاً وقتی می‌خوایم فاصلهٔ دو نقطه رو بهت یاد بدیم، از فاصلهٔ نیمکت بین تو و دوستت استفاده کردیم.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه؛ اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوریه پس کتاب ما متخصص قلبه! 💙

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم.
توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم.
«راهبردها» برای کسایی که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامهٔ هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. فصل که تموم میشه یه آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. انتهای کتاب پاسخ تشریحی همهٔ تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌نامهٔ کلیدی.
تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد بپرسید.
سؤالات سخت رو با علامت ★ مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سؤالات بروید.

راهنمای استفاده از کتاب

خوب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی تونی یه سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامهٔ تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بلد نیستی.
اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن؛ مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

اول؛ باید از آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات تشکر کنم که واقعاً مثل رئیس سازمان استاندارد کشور (!) می‌مونه، یعنی تا کتابی رو به لحاظ محتوایی و ظاهری در حد استانداردهای مهروماه تشخیص نده، اجازهٔ چاپ بهش نمی‌ده، ممنونم که هستید و کیفیت رو بالا نگه می‌دارید.
دوم؛ باید از آقای محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف تشکر کنم که با توجه به تجربهٔ ۳۰سالشون در زمینهٔ تألیف، جمعی از بهترین اساتید کشور رو برای نوشتن کتاب دور هم جمع کردن؛ استادایی که هر کدومشون دنیایی از معلومات هستند؛ استاد نصیر کریمی، دبیر دبیرستان فرزانگان تهران (تیزهوشان مادر) و استاد تقی‌زاده، مدیرگروه ریاضی دبیرستان البرز.
سوم؛ از استادم جناب آقای بهمن اصلاح‌پذیر -که به حق یکی از بزرگ مردان آموزش ریاضی کشور هستند- به خاطر هم‌فکری‌ها و جلسات متعددی که با دبیران و مؤلفان ترتیب دادند و در حقیقت هدایت علمی کتاب رو به عهده داشتند و از استاد گرانقدر جناب آقای هوشنگ نظری -از با سابقه‌ترین دبیران کشور- که ریزبینانه کتاب رو بررسی کردند و پیشنهادهای سازنده‌ای رو دادند.

این کتاب مرهون زحمات و تلاش‌های این دوستان است:

آقای احسان لعل مسئول ویراستاری گروه ریاضی و خانم‌ها مهرنوش رضوی و آزاده غنی‌فرد ویراستاران علمی کتاب

آقای محسن فرهادی مدیر گروه هنری

آقای مجتبی حسنی صفحه‌آرای کتاب

آقای امیر انوشه مدیریت سایت و آقایان عماد ولدی و حمیدرضا پیام واحد انفورماتیک و تبلیغات، بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرم به آی‌دی @ashrafii.official مقابل ارسال نمایند.

مدیر گروه ریاضی

عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای محمد گودرزی که از نظرات ارزندهٔ آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

۱. محمود امیری ۲. محمدرضا بیگی ۳. جهانبخش نیکنام

فهرست

فصل اول هندسه تحلیلی و جبر ۷

فصل دوم هندسه ۳۷

فصل سوم تابع ۶۵

فصل چهارم مثلثات ۱۰۱

فصل پنجم توابع نمایی و لگاریتمی ۱۲۱

فصل ششم حد و پیوستگی ۱۴۳

فصل هفتم آمار و احتمال ۱۶۹

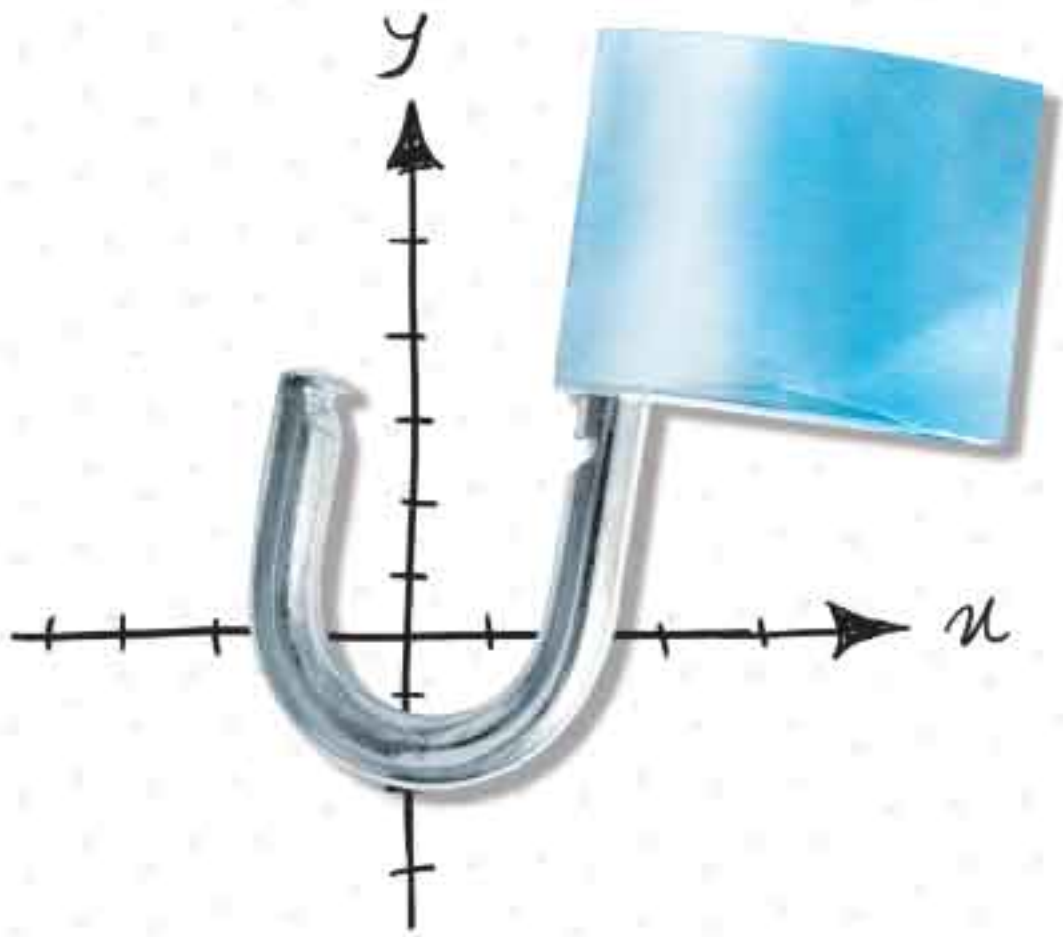
پاسخنامه تشریحی ۱۸۵

پاسخنامه کلیدی ۳۰۵

فصل اوّل

هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیهٔ مباحث ریاضی.
این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شه (که قبلاً تو کتاب سال چهارم بود). کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد تابع و معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شه؛ همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سوال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تر می‌شه. آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونید، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.



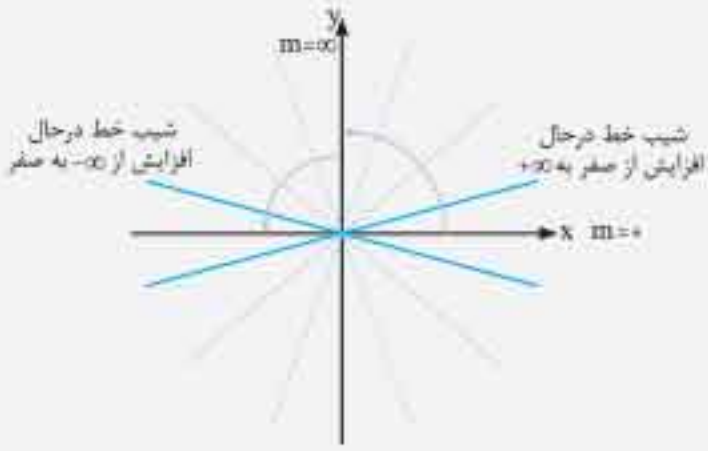
یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادلهٔ خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و... آشنا شدید. در این بخش به‌طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

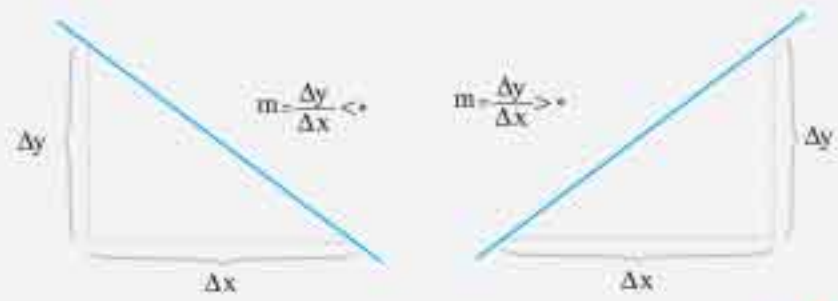
شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

الف: میزان تغییرات y به تغییرات x را **شیب خط** گویند. در واقع اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطه روی خط باشند $(x_1 \neq x_2)$ به $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ شیب خط گذرا از دو نقطهٔ A و B گویند.

ب: اگر معادلهٔ خط به صورت $y=ax+b$ باشد، **شیب خط** a است.

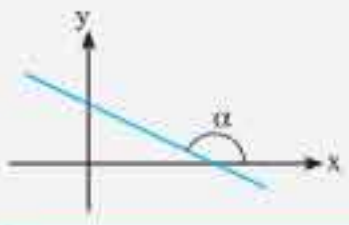
پ: اگر معادلهٔ خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد، **شیب خط** $-\frac{a}{b}$ است.





ت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، **شیب خط** نامیده می‌شود.

$$\tan\alpha = m$$

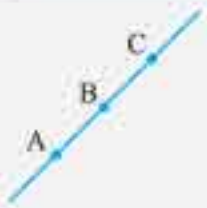


ث: شیب خط $x=a$ تعریف نشده و شیب خط $y=b$ صفر است.

نکته

شرط آن‌که سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست باشند، آن است که:

$$m_{AB}=m_{AC}=m_{BC}$$



معادلهٔ خط

برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط، دو روش داریم:

۱ با داشتن شیب و یک نقطه: معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از: $y-y_0=m(x-x_0)$

۲ با داشتن دو نقطه: هرگاه دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_0,y_0)$ را داشته باشیم $(x_0 \neq x_1)$، می‌توانیم به کمک رابطهٔ $m_{AB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ **شیب** خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادلهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ ضابطهٔ خط را بیابیم.

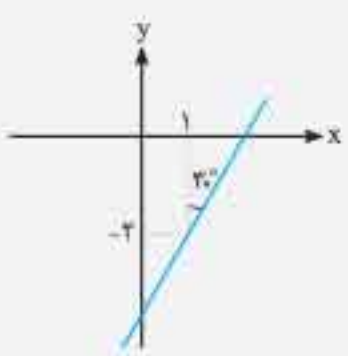
نکته

۱ می‌توان معادلهٔ خط را به‌صورت $y=ax+b$ فرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطهٔ (x_0,y_0) و (x_1,y_1) و تشکیل دستگاه، a و b را یافت. به این ترتیب ضابطهٔ $y=ax+b$ به دست می‌آید.

۲ معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (a,y_2) و (a,y_1)، $(y_1 \neq y_2)$ می‌گذرد، برابر است با $x=a$.

۳ معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (x_1,b) و (x_2,b)، $(x_1 \neq x_2)$ می‌گذرد، برابر است با $y=b$.

مثال: عرض از مبدأ خط مقابل کدام است؟



۱) $-2\sqrt{3}+1$
۲) $-\sqrt{3}-2$
۳) $1-2\sqrt{3}$
۴) $2-2\sqrt{3}$

پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته‌شده، یک زاویه ۳۰ درجه است، بنابراین زاویهٔ دیگر ۶۰ درجه است، پس:

$$m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$y+2=\sqrt{3}(x-1) \Rightarrow y=\sqrt{3}x\underbrace{-\sqrt{3}-2}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

مثال: **خط گذرنده از دو نقطهٔ (۱,۳) و (۲,۷) محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟**

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ: قرض می‌کنیم معادلهٔ خط $y=ax+b$ است. نقاط داده‌شده را در معادلهٔ خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۱,۳)\Rightarrow y=ax+b\Rightarrow ۳=a(۱)+b\Rightarrow a+b=۳\\(۲,۷)\Rightarrow y=ax+b\Rightarrow ۷=a(۲)+b\Rightarrow ۲a+b=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=-۱\end{cases}$$

یعنی معادلهٔ خط $y=۴x-۱$ است.

این خط جایی محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y=۰$ شود. بنابراین:

$$۰=۴x-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

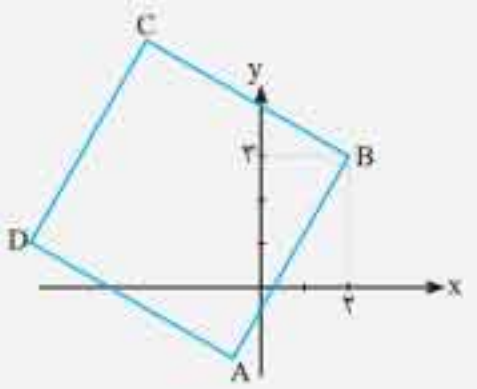
مهم

۱) دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند، یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m=m'$ باشد.

۲) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱ است، یعنی $mm'=-۱$ است. به عبارت دیگر شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است.

دقت کنید رابطهٔ $mm'=-۱$ برای **دو خط غیرموازی** با محورهای مختصات برقرار است.

مثال: **اگر معادلهٔ ضلع AB در مستطیل شکل روبه‌رو $۲x-۴y=-۶$ باشد، عرض از مبدأ خط BC کدام است؟**



۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

پاسخ: ضلع BC بر ضلع AB عمود است، پس شیب BC عکس و قرینهٔ شیب AB است. $AB: ۲x-۴y=-۶\Rightarrow y=\frac{۲}{۴}x-\frac{۱}{۴}\Rightarrow m_{AB}=\frac{۲}{۴}$

حال شیب BC را می‌یابیم:

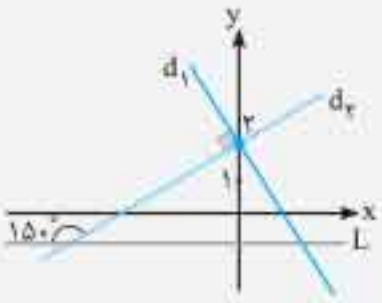
$$m_{BC}\,m_{AB}=-۱\Rightarrow m_{BC}\times\frac{۲}{۴}=-۱\Rightarrow m_{BC}=-\frac{۴}{۲}$$

به کمک مختصات نقطهٔ $B(۲,۳)$ و شیب $m=-\frac{۴}{۳}$، معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم:

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-۳=-\frac{۴}{۳}(x-۲)\Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۷}{۳}$$

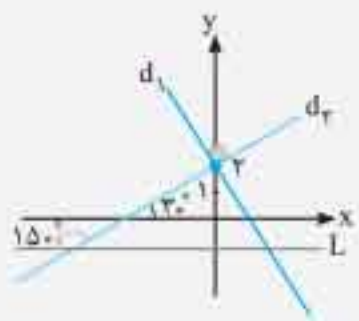
عرض از مبدأ این خط $\frac{۱۷}{۳}$ است.

مثال: **با توجه به شکل مقابل، اگر خط L موازی محور x رسم شده باشد، خط $d_۱$ در کدام نقطه، محور طول‌ها را قطع می‌کند؟**



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: خط با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد، پس شیب آن $\tan ۳۰^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.



چون خط $d_۱$ بر خط $d_۲$ عمود است، بنابراین شیب خط $d_۱$ عکس و قرینهٔ شیب خط $d_۲$ است.

$$d_۲: m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=-\sqrt{۳}$$

عرض از مبدأ این خط ۲ است.

معادلهٔ خط $d_۱$ برابر $y=-\sqrt{۳}x+۲$ است.

برای یافتن محل برخورد این خط با محور طول‌ها، باید عرض آن را صفر قرار دهیم:

$$y=-\sqrt{۳}x+۲\Rightarrow ۰=-\sqrt{۳}x+۲\Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱. معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(۰,-۲)$ کدام است؟

۱) $۲x-۳y-۶=۰$ ۲) $۲x+۳y+۶=۰$ ۳) $۲x+۳y-۶=۰$ ۴) $۲x-۳y+۶=۰$

۲. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m,۳)$، $(۶,۴m+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ و -۲ ۲) $\frac{۳}{۴}$ و -۲ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ و -۲ ۴) $-\frac{۹}{۴}$ و ۲

۳. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ محل برخورد دو خط $y=۲x$ و $y=\frac{x}{۲}$ می‌گذرد و بر خط $y=-x+۴$ عمود است، کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=x+۱$ ۴) $y=-x+۱$

۴. یکی از خطوط به معادلهٔ $(K+۱)y+۲Kx-K+۱=۰$ بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,-۱)$ و $B(۸,۲)$ عمود است. معادلهٔ این خط کدام است؟

۱) $۲y+۳x=۴$ ۲) $۲y+۳x=۱$ ۳) $۲y-۳x=-۵$ ۴) $۳y-۲x=-۵$

۵. در مثلثی با رئوس $A(-۱,-۴)$، $B(-۵,۶)$ و $C(۲,۲)$ معادلهٔ ارتفاع AH کدام است؟

۱) $y=۲x-۲$ ۲) $۲y+x+۹=۰$ ۳) $y=۴x$ ۴) $y=-۲x-۶$

۶. نقاط $A(۲,۵)$، $B(۲,-۱)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$

۷. معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۸. دو نقطهٔ A و B به طول‌های $x_A=۱$ و $x_B=۲$ روی خط $y=۴x-۳$ قرار دارند. اگر تصاویر نقاط A و B روی محور xها، نقاط C و D باشند، مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۹. دو نقطهٔ M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر $A(۱,-۲)$ و $B(۲,۲)$ باشند، زاویه‌های AMB و $AM'B$ قائمه می‌شوند. حاصل‌ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

فاصلهٔ دو نقطه

فاصلهٔ **دو نقطهٔ** $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: (مهم)

$$d=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

فاصلهٔ هر **نقطه** مانند $A(x_A,y_A)$ **از مبدأ** برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$$

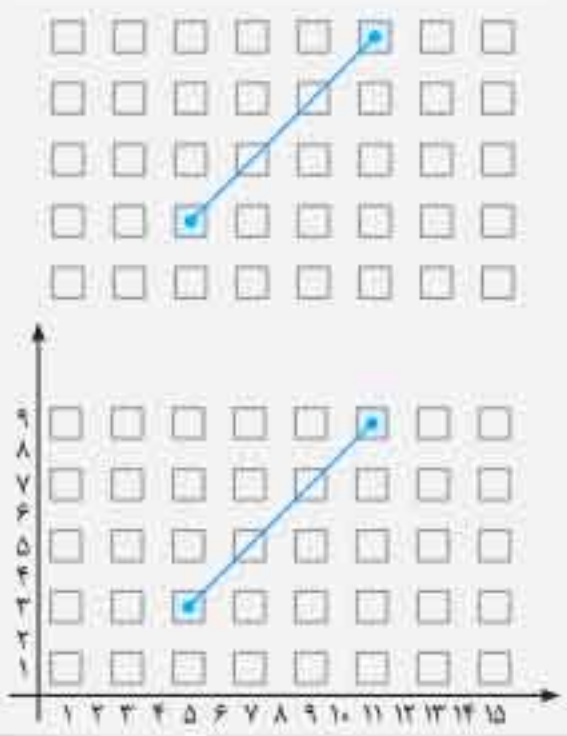
مثال: در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر نیمکت را ۵۰ سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصلهٔ مرکز نیمکت ردیف ۲، شمارهٔ ۳ با مرکز نیمکت ردیف ۵، شمارهٔ ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازهٔ یک نیمکت است.)

۱) $۵۰\sqrt{۱۸}$ ۲) $۲۵\sqrt{۱۸}$ ۳) $۲۵\sqrt{۸۵}$ ۴) $۵۰\sqrt{۷۲}$

پاسخ: می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $(۵,۳)$ را از نقطهٔ $(۱۱,۹)$ بیابیم:

$$d=\sqrt{(۱۱-۵)^۲+(۹-۳)^۲}=\sqrt{۳۶+۳۶}=\sqrt{۷۲}$$

چون ابعاد هر نیمکت $۵۰cm$ است، فاصلهٔ واقعی $۵۰\times\sqrt{۷۲}$ می‌باشد.



نقطهٔ وسط پاره‌خط

مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB با مختصات نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با:

مهم

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲} \end{cases}$$

مثال: اگر سه نقطهٔ $A(-۱,۰)$، $B(۲,۴)$ و $C(۲,۵)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانهٔ CM کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۲}$

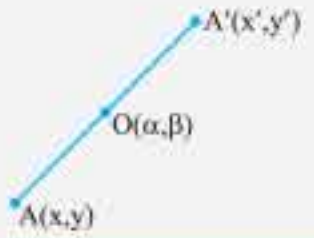
پاسخ: ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را می‌یابیم:

$$M\left(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۴+۰}{۲}\right)=M(۱,۲)$$

حال طول پاره‌خط CM را می‌یابیم:

$$CM=\sqrt{(x_M-x_C)^۲+(y_M-y_C)^۲}=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$:

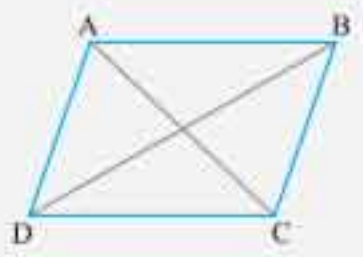


$$x'=۲\alpha-x$$
$$y'=۲\beta-y$$

نکته

قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $(-x,-y)$.

یک گام فراتر:



رابطهٔ بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع

در هر متوازی‌الاضلاع ABCD، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند.

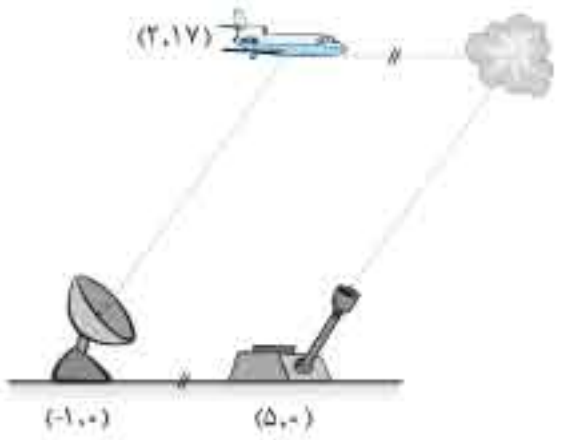
مهم

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

۱۰. اگر نقاط $A(۱,۲)$، $B(۳,۷)$، $C(۴,۵)$ و $D(m+۱,n-۱)$ مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، حاصل m.n کدام است؟

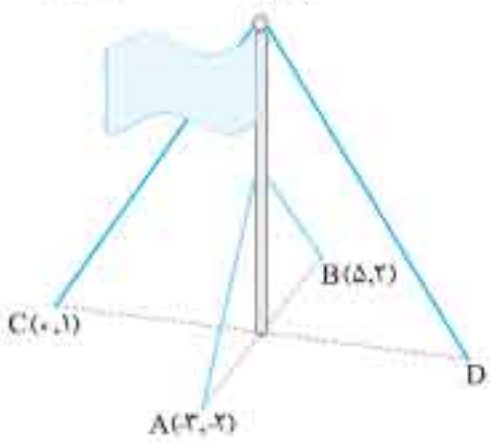
۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۱. مطابق شکل اگر هواپیما، رادار و ضدهوایی در یک صفحه باشند، ضدهوایی به کدام مختصات شلیک کند تا هواپیما شکار شود؟



۱) (۸,۱۷)
۲) (۵,۱۷)
۳) (۱۷,۵)
۴) (۱۷,۸)

۱۲. یک میلهٔ پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به‌طوری‌که فاصلهٔ هر نقطه تا میله با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله برابر است. مختصات نقطهٔ D کدام است؟



۱) (۲,-۱)
۲) (-۱,۲)
۳) (۳,-۲)
۴) (-۲,۳)

۱۳. قرینهٔ نقطه $(۲,۵)$ نسبت به نقطهٔ (a,b) برابر با (b,a) می‌باشد. $a^۲+b^۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۴. در مثلثی با رئوس $A(۴,۲)$، $B(۲,۰)$ و $C(۶,-۱)$ معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) $۳y=x-۲$ ۲) $x=۴$ ۳) $y=۳$ ۴) $-y=۳x-۶$

۱۵. نقاط $A(۱,۰)$، $B(۴,۲)$ و $C(a,-a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶. دو نقطه روی تیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطهٔ $A(۱,۲)$ به فاصلهٔ ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷. نقطهٔ $(۷,۶)$ رأس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۱۸. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $۲y-x=۲$، $y+۲x=۱۶$ و $y=۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$ مهم

نکته

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از **خط عمودی** $x=K$ برابر $|K-x_۰|$ و از **خط افقی** $y=K'$ برابر $|K'-y_۰|$ است.

مثال: می‌خواهیم از یک روستا که در مختصات $(-۳,۴)$ قرار دارد یک راه آسفالت به جاده‌ای به معادلهٔ $۳x-۴y-۱=۰$ احداث کنیم. اگر واحدهای مختصات برحسب کیلومتر باشند و هزینهٔ احداث هر کیلومتر جاده ۱۰۰ میلیون تومان باشد، حداقل هزینه احداث جاده کدام است؟

۱) ۵۲۰ میلیون ۲) ۵۴۰ میلیون
۳) ۵۶۰ میلیون ۴) ۵۸۰ میلیون

پاسخ: کوتاه‌ترین فاصله، خط عمود AH است.

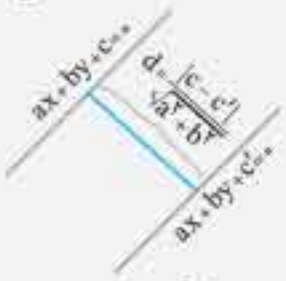
$$AH=\frac{|۳x_A-۴y_A-۱|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{|۳(-۳)-۴(۴)-۱|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۶}{۵}$$

طول جاده $\frac{۲۶}{۵}$ کیلومتر است، بنابراین: $\frac{۲۶}{۵}\times ۱۰۰=۵۲۰$

فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$ مهم



حواست باشه: قبل از استفاده از این فرمول اولاً باید همهٔ بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y باید در دو معادله برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: دایره‌ای بر دو خط $y-۲x+۱=۰$ و $۲y-۴x=-۷$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$

پاسخ: ابتدا در ضابطهٔ $۲y-۴x=-۷$ عدد -۷ را به سمت چپ منتقل می‌کنیم سپس طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب در دو معادله یکسان شوند.

$$\begin{cases}y-۲x+۱=۰\\ y-۲x+\frac{۷}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow ۲R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\frac{۷}{۲}-۱|}{\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$

پاسخ:

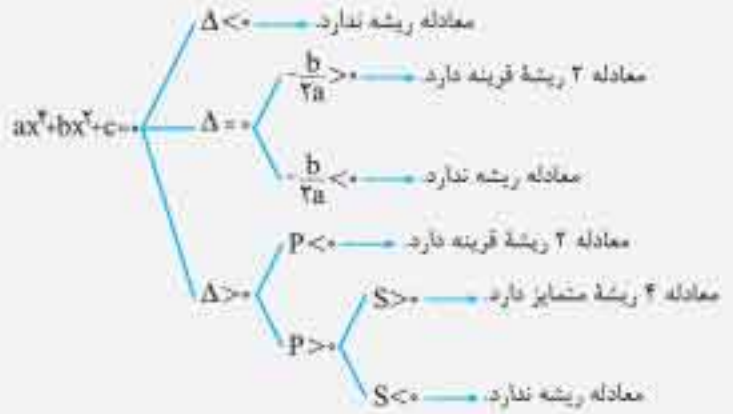
بنابراین دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد و قدرمطلق ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشهٔ منفی است.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-۲\sqrt{۳}-۲}{۱}<۰\Rightarrow\begin{cases}\Delta>۰\\P<۰\\S>۰\end{cases}$$

یک گام فراتر:

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$

(با فرض $a,b,c\neq ۰$) برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن‌را به‌صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



مثال: **معادلهٔ $x^۴-۴x^۲+۲-a=۰$ چهار ریشهٔ متمایز دارد. حدود a کدام است؟**

۱) $a>-۲$ ۲) $-۸<a<-۲$ ۳) $a<۲$ ۴) $-۲<a<۲$

پاسخ: مطابق آن‌چه که در بالا بحث شد زمانی معادله چهار ریشه دارد که:

۱) $\Delta>۰\Rightarrow(-۴)^۲-۴(۱)(۲-a)>۰\Rightarrow ۱۶-۸+۴a>۰\Rightarrow ۸+۴a>۰\Rightarrow a>-۲$

۲) $P>۰\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۲-a}{۱}=۲-a>۰\Rightarrow a<۲$

۳) $S>۰\Rightarrow-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۱}=۴>۰$ بدیهی

اشتراک مجموعه جواب‌های قوق $-۲<a<۲$ می‌شود.

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=۰$

(با فرض $a,b,c\neq ۰$) به نمودار درختی زیر توجه کنید:

در حالت $P<۰$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.

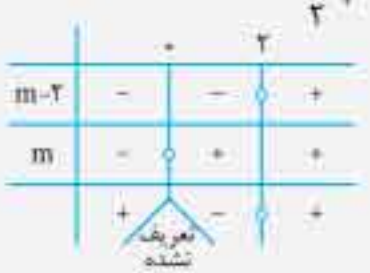
مثال: **به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx-۲\sqrt{x}+m-۲=۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (معادله ریشهٔ مضاعف ندارد.)**

۱) $-\frac{۳}{۲}<m<۲$ ۲) $۰<m<۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}<m<\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲<m<\frac{۵}{۲}$

پاسخ: طبق نمودار ارائه‌شده، باید $\Delta>۰$ و $P<۰$ باشد.

به دلیل منفی بودن P نیازی به بررسی Δ نیست و فقط کافی است $P<۰$ باشد.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m-۲}{m}<۰\Rightarrow ۰<m<۲$$



۴۲. معادلهٔ $x^۴-۴x^۲+۳=۰$ دارای چند ریشه است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳. معادلهٔ $(۲x^۲-۱)^۲=۷+۶(۲x^۲-۱)$ دارای چند ریشهٔ متمایز است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۴=۱۶(۲x^۲+۹)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۵ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۵. معادلهٔ $۲x^{\frac{۲}{۳}}+۷x^{\frac{۱}{۳}}-۴=۰$ چند ریشه دارد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶. معادلهٔ $(x-\frac{۱}{x})^۲+۳(x+\frac{۱}{x})=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ $(m-۲)x^۲+(m-۱)x+(m-۳)=۰$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد؟

۱) $\varnothing$ ۲) $۱<m<۳$ ۳) $۲<m<۳$ ۴) $۱<m<۲$

۴۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-۳<m<۵$ ۲) $-۳<m<۴$ ۳) $-۲<m<۴$ ۴) $-۱<m<۵$

۴۹. اگر معادلهٔ $mx^۴-۴x^۲+m-۳=۰$ دارای چهار ریشهٔ متمایز باشد، آن‌گاه m باید در بازهٔ (a,b) باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

۱) $m\geq ۱$ ۲) $m<۲$ ۳) $۱\leq m<۲$ ۴) هیچ مقدار m

۵۱. مجموعه مقادیر a کدام باشد تا معادلهٔ $x^۴+(۲a+۱)x^۲+(a^۲-۱)=۰$ دارای دو جواب قرینه باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\{-\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\{a\in\mathbb{R}\,|\,-۱<a<۱\}$ ۳) $\{a\in\mathbb{R}\,|\,a<-۱\cup a>۱\}$ ۴) $\varnothing$

۵۲. به ازای چه مقادیری از a معادلهٔ $x^۲-۴|x|=a$ چهار ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) $۰<a<۴$ ۲) $-۴<a<۰$ ۳) $a>-۴$ ۴) $a<-۴$

۵۳. تعداد ریشه‌های حقیقی متمایز معادلهٔ $(x^۲+۴x+۳)^۲=x^۲+۴x+۵$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴ با کمی تغییر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۴. معادلهٔ $(x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)=۲$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را بدون نیاز به حل معادله، از روابط زیر یافت.

مهم

مجموع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

برای نمونه در معادلهٔ $۳x^۲-۳x-۵=۰$ بدون حل معادله می‌توان فهمید مجموع دو ریشه برابر $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۳}=۱$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۳}$ است.

نکته

معادلهٔ درجهٔ دوم، با مجموع ریشه‌های S و حاصل‌ضرب ریشه‌های P به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ است.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن $۱+\sqrt{\alpha}$ و $۱-\sqrt{\alpha}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^۲+۲x+(۱-\alpha)=۰$ ۲) $x^۲-۲x+(۱-\alpha)=۰$

۳) $x^۲+۲\sqrt{\alpha}x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۲\sqrt{\alpha}x-۱=۰$

حل مسائل پارامتری ارتباط بین ریشه‌ها

◀ اگر در یک معادلهٔ پارامتری، مقدار یک ریشه را برحسب دیگری داشته باشیم مثلاً بدانیم یک ریشه دو برابر یا معکوس یا... دیگری است، می‌توانیم با تشکیل دستگاهی مرکب از S و P ریشه‌ها را بیابیم و بعد از آن مقدار پارامتر را پیدا کنیم.

مثال: در معادلهٔ $۲x^۲-۱۵x+m=۰$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{۵۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵۹}{۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۴}$

● پاسخ:

روش اول: اگر یکی از ریشه‌های معادله را α فرض کنیم ریشهٔ دوم برابر $\alpha+۲$ می‌شود.

در این معادله مجموع ریشه‌ها $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱۵}{۲}=۵$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=\frac{m}{۲}$ است.

$$\begin{cases}\alpha+(\alpha+۲)=S=۵\Rightarrow ۲\alpha+۲=۵\Rightarrow\alpha=\frac{۳}{۲}\\ \alpha.(\alpha+۲)=P=\frac{m}{۲}\end{cases}$$

به کمک مقدار $\alpha=\frac{۳}{۲}$ می‌توان مقدار m را از رابطهٔ دوم یافت: $m=۲\alpha(\alpha+۲)\Rightarrow m=۲(\frac{۳}{۲})(\frac{۳}{۲}+۲)=\frac{۹}{۲}(\frac{۷}{۲})=\frac{۶۳}{۴}$

روش دوم: تفاضل دو ریشه برابر ۲ است. فرمول تفاضل دو ریشه هم $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\Rightarrow\frac{\sqrt{(-۱۵)^۲-۴(۲)m}}{۲}=۲\Rightarrow\sqrt{۲۲۵-۱۲m}=۶\Rightarrow ۲۲۵-۱۲m=۳۶\Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

در این سوال روش دوم ساده‌تر است ولی دقت کنید روش اول قاعدهٔ کلی است و روش دوم خاص این سوال است.

۷۰. در معادلهٔ $۲x^۲+ax+۹=۰$ یک ریشه، دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+mx-۳=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار m، رابطهٔ $۲\alpha+\beta=۴$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) $\frac{۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $۳\pm\sqrt{۵}$ ۳) $-۳\pm\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{-۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$

۷۲. به ازای کدام مقدار K در معادلهٔ $۲x^۲+Kx+۹=۰$ بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_۱\sqrt{x_۲}=۳\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ برقرار است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) -۱۱ ۴) -۹

۷۳. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ دو عدد صحیح متوالی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۱) $a^۲+۴b=۰$ ۲) $a^۲+۴b=۱$ ۳) $a^۲-۴b=۱$ ۴) $a^۲-b=۱$

۷۴. به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{۵}{۶}$ میان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a+۲)x+a+۱=۰$ برقرار است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۵. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a(x-۲)^۲=x$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است، مقدار مثبت a کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۷۶. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$، برابر ۲ می‌باشد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۷. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲-mx-۸=۰$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

نمودار تابع درجهٔ دوم

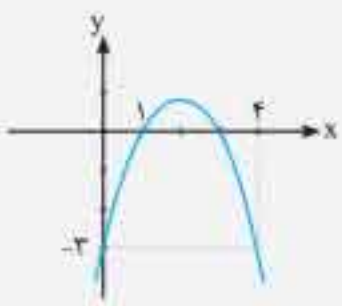
یادآوری: نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت یک **سهمی قائم** است که اگر $a>0$، دهانهٔ سهمی **رو به بالا** و اگر $a<0$، دهانهٔ سهمی **رو به پایین** می‌باشد.

◄ سوالاتی که نمودار به همراه چند نقطه از آن داده‌شده و ضابطهٔ تابع آن خواسته می‌شود را می‌توان به سه دستهٔ کلی تقسیم‌بندی نمود.

الف: سه نقطهٔ عادی:

سه نقطهٔ داده شده را در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی برسیم با حل دستگاه، مجهول‌های a، b و c به دست می‌آیند و ضابطهٔ تابع مشخص می‌شود.

مثال: نمودار مقابل، نمودار تابع درجهٔ دوم به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد. b کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

● **پاسخ:** این نمودار از نقاط $(-3,0)$، $(1,0)$ و $(4,-3)$ می‌گذرد، نقاط را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

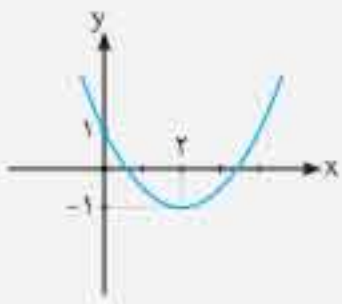
$$(0,-3)\Rightarrow -3=0+0+c\Rightarrow c=-3$$

$$\left.\begin{matrix}(1,0)\Rightarrow 0=a+b+c\\(4,-3)\Rightarrow -3=16a+4b+c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\16a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=4\\a=-1\end{cases}$$

ب: رأس و یک نقطهٔ عادی:

دو نقطهٔ داده شده را در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ جای‌گذاری می‌کنیم. همین‌طور طول رأس را در معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی می‌رسیم و با حل آن ضرایب a، b و c به دست می‌آیند.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a+b+c=-\frac{1}{2}$
۲) $a+b+c=\frac{1}{2}$
۳) $a-b+c=-\frac{1}{2}$
۴) $a-b+c=\frac{1}{2}$

● **پاسخ:**

روش اول: نقاط $(-1,2)$ و $(0,1)$ را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(2,-1)\Rightarrow -1=4a+2b+c\\(0,1)\Rightarrow 1=0+0+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1\\4a+2b=-2\end{cases}$$

از طرفی طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}=2$ است، بنابراین $b=-4a$ است.

$$\begin{cases}4a+2b=-2\\b=-4a\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ \text{و}\ b=-2$$

بنابراین می‌توان فهمید:

$$a+b+c=\frac{1}{2}-2+1=-\frac{1}{2}$$

روش دوم: اگر نقطهٔ رأس سهمی را (m,h) بنامیم معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-m)^2+h$ درمی‌آید.

برای پیدا کردن a کافی است مختصات نقطهٔ عادی را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری کنیم.

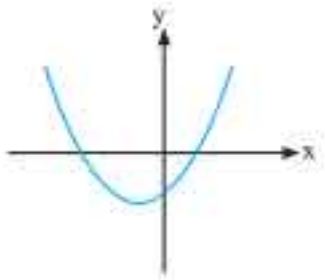
می‌خواهیم مثال قبلی را به روش جدید حل کنیم. مختصات رأس سهمی $(2,-1)$ است، پس $y=a(x-2)^2-1$ می‌باشد.

نقطهٔ $(0,1)$ را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری می‌کنیم: $y=a(x-2)^2-1\xrightarrow{(0,1)}1=a(0-2)^2-1\Rightarrow 1=4a-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

ضابطهٔ سهمی به صورت زیر درمی‌آید.

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)-1=\frac{1}{2}x^2-2x+1\Rightarrow a+b+c=\frac{1}{2}-2+1=-\frac{1}{2}$$

۷۸. کدام ضابطه می‌تواند مربوط به نمودار مقابل باشد؟



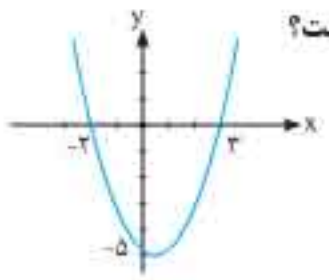
۱) $y=۳x^۲+۲x+۱$

۲) $y=x^۲+۳x-۱$

۳) $y=۳x^۲+۵x+۱$

۴) $y=x^۲-۳x-۱$

۷۹. شکل مقابل، نمودار تابع درجهٔ دوم به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



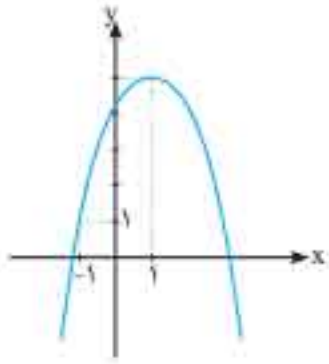
۱) ۵

۲) -۵

۳) ۶

۴) -۶

۸۰. سهمی شکل مقابل به معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ می‌باشد و $a-b=-۳$ است. مقدار $f(۱)$ کدام است؟



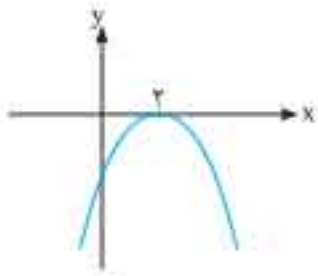
۱) -۴

۲) صفر

۳) ۴

۴) ۵

۸۱. شکل مقابل نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=Kx^۲+۸x+c$ است. K کدام است؟



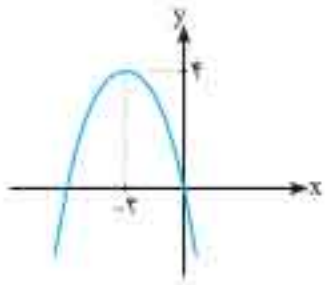
۱) -۲

۲) -۸

۳) ۲

۴) -۴

۸۲. با توجه به نمودار تابع $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ مقدار a کدام است؟



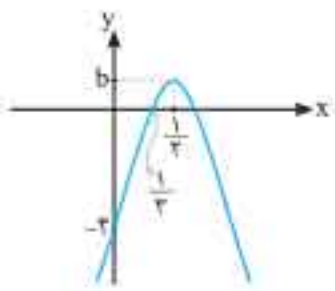
۱) ۱

۲) -۱

۳) -۲

۴) ۲

۸۳. شکل مقابل نمودار تابع درجهٔ دوم f است. مقدار b کدام است؟



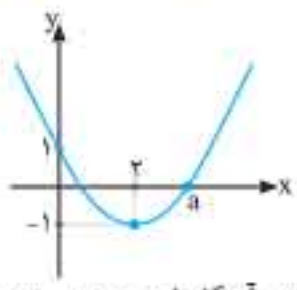
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۴. با توجه به شکل مقابل، که نمودار یک تابع درجهٔ دو را نشان می‌دهد، مقدار a کدام است؟



۱) ۳

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $۲+\sqrt{۲}$

۴) $\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}$

۸۵. اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x را در دو نقطه به طول‌های -۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور y را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) ۳

۴) -۳

۸۶. محور تقارن سهمی $y=x^۲+fx+K$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض -۲ قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ایجاد می‌کند، کدام است؟

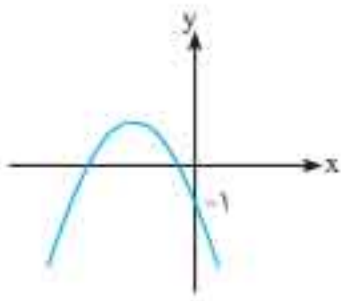
۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

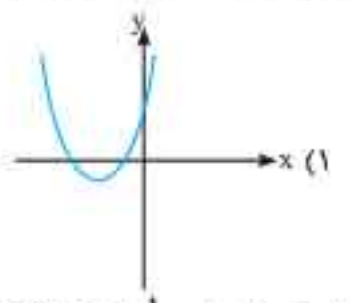
۴) $۴\sqrt{۲}$

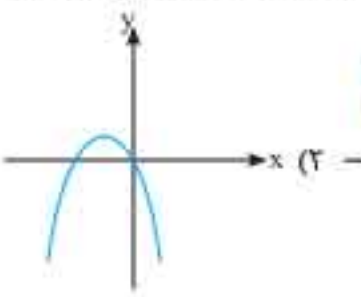
۸۷. در شکل زیر سهمی به معادلهٔ $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. کدام گزینه در مورد ضرایب a، b و c و تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ صحیح است؟

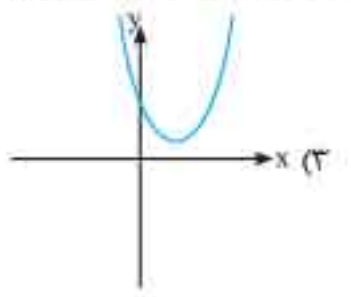


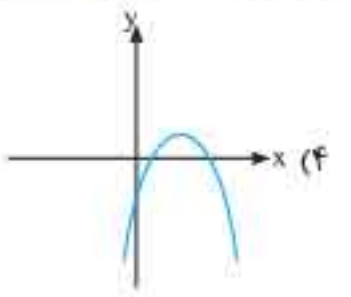
۱) $c<0$، $b<0$ و $a>0$ و معادله دو ریشه دارد.
۲) $c<0$، $b>0$ و $a>0$ و معادله دو ریشه دارد.
۳) $b<0$ و $a>0$ و معادله ریشه ندارد.
۴) $c>0$، $b>0$ و $a<0$ و معادله ریشه ندارد.

۸۸. در سهمی $y=ax^2+bx+c$، ضرایب a، b و c هم‌علامت هستند. کدام نمودار می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

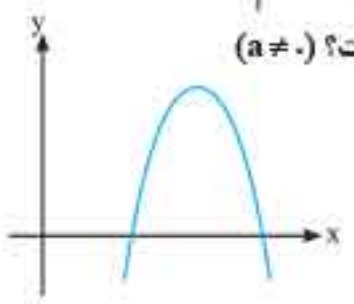
۱) 

۲) 

۳) 

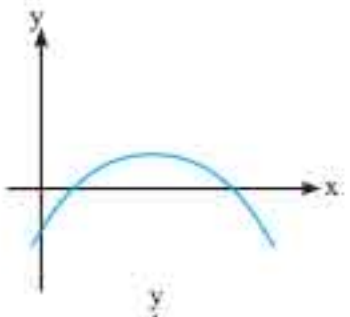
۴) 

۸۹. اگر نمودار تابع $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ به صورت مقابل باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟ $(a\neq 0)$



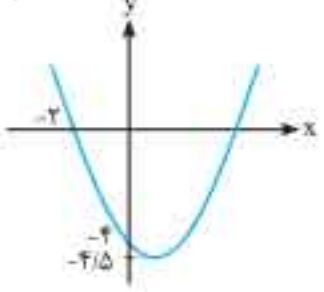
۱) $a>2$
۲) $a<-2$
۳) $b>2$
۴) $b<-2$

۹۰. نمودار تابع $f(x)=mx^2+8x-2$ به صورت مقابل است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۹۱. شکل زیر نمودار سهمی $y=f(x)$ است. قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۹۲. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور x است؟

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

۹۳. با کدام مقدار m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $7<m<15$ ۴) $9<m<25$

۹۴. اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-2$، محور x را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ ۳) $3<m<5$ ۴) $4<m<9$

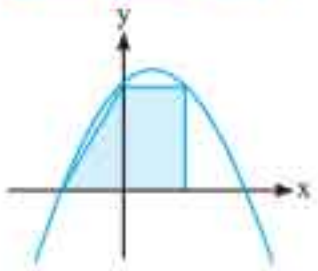
۹۵. به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\leq -2$ ۴) $-2\leq a<0$

۹۶. خط $y=K$ منحنی $y=x^2-4x+1$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. به ازای Kهای مختلف مجموعه نقاط وسط پاره‌خط AB روی کدام تابع زیر قرار می‌گیرند؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $y=2$ ۲) $x=2$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=\frac{x}{2}$

۹۷. نمودار سهمی $y=2+x-x^2$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت ذوزنقهٔ رنگی کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲/۵

۸۷۲. در یک جمع، ۱۵ مرد و ۲۵ زن حضور دارند. در بین آن‌ها x مرد و ۵ زن چشم سبز رنگ دارند. یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد زن بودن و B پیشامد چشم سبز داشتن این فرد باشد، در کدام صورت A و B همواره مستقل اند؟

۱) $۵x = ۴y$ ۲) $۵x = ۳y$ ۳) $۳x = ۵y$ ۴) $۴x = ۵y$

۸۷۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A) + P(A'|B) = ۱$ و هم‌چنین $P(A) + P(B) = ۰/۸$ باشد، حداقل $P(A \cup B)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۱۶

۸۷۴. در یک خانوادهٔ ۱۵ فرزندی، احتمال این‌که فرزند هفتم و دوازدهم پسر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\binom{۱۵}{۲}}{۲^{۱۵}}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۷۵. در بین ۶ نفر احتمال این‌که همگی روز شنبه به دنیا آمده باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳}{۷^۶}$ ۲) $۱ - \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲}{۷^۶}$ ۳) $\frac{۷!}{۷^۶}$ ۴) $\frac{۱}{۷^۶}$

۸۷۶. در فضای نمونه‌ای هم‌شانس $\{a, b, c, d\}$، پیشامد $\{c, d\}$ با کدام پیشامد زیر مستقل است؟

۱) $\{a, b\}$ ۲) $\{b, d\}$ ۳) $\{c, a, d\}$ ۴) $\{c, d, a\}$

۸۷۷. در یک تیراندازی احتمال این‌که سهیل تیر را به هدف نزند، ۴۰٪ است. دست‌کم او باید چند تیر بزند تا احتمال برخورد دست‌کم یک تیر به هدف، بیش از ۹۵٪ شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۷۸. یک فضای نمونه‌ای، پنج عضو a، b، c، d و e دارد. اگر $P(\{a, b, c\}) = \frac{۵}{۱۲}$ و $P(\{b, c\}) = \frac{۱}{۳}$ باشند، آن‌گاه $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۸۷۹. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم مجموع آن‌ها ۵ یا ۱۰ آمده است. چقدر احتمال دارد که هر دو عدد رو شده زوج نباشند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۲۷}$ ۴) $\frac{۷}{۲۷}$

۸۸۰. در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال این‌که یک اتومبیل دچار نقص فنی شود، ۰/۴ است. احتمال نرسیدن به خط پایان برای یک اتومبیل اگر خراب شده باشد ۰/۳ می‌باشد. اگر اتومبیلی را در این مسابقه به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که خراب بوده و از خط پایان بگذرد، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۱۸

۸۸۱. یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم سکهٔ اول «رو» آمده است. با کدام احتمال، دست‌کم یکی از سکه‌ها «پشت» آمده است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۸۲. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = ۴P(A \cap B) = ۳P(B)$، آن‌گاه چقدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟ (A و B تهی نیستند.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۸۸۳. در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به تصادف، پی در پی و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲

۸۸۴. یک تاس را دست‌کم چند بار پرتاب کنیم تا با احتمال بیش از ۹۹ درصد دست‌کم یک بار عدد اول بیاید؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۸۵. ۴ جعبه داریم که در هر کدام پنج توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. اگر از هر جعبه یک توپ به تصادف برداریم، احتمال این‌که تمامی این توپ‌ها شمارهٔ یکسان داشته باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵^۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵^۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۸۸۶. یک تاس را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که بزرگ‌ترین عددی که می‌آید ۴ باشد، کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳})^۶$ ۲) $(\frac{۲}{۳})^۶$ ۳) $\frac{۲^۶ - ۱}{۳^۶}$ ۴) $(\frac{۲}{۳})^۵$

۸۸۷. می‌دانیم امروز احتمال آمدن برف ۰/۲ و فردا ۰/۲۲ است. احتمال آمدن برف فردا به شرط آن‌که امروز برف بیاید، ۰/۷ است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آن‌که امروز برف نیاید، کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۷۸ ۴) ۰/۹

۸۸۸. خانواده‌ای ۵ فرزند دارد. می‌دانیم فرزند دوم پسر است. احتمال آن‌که آخرین فرزند، سومین پسر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۸۸۹. احتمال ازدواج پسر و دختر خانواده‌ای تا ۵ سال دیگر به‌ترتیب $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است. اگر پسر ازدواج کند، احتمال ازدواج دختر به $\frac{۱}{۲}$ افزایش می‌یابد. با کدام احتمال حداقل یکی از آن‌ها تا ۵ سال دیگر ازدواج خواهد کرد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۸۹۰. در یک خانوادهٔ سه‌فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۸۹۱. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. می‌دانیم عدد ظاهر شده، مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که شمارهٔ ظاهرشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۹۲. در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۸۹۳. دوتاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۸۹۴. چهار دانش‌آموز یک کلاس روی یک نیمکت نشسته‌اند. با کدام احتمال، ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۸۹۵. ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه هستند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید هستند؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۸۹۶. در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

۸۹۷. در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۱ مهرهٔ قرمز و حداقل ۲ مهرهٔ سفید خارج شده است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

۸۹۸. هر یک از ارقام ۱، ۲، ۲، ۴ و ۵ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۸۹۹. در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. ۲ ۳ ۴

روش اول: ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۰}{۰-۳}=\frac{۲}{۳}$$

سپس معادلهٔ خط را به کمک یکی از نقاط A یا B می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-۰=\frac{۲}{۳}(x-۳)\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-۲$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$۳y=۲x-۶\Rightarrow ۳y-۲x+۶=۰ \quad \text{یا} \quad -۳y+۲x-۶=۰$$

روش دوم: فرض می‌کنیم معادلهٔ خط به صورت $y=ax+b$ باشد، با جای‌گذاری دو نقطهٔ $A(۳,۰)$ و $B(۰,-۲)$ در معادله، مجهولات a و b را می‌یابیم:

$$y=ax+b\Rightarrow\begin{cases}۰=a(۳)+b\\-۲=a(۰)+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳a+b=۰\\b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۲}{۳}\\b=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-۲$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم: $۳y=۲x-۶\Rightarrow ۲x-۳y-۶=۰$

۲. ۲ ۳ ۱

اگر سه نقطه را به ترتیب $A(m,۲)$، $B(۶,۴m+۱)$ و $O(۰,۰)$ در نظر بگیریم، شیب‌های دو خط OA و OB باید با هم برابر باشند تا این سه نقطه در یک راستا قرار بگیرند:

$$m_{OA}=m_{OB}\Rightarrow\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}$$

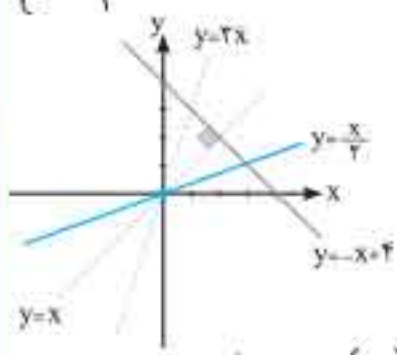
$$\Rightarrow\frac{۲-۰}{m-۰}=\frac{۴m+۱-۰}{۶-۰}$$

$$۴m^۲+m-۱۸=۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}(۴m+۹)(۴m-۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{-۹}{۴}\\m=۲\end{cases}$$

۳. ۲ ۳ ۴

ابتدا محل برخورد دو خط $y=۲x$ و $y=\frac{x}{۲}$ را با تشکیل دستگاه می‌یابیم:

$$\begin{cases}y=۲x\\y=\frac{x}{۲}\end{cases}\Rightarrow ۲x=\frac{x}{۲}\Rightarrow ۴x=x\Rightarrow x=۰\Rightarrow y=۰$$



محل برخورد، نقطهٔ $(۰,۰)$ است.

خط مطلوب، بر خط $y=-x+۴$ عمود است. پس شیب آن عکس و قرینهٔ شیب خط $y=-x+۴$ است.

$$m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

معادلهٔ خط مطلوب را به کمک نقطهٔ $(۰,۰)$ و شیب $m=۱$ می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۰=۱(x-۰)\Rightarrow y=x$$

۴. ۲ ۳ ۱

ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-(-۱)}{۸-۲}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

چون خط مطلوب، بر خط AB عمود است پس شیب آن، عکس و قرینهٔ شیب AB است.

$$m'=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شیب خط $(K+۱)y+۲Kx-K+۱=۰$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

$$(K+۱)y+۲Kx-K+۱=۰\Rightarrow y=\frac{-۲K}{K+۱}x+\frac{K-۱}{K+۱}$$

$$m'=\frac{-۲K}{K+۱}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow ۴K=۳K+۳\Rightarrow K=۳$$

حال با جای‌گذاری ۳ به جای K معادله را حل می‌کنیم:

$$(K+۱)y+۲Kx-K+۱=۰\xrightarrow{K=۳}۲y+۳x=۱$$

۵. ۲ ۳ ۲

شیب BC را می‌یابیم: $m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۲-۶}{۳-(-۵)}=\frac{-۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$

چون ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است، بنابراین شیب AH عکس و قرینهٔ BC می‌باشد.

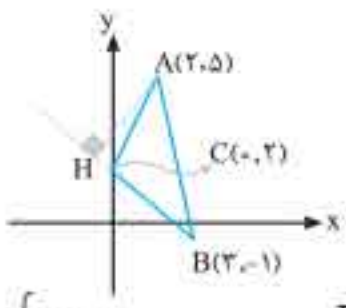
$$m_{AH}=\frac{-۱}{m_{BC}}=\frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$$

حال معادلهٔ خط AH را می‌یابیم:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-(-۴)=۲(x-(-۱))$$

$$\Rightarrow y=۲x-۲$$

۶. ۲ ۳ ۱



برای یافتن نقطهٔ H باید معادلهٔ دو خط AH و BC را بیابیم و آن‌ها را با هم قطع دهیم.

$$\begin{cases}\text{شیب خط BC}: m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{+۲-(-۱)}{۰-۳}=-۱\\ \text{معادلهٔ خط BC}: y-y_C=m(x-x_C)\Rightarrow y-۲=-۱(x-۰)\\ \Rightarrow y=-x+۲\end{cases}$$

از آن‌جایی که خط AH بر خط BC عمود است شیب خط AH عکس و قرینه شیب خط BC است.

$$m_{AH}=\frac{-۱}{m_{BC}}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

معادلهٔ خط AH را می‌یابیم:

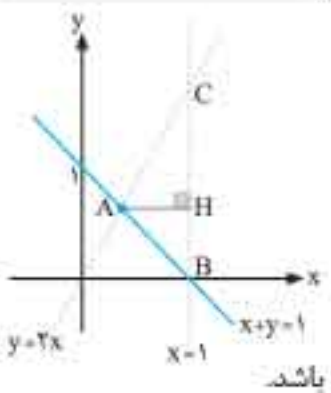
$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-۵=۱(x-۲)\Rightarrow y=x+۳$$

برای یافتن نقطهٔ H باید دستگاه معادلات دو خط BC و AH را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases}y=-x+۲\\y=x+۳\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

۷. ۲ ۳ ۴

نکته: در سوالات مثلث، اگر یکی از اضلاع آن افقی یا عمودی باشد، بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.



یکی از اضلاع مثلث $(x=۱)$ خطی عمود است. پس بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.

همان‌طور که می‌بینید، کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث، ارتفاع AH می‌باشد که یک خط افقی است و معادلهٔ آن باید به صورت $y=K$ باشد.

به این ترتیب فقط گزینهٔ «۱» می‌تواند درست باشد.

اگر بخواهیم K را بیابیم، باید معادلهٔ دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ را قطع دهیم و عرض نقطهٔ تقاطع را بیابیم:

$$\begin{cases}x+y=۱\\y=۲x\end{cases}\Rightarrow x+۲x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}$$

هر دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$\frac{|-3\alpha+3|}{\sqrt{2}}=|-2\alpha+3|\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{9\alpha^2-18\alpha+9}{2}$$

$$=4\alpha^2-12\alpha+9\Rightarrow 9\alpha^2-18\alpha+9=8\alpha^2-24\alpha+18$$

$$\Rightarrow \alpha^2+6\alpha-9=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{-6-\sqrt{72}}{2}=-3-3\sqrt{2}\\ \alpha=\frac{-6+\sqrt{72}}{2}=-3+3\sqrt{2}\end{cases}$$

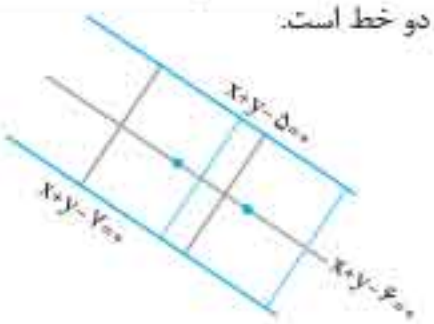
با توجه به این‌که مرکز دایره در ربع اول است پس باید α مثبت باشد، پس $\alpha=-3+3\sqrt{2}$ است.

۳۸. ۱ ۲ ۳ ۴

نکته:

خط وسط دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با: $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$

مرکز مربع نقطه‌ای در وسط این دو خط است.



چون دو خط $ax+y=5$ و $x+y=7a$ موازی هستند و شیب‌های آن‌ها با هم برابرند، پس $a=1$ است.

$$a=1\Rightarrow\begin{cases}x+y-7=0\\ x+y-5=0\end{cases}$$

پس خط وسط دو خط $x+y-7=0$ و $x+y-5=0$ برابر است با:

$$x+y+\frac{-5-7}{2}=0\Rightarrow x+y-6=0$$

۳۹. ۱ ۲ ۳ ۴

راهبرد

برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\\ x_C & y_C\\ x_A & y_A\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_By_A+x_Cy_B+x_Ay_C)]$$

تذکر:

۱) ترتیب چیدن نقاط در فرمول S اهمیتی ندارد، فقط اولین نقطه در مرتبهٔ آخر باید تکرار شود.

۲) در صورت **منفی** شدن جواب S، مساحت برابر **قدرمطلق** آن است.

به کمک راهبرد فوق مساحت را می‌یابیم:

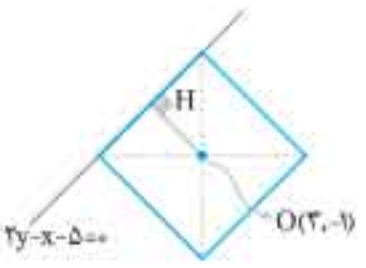
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[((2\times0)+(3\times2)+(0\times5))-(3\times5+0\times0+2\times2)]$$

$$=\frac{1}{2}[6-19]=\frac{-13}{2}=-6/5$$

از آن‌جایی که مساحت نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $S=6/5$ است.

۴۰. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله نقطهٔ $(3,-1)$ در مرکز مربع تا معادلهٔ یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است.



$$OH=\frac{|2y_0-x_0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2(-1)-3-5|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

طول ضلع مربع ۲ برابر OH یعنی $\frac{20}{\sqrt{5}}$ است، پس مساحت مربع برابر می‌شود با:

$$S=(\frac{20}{\sqrt{5}})^2=80$$

۴۱. ۱ ۲ ۳ ۴

کافی است معادلهٔ ضلع BC روبه‌رو را نوشته و سپس فاصلهٔ رأس A از آن را به‌دست آوریم:

$$BC: y-(-2)=\frac{3-(-2)}{7-2}(x-2)\Rightarrow BC: y+2=x-2$$

$$\Rightarrow BC: y-x+4=0$$

$$\xrightarrow[\text{قرار دارد.}]{\text{H بر روی BC}} AH=\frac{|5-1+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

۴۲. ۱ ۲ ۳ ۴

برای حل این معادله به‌جای x^2 از مجهول معاون A استفاده می‌کنیم:

$$x^4-4x^2+3=0\Rightarrow(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$

$$\xrightarrow{x^2=A}A^2-4A+3=0\Rightarrow(A-1)(A-3)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\ x^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

معادله دارای چهار ریشهٔ متمایز است.

۴۳. ۱ ۲ ۳ ۴

به جای $2x^2-1$، مقدار A را قرار می‌دهیم:

$$(2x^2-1)^2=7+6(2x^2-1)\Rightarrow A^2=7+6A$$

$$\Rightarrow A^2-6A-7=0\Rightarrow(A-7)(A+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=7\\ A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-1=+7\\ 2x^2-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2=8\Rightarrow x=\pm2\\ 2x^2=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

این معادله دارای سه ریشهٔ متمایز است.

۴۴. ۱ ۲ ۳ ۴

در معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ حتماً ریشه‌های غیرصفر، دوبه‌دو قرینهٔ یکدیگرند و بنابراین مجموع آن‌ها صفر می‌شود.

۴۵. ۱ ۲ ۳ ۴

در این معادله، $x^{\frac{1}{3}}=A$ فرض می‌کنیم، بنابراین:

$$2x^{\frac{2}{3}}+7x^{\frac{1}{3}}-4=0\Rightarrow 2(x^{\frac{1}{3}})^2+7(x^{\frac{1}{3}})-4=0$$

$$\xrightarrow[\times(-8)]{\times}2A^2+7A-4=0\Rightarrow\frac{1}{2}(2A+8)(2A-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=-4\\ A=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}=-4\ \text{غیر قابل قبول}\\ x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}\end{cases}$$

معادله یک ریشه دارد.