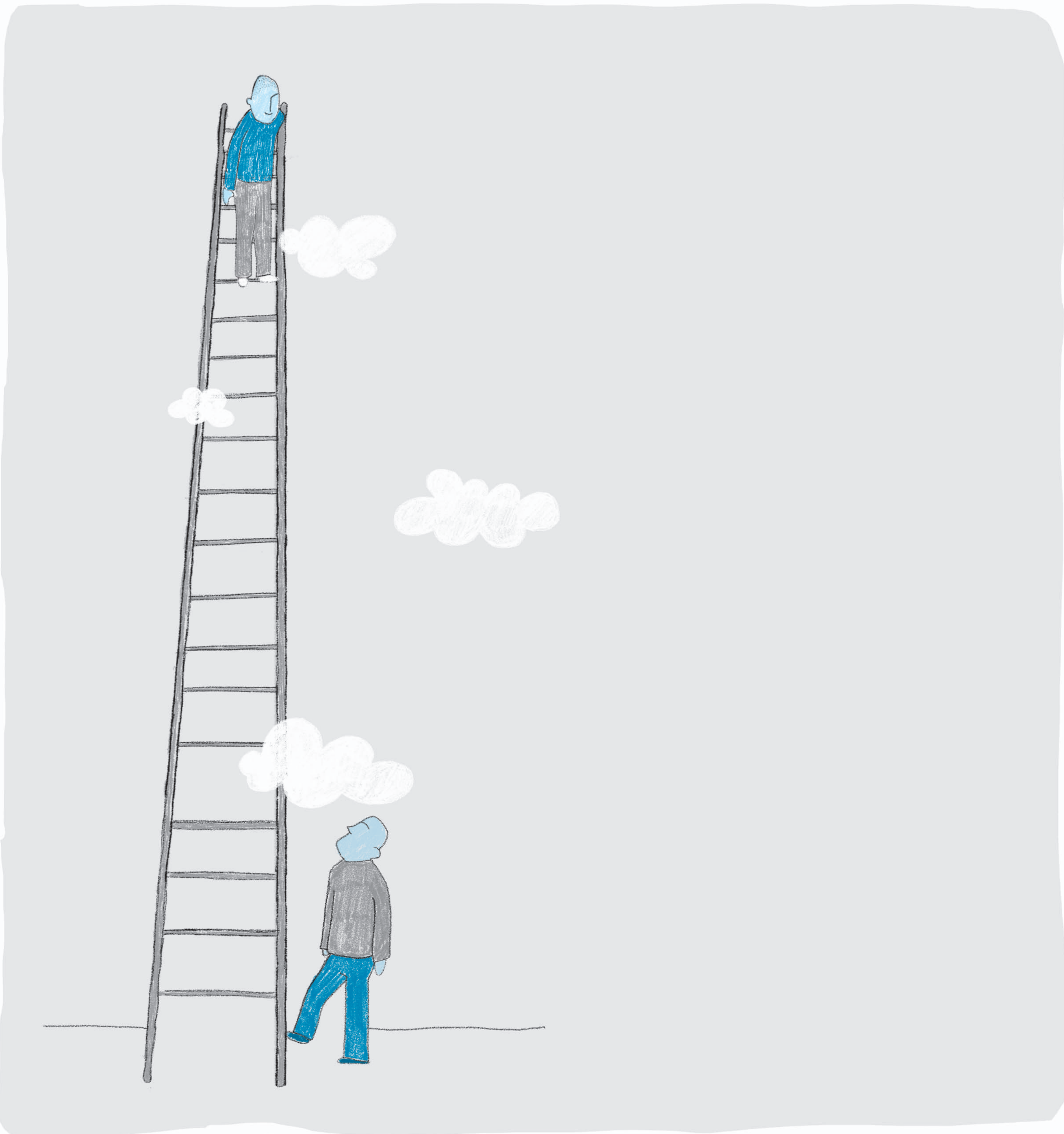
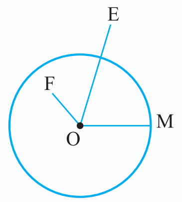
فصل ۱ دایره



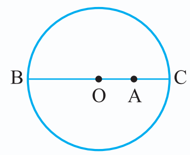
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

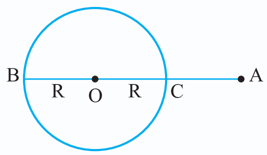
۱ در صفحه، یک نقطه نسبت به دایره یکی از وضعیت‌های زیر را دارد:

$$\begin{cases} OM = R \Leftrightarrow \text{M روی دایره} \\ OE > R \Leftrightarrow \text{E بیرون دایره} \\ OF < R \Leftrightarrow \text{F درون دایره} \end{cases}$$

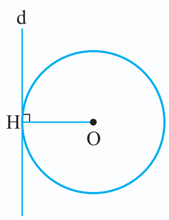


۲ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایرهٔ $E(O,R)$ از نقطهٔ A با وصل‌کردن نقطهٔ A به مرکز دایره و تقاطع خط حاصل با دایره، به دست می‌آید و با فرض $OA = d$ داریم $AC = |d-R|$ ، $AB = d+R$.

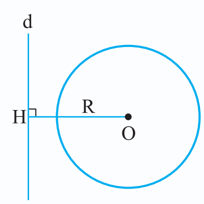




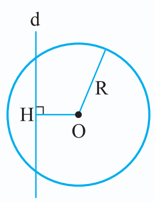
۳ خط مماس بر شعاع نقطهٔ تماس، عمود است و بالعکس خط عمود بر انتهای شعاع، بر دایره مماس است.



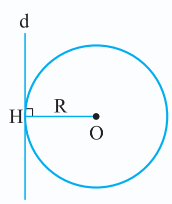
۴ **وضعیت خط و دایره:** دایرهٔ $C(O,R)$ و خط d را در صفحه در نظر می‌گیریم. در این صورت دایرهٔ (C) و خط d یکی از وضعیت‌های زیر را نسبت به یکدیگر دارند.



خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.$(OH>R)$



خط و دایره متقاطع‌اند.$(OH<R)$



خط و دایره مماس‌اند.$(OH=R)$

تست **اگر فاصلهٔ نقاط M و N تا مرکز دایره $C(O,R)$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5Rx+2R^2=0$ باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به دایره چگونه‌اند؟**

۱) هر دو بیرون دایره واقع‌اند.
۲) یکی روی دایره، دیگری بیرون آن واقع است.
۳) هر دو درون دایره‌اند.
۴) یکی درون و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$2x^2-5Rx+2R^2=0 \Rightarrow (2x-R)(x-2R)=0 \Rightarrow x=\frac{R}{2} \text{ یا } x=2R$$

پس فاصلهٔ یکی از نقاط کم‌تر و دیگری بیشتر از شعاع دایره است و این یعنی یک نقطه داخل و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

تست **دورترین و نزدیک‌ترین فاصلهٔ یک نقطهٔ ثابت از نقاط یک دایره به ترتیب ۱۳ و ۵ است. مساحت دایره کدام است؟**

۱) 9π
۲) 16π
۳) 25π
۴) 4π

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فرض کنیم نقطه خارج دایره باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} d+R=13 \\ d-R=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2d=18 \Rightarrow d=9 \ , \ R=13-9=4 \qquad S=\pi R^2=\pi\times 4^2=16\pi$$

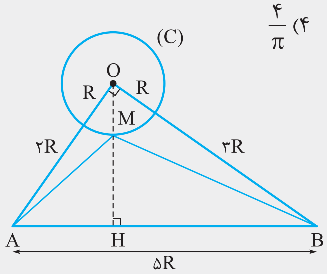
اگر نقطه داخل دایره باشد، داریم:

$$\begin{cases} d+R=13 \\ R-d=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R=18 \Rightarrow R=9 \ , \ d=4 \qquad S=\pi R^2=\pi\times 9^2=81\pi$$

۵ زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد.

تست دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. نقاط A و B از مرکز دایره به ترتیب به فاصله‌های $3R$ و $4R$ قرار دارند. اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر $5R$ و M نقطه‌ای روی دایره باشد، آن‌گاه کم‌ترین مساحت مثلث ABM چه کسری از مساحت دایره است؟

۱) $\frac{3}{\pi}$ ۲) $\frac{7}{2\pi}$ ۳) $\frac{5}{2\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

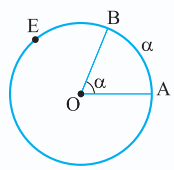


پاسخ گزینهٔ «۲» نقاط A و B خارج دایره قرار دارند و مثلث AOB قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث ABM وقتی کم‌ترین است که ارتفاع MH در آن کم‌ترین مقدار را داشته باشد و این وضعیت برای نقطهٔ M وقتی حاصل می‌شود که از O عمود OH را بر خط شامل AB رسم کنیم در این صورت محل تقاطع این عمود و دایره جای نقطهٔ M است و در این حالت مثلث AMB کم‌ترین مساحت را دارد و مقدار آن به شرح زیر به دست می‌آید:

$$S_{(AOB)}=\frac{1}{2}OH\times AB=\frac{1}{2}OA\times OB \Rightarrow OH=\frac{3R\times 4R}{5R}=2/4\,R$$

$$MH=OH-OM=2/4R-R=1/4\,R \qquad \frac{S_{(ABM)}}{S_{\text{دایره}}}=\frac{\frac{1}{2}MH\times AB}{\pi R^2}=\frac{\frac{1}{2}\times 1/4R\times 5R}{\pi R^2}=\frac{7}{2\pi}$$

۶ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی: اندازهٔ زاویه مرکزی برحسب درجه برابر اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن برحسب درجه می‌باشد و به شعاع دایره بستگی ندارد.



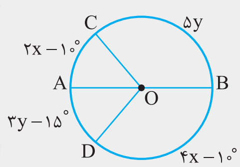
$$\widehat{AEB}=360^\circ-\widehat{AB}=360^\circ-\alpha$$

۷ طول کمان وقتی که اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن α درجه باشد برابر $L=\frac{\alpha}{360}(2\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{180}$ می‌باشد.

تست در شکل مقابل، O مرکز دایره و AB قطر آن است. اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{O}D$ کدام است؟

۱) 115° ۲) 110°

۳) 120° ۴) 116°



پاسخ گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}\widehat{AC}+\widehat{BC}=180^\circ\\ \widehat{AD}+\widehat{BD}=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-10^\circ+5y=180^\circ\\ 3y-15^\circ+4x-10^\circ=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=190^\circ\\ 3y+4x=205^\circ\end{cases}$$

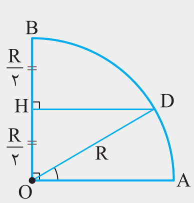
$$-10y+3y=-380^\circ+205^\circ \Rightarrow -7y=-175^\circ \Rightarrow y=25^\circ$$

$$2x+5y=190^\circ \Rightarrow 2x+5\times 25^\circ=190^\circ \Rightarrow 2x=65^\circ \Rightarrow x=32/5^\circ$$

$$C\hat{O}D=\widehat{CD}=\widehat{AC}+\widehat{AD}=2x-10^\circ+3y-15^\circ=65^\circ-10^\circ+75^\circ-15^\circ=115^\circ$$

تست در یک ربع دایره با شعاع‌های عمود بر هم OA و OB، عمودمنصف شعاع OB، کمان ربع دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ کمان AD کدام است؟

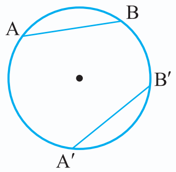
۱) 15° ۲) 45° ۳) 30° ۴) 36°



پاسخ گزینهٔ «۳» مثلث OHD قائم‌الزاویه است و یک ضلع آن نصف وتر آن است $OH=\frac{OD}{2}$، پس اندازهٔ زوایای حادهٔ آن 30° و 60° می‌باشد. در نتیجه داریم:

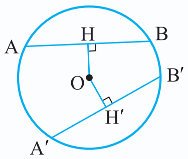
$$H\hat{O}D=60^\circ \Rightarrow A\hat{O}D=90^\circ-60^\circ=30^\circ \Rightarrow \widehat{AD}=30^\circ$$

۸ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.



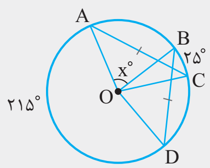
$$AB = A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

۹ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.



$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

تست در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و داریم $\widehat{BC} = ۲۵^\circ$، کمان بزرگ $\widehat{AD}$ برابر ۲۱۵° و $AC = BD$. مقدار x کدام است؟



۱) ۸۰° ۲) ۵۰° ۳) ۶۰° ۴) ۳۰°

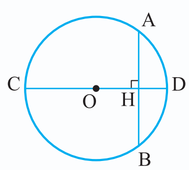
پاسخ گزینهٔ «۳»

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\widehat{AB} + ۲۵^\circ + ۲۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۶۰^\circ$$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = \widehat{AB} \Rightarrow x = ۶۰^\circ$

۱۰ قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

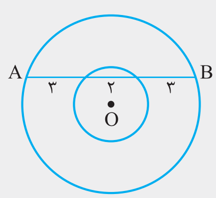


$$CD \perp AB \Rightarrow AH = BH \ , \widehat{AD} = \widehat{BD} \ , \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

۱۱ در هر دایره، قطری از آن وتری را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

۱۲ در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

تست در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند، با توجه به شکل، مساحت ناحیهٔ بین دو دایره کدام است؟



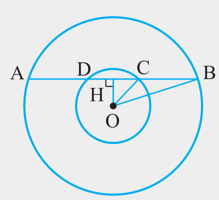
۱) ۱۶π

۲) ۱۲π

۳) ۱۸π

۴) ۱۵π

پاسخ گزینهٔ «۴» از مرکز دایره بر وتر AB خطی عمود رسم می‌کنیم. وترهای AB و CD هر دو نصف می‌شوند، پس $CH = DH = ۱$ و $AH = BH = ۴$. شعاع دایره‌ها را به ترتیب $OB = R$ و $OC = r$ می‌نامیم، بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



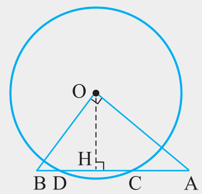
$$\begin{cases} OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \\ OC^۲ = OH^۲ + CH^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} OB^۲ - OC^۲ = BH^۲ - CH^۲ \Rightarrow R^۲ - r^۲ = ۴^۲ - ۱^۲ = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$

مساحت بین دو دایره $= \pi R^۲ - \pi r^۲ = \pi(R^۲ - r^۲) = ۱۵\pi$

تست در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB $(\hat{O} = ۹۰^\circ)$ دایره‌ای به مرکز O وتر AB را در نقطهٔ C و D قطع می‌کند. اگر $BD = ۲$، $CD = ۸$ و $AC = ۴$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث AOB کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲۸\sqrt{۲}$ ۴) $۲۸\sqrt{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۴» عمود OH وتر CD را نصف می‌کند در نتیجه $CH = DH = ۴$ و با توجه به $BD = ۲$ و $AC = ۴$ نتیجه می‌شود $BH = BD + DH = ۲ + ۴ = ۶$ و $AH = CH + AC = ۴ + ۴ = ۸$.

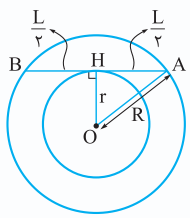


اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی دو پاره‌خطی است که روی وتر پدید می‌آورد. لذا داریم:

$$OH^۲ = AH \times BH = ۸ \times ۶ = ۴۸ \Rightarrow OH = ۴\sqrt{۳}$$

$$S_{(AOB)} = \frac{۱}{۲}OH \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times (۲ + ۸ + ۴) = ۲\sqrt{۳} \times ۱۴ = ۲۸\sqrt{۳}$$

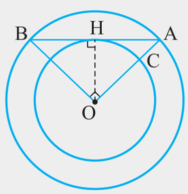
۱۳ همهٔ وترهایی به طول L در دایرهٔ $C(O,R)$، وسطشان روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r = \frac{\sqrt{۴R^۲ - L^۲}}{۲}$ قرار دارد و بالعکس، اگر وتری بر این دایره مماس شود، آن‌گاه در نقطهٔ تماس نصف می‌شود و طول آن برابر L است.



تست دایره‌ای به شعاع ۱۲ مفروض است. وسط همهٔ وترهایی که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان آن‌ها قائمه است، روی یک شکل قرار دارند، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این شکل و دایره کدام است؟

۱) $۶ - ۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲} - ۶$ ۳) $۱۲\sqrt{۲} - ۱۲$ ۴) $۱۲ - ۶\sqrt{۲}$

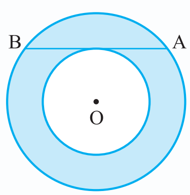
پاسخ گزینهٔ «۴» فرض کنیم AB یکی از وترهایی باشد که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان آن قائمه است $(A\hat{O}B = ۹۰^\circ)$ چون $OA = OB$ است، پس مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس داریم:



$$OA^۲ + OB^۲ = AB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۲^۲ + ۱۲^۲ = ۲ \times ۱۲^۲ \Rightarrow AB = ۱۲\sqrt{۲}$$

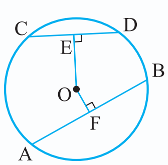
عمود OH وتر AB را نصف می‌کند $AH = BH = ۶\sqrt{۲}$ و چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH میانهٔ نظیر وتر، نصف وتر است؛ پس $OH = \frac{AB}{۲} = ۶\sqrt{۲}$. بنابراین وسط همهٔ وترهای AB روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $۶\sqrt{۲}$ قرار دارد که مطابق شکل فوق کم‌ترین فاصلهٔ دو دایره $AC = ۱۲ - ۶\sqrt{۲}$ است.

نکته اگر دو دایره، هم‌مرکز باشند و وتر AB از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس باشد، آن‌گاه مساحت بین دو دایره برابر است با: $\frac{\pi AB^۲}{۴}$



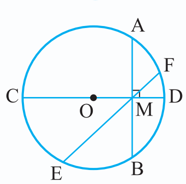
۱۴ از دو وتر نابرابر در یک دایره (یا دو دایره به شعاع‌های مساوی) آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

$$AB > CD \Leftrightarrow OF < OE$$



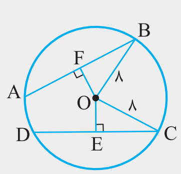
۱۵ کوتاه‌ترین وتر در یک دایره، که از نقطه‌ای داخل دایره رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

$$AB \le EF \le CD$$



تست در دایرهٔ $C(O,۸)$ اندازهٔ وترهای AB و CD به ترتیب $۴x + ۶$ و $۲x + ۸$ است که x عددی صحیح است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر CD بیشتر از فاصلهٔ آن تا وتر AB باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر CD کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۳۰}$



پاسخ گزینهٔ «۲»

$$OE > OF \Rightarrow CD < AB \Rightarrow ۲x + ۸ < ۴x + ۶ \Rightarrow ۱ < x$$ (فرض)

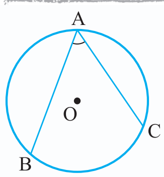
از طرفی شعاع دایره ۸ است و در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCE و OBF داریم:

$$\begin{cases} BF < OB \\ CE < OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{۲} < ۸ \\ \frac{CD}{۲} < ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳ < ۸ \\ x + ۴ < ۸ \end{cases} \Rightarrow x < \frac{۵}{۲}$$

بنابراین $۱ < x < \frac{۵}{۲}$ و چون x عددی صحیح است، نتیجه می‌شود $x = ۲$ و داریم:

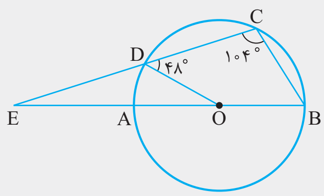
$$CE = \frac{CD}{۲} = \frac{۲x + ۸}{۲} = x + ۴ = ۶$$

$$OC^۲ = OE^۲ + CE^۲ \Rightarrow ۸^۲ = OE^۲ + ۶^۲ \Rightarrow OE^۲ = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸ \Rightarrow OE = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$



۱۶ زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند. اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با، نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن ($\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$).

تست در شکل زیر، O مرکز دایره و AB قطر آن است. امتداد وتر CD امتداد قطر AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $O\hat{D}C = ۴۸^\circ$ و $\hat{C} = ۱۰۴^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\hat{E}$ کدام است؟



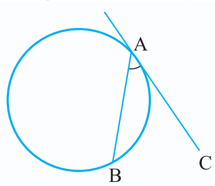
۱) ۱۸° ۲) ۲۲°
۳) ۱۶° ۴) ۲۰°

پاسخ **گزینهٔ «۴»** زاویهٔ C محاطی است، پس داریم:

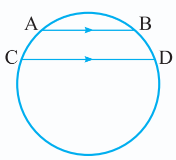
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} \Rightarrow ۱۰۴^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow ۲۰۸^\circ = ۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۲۸^\circ \Rightarrow A\hat{O}D = ۲۸^\circ$$

در مثلث ODE، زاویهٔ $O\hat{D}C$ خارجی است، در نتیجه:

$$O\hat{D}C = \hat{E} + A\hat{O}D \Rightarrow ۴۸^\circ = \hat{E} + ۲۸^\circ \Rightarrow \hat{E} = ۲۰^\circ$$

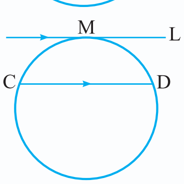


۱۷ زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازهٔ هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن ($\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$).



۱۸ اندازه‌های کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

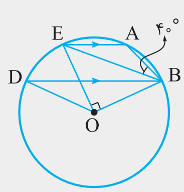
$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$



۱۹ اگر خط L در نقطهٔ M بر دایره مماس باشد و وتر CD موازی L باشد، داریم:

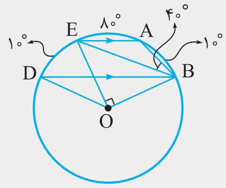
$$\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{DM}$$

تست دایره‌ای به مرکز O مفروض است. دو وتر موازی AE و BD از این دایره در یک طرف O قرار دارند به طوری که $A\hat{B}E = ۴۰^\circ$ و $B\hat{O}E = ۹۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ BOD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰° ۲) ۱۲۰°
۳) ۱۱۵° ۴) ۱۳۰°

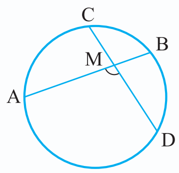
پاسخ **گزینهٔ «۱»** چون $AE \parallel BD$، پس $\widehat{AB}=\widehat{DE}$ و داریم:



$$B\hat{O}E=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AE}+\widehat{AB}=۹۰^\circ \Rightarrow ۲\times ۴۰^\circ+\widehat{AB}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB}=۱۰^\circ$$

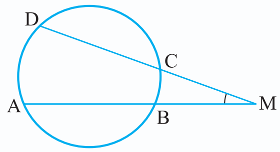
$$B\hat{O}D=\widehat{AB}+\widehat{AE}+\widehat{DE}=۱۰^\circ+۸۰^\circ+۱۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۲۰ زاویهٔ بین دو وتر برابر است با:



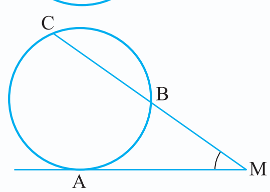
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{۲}$$

۲۱ زاویهٔ بین امتداد دو وتر برابر است با:



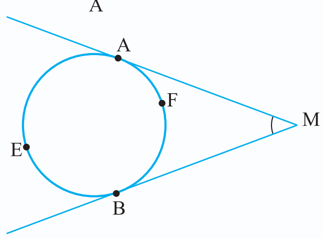
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AD}-\widehat{BC}}{۲}$$

۲۲ زاویهٔ بین خط مماس و امتداد وتر برابر است با:



$$\hat{M}=\frac{\widehat{AC}-\widehat{AB}}{۲}$$

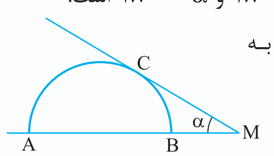
۲۳ زاویهٔ بین دو خط مماس برابر است با:



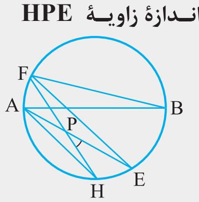
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AEB}-\widehat{AFB}}{۲}$$

۲۴ اگر زاویهٔ بین دو مماس، $\hat{M}=\alpha$ باشد (شکل فوق)، آن‌گاه اندازهٔ کمان‌های AEB و AFB به ترتیب $۱۸۰^\circ+\alpha$ و $۱۸۰^\circ-\alpha$ است.

۲۵ اگر زاویهٔ بین مماس و امتداد قطر نیم‌دایره برابر $\hat{M}=\alpha$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان‌های BC و AC به ترتیب $۹۰^\circ-\alpha$ و $۹۰^\circ+\alpha$ است.



تست **در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر EF موازی است. اگر $F\hat{B}A=۲۰^\circ$، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ HPE کدام است؟**



۱) ۴۰° ۲) ۳۵°

۳) ۳۰° ۴) ۲۵°

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

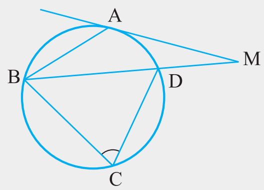
$$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{HE}=\widehat{AF} \quad (۱)$$

$H\hat{P}E$ زاویهٔ برخورد دو وتر AE و FH است. $\Rightarrow H\hat{P}E=\dfrac{\widehat{AF}+\widehat{HE}}{۲} \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow H\hat{P}E=\frac{\widehat{AF}+\widehat{AF}}{۲}=\widehat{AF}$$

زاویهٔ محاطی $\hat{B}=\dfrac{\widehat{AF}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ=\dfrac{\widehat{AF}}{۲} \Rightarrow \widehat{AF}=۴۰^\circ \Rightarrow H\hat{P}E=\widehat{AF}=۴۰^\circ$

تست در شکل روبه‌رو، $MA = AB$ و MA بر دایره، مماس است. اگر $\hat{M} = ۲۵^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۵۰°
۲) ۷۵°
۳) ۶۰°
۴) ۸۵°

پاسخ گزینهٔ «۲»

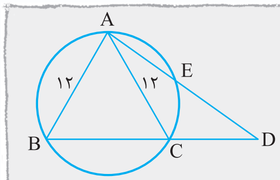
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD} = ۲ \times ۲۵^\circ = ۵۰^\circ \quad (۱)$$

$$MA = AB \Rightarrow A\hat{B}D = \hat{M} = ۲۵^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = ۲۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۵۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۵۰^\circ + \overset{\frown}{AD} = ۵۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

زاویهٔ محاطی $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$

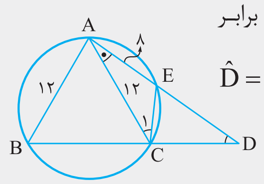
تست در دایرهٔ مقابل، طول دو وتر AB و AC برابر ۱۲ است. نقطهٔ D روی امتداد وتر BC چنان قرار دارد که AD دایره را در E قطع می‌کند و $AE = ۸$ می‌باشد. اندازهٔ DE کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

پاسخ گزینهٔ «۳» C را به E وصل می‌کنیم. چون دو وتر AB و AC برابرند پس کمان‌های آن‌ها نیز برابر است $(\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC})$. داریم:

$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$$

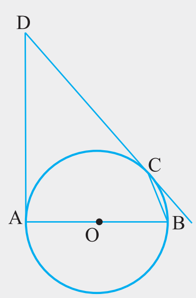


اما زاویهٔ $\hat{C}_۱$ محاطی است، پس $\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ و در نتیجه $\hat{D} = \hat{C}_۱$ می‌شود و داریم:

$$(C\hat{A}E = C\hat{A}D, \hat{C}_۱ = \hat{D}) \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۱۲}{۸ + DE} = \frac{۸}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴ + ۸DE = ۱۴۴ \Rightarrow DE = \frac{۱۴۴ - ۶۴}{۸} = \frac{۸۰}{۸} = ۱۰$$

تست در شکل مقابل، AB قطر دایره و DA و DC به ترتیب در نقاط A و C بر دایره مماس‌اند. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی C برابر ۳۵° باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ D کدام است؟

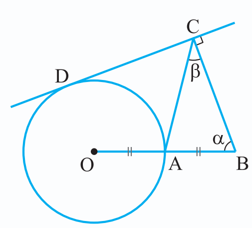


۱) ۶۰°
۲) ۷۰°
۳) ۷۵°
۴) ۶۵°

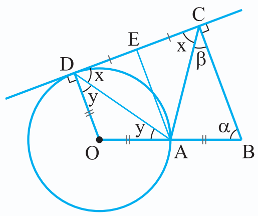
پاسخ گزینهٔ «۲» زاویهٔ ظلی C برابر ۳۵° است، پس اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن $\overset{\frown}{BC} = ۷۰^\circ$ است و داریم:

$$\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ \qquad \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

مثال در شکل مقابل، شعاع OA از دایره‌ای به مرکز O را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B امتداد داده‌ایم. سپس مماس دلخواهی در نقطهٔ D بر دایره رسم می‌کنیم و از B بر آن عمود BC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\alpha = ۲\beta$.



پاسخ A را به E وسط ساق CD در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه OBCD وصل می‌کنیم، پس AE پاره‌خط میانگین ذوزنقه است. لذا با قاعده‌های ذوزنقه موازی است و در نتیجه AE بر CD عمود و نهایتاً AE عمودمنصف CD است که نتیجه می‌دهد مثلث ACD متساوی‌الساقین می‌باشد $(AD = AC)$ و می‌توان نوشت:



$$x = ۹۰^\circ - \beta \Rightarrow y = ۹۰^\circ - x = ۹۰^\circ - (۹۰^\circ - \beta) = \beta$$

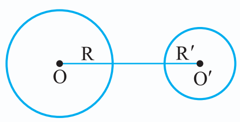
$$D\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - x - x = ۱۸۰^\circ - ۲x = ۱۸۰^\circ - ۲(۹۰^\circ - \beta) = ۲\beta$$

زاویهٔ خارجی مثلث ABC $\;O\hat{A}C \Rightarrow O\hat{A}C = \beta + \alpha \Rightarrow O\hat{A}D + D\hat{A}C = \beta + \alpha \Rightarrow \beta + ۲\beta = \beta + \alpha \Rightarrow \alpha = ۲\beta$

۲۶ وضع دو دایره نسبت به هم: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

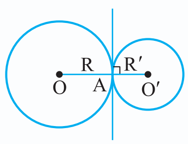
۱- دو دایرهٔ برون هم (دو دایرهٔ متخارج)

$$d > R + R'$$



۲- دو دایرهٔ مماس برون (مماس‌خارج)

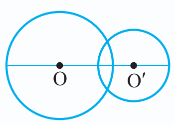
$$d = R + R'$$



نکته نقطهٔ تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و O′A بر خط مماس در نقطهٔ A عمودند.

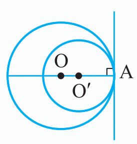
۳- دو دایرهٔ متقاطع

$$R - R' < d < R + R'$$



۴- دو دایره مماس درون

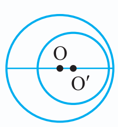
$$d = R - R'$$



نکته نقطهٔ تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و O′A بر خط مماس در نقطهٔ A عمودند.

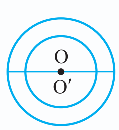
۵- دو دایرهٔ متداخل

$$d < R - R'$$

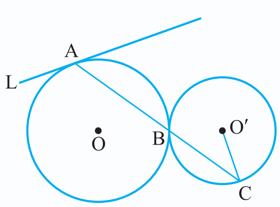


۶- دایره‌های هم‌مرکز

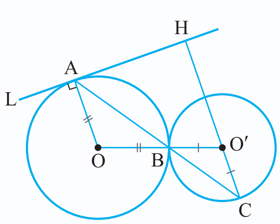
$$d = ۰$$



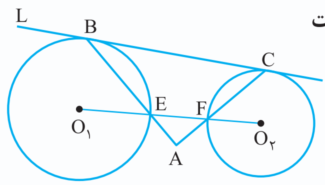
مثال در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ B مماس خارج‌اند و خط L در نقطهٔ A بر دایره به مرکز O مماس است. اگر امتداد AB، دایره به مرکز O′ را در نقطهٔ C قطع کند، ثابت کنید امتداد O′C بر خط L عمود است.



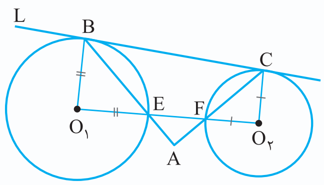
پاسخ خط مماس بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است، پس $OA \perp L$. از طرفی، دو مثلث متساوی‌الساقین AOB و BO′C متشابه‌اند زیرا $O'\hat{B}C = O\hat{B}A$. پس $O\hat{A}C = A\hat{C}H$ و این یعنی CH با OA موازی و در نتیجه بر خط L عمود است.



مثال **در شکل مقابل، دو دایره متخارج هستند و خط L بر هر دو دایره مماس است. ثابت کنید $AB \perp AC$.**



پاسخ فرض کنیم $O_1\hat{B}E = \alpha$ و $O_2\hat{C}F = \beta$، در این صورت با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین O_1BE و O_2CF داریم:



$$B\hat{O}_1E = ۱۸۰^\circ - \alpha - \alpha = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$$

$$C\hat{O}_۲F = ۱۸۰^\circ - \beta - \beta = ۱۸۰^\circ - ۲\beta$$

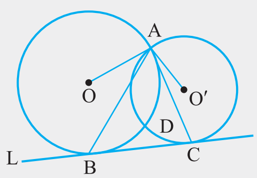
اما O_1B و O_2C هر دو بر خط L عمودند، زیرا شعاع نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پس داریم:

$$O_1B \parallel O_2C \Rightarrow B\hat{O}_1E + C\hat{O}_2F = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

$$A\hat{E}F = O_1\hat{E}B = O_1\hat{B}E = \alpha \ , \ A\hat{F}E = O_2\hat{F}C = O_2\hat{C}F = \beta$$

$$\hat{A} + A\hat{E}F + A\hat{F}E = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{\alpha + \beta}_{۹۰^\circ} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow AB \perp AC$$

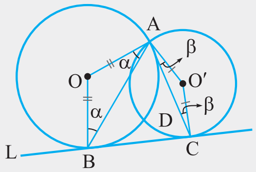
تست **در شکل روبه‌رو، خط L بر دو دایرهٔ متقاطع در نقاط A و D، مماس است. اگر $O\hat{A}O' = ۱۴۸^\circ$ باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های $\overset{\frown}{ADC}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ چند درجه است؟**



۱) ۲۰۰° ۲) ۲۱۲°

۳) ۲۴۸° ۴) ۲۰۲°

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین، زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:



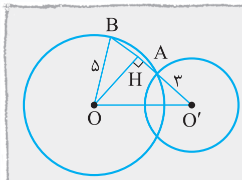
$$A\hat{C}B = ۹۰^\circ - \beta \ , \ A\hat{B}C = ۹۰^\circ - \alpha$$

$$B\hat{A}C + ۹۰^\circ - \beta + ۹۰^\circ - \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = \beta + \alpha$$

$$O\hat{A}O' = \alpha + \beta + B\hat{A}C \Rightarrow ۱۴۸^\circ = \alpha + \beta + \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = ۷۴^\circ$$

$$\overset{\frown}{ADB} + \overset{\frown}{ADC} = A\hat{O}B + A\hat{O'}C = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta = ۳۶۰^\circ - ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۱۴۸^\circ = ۲۱۲^\circ$$

تست **دو دایرهٔ متقاطع $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ مفروض‌اند. به ازای بیشترین مقدار صحیح OO'، خطی که از O' و نقطهٔ تقاطع دو دایره می‌گذرد، وتری با کدام طول در دایرهٔ بزرگ‌تر ایجاد می‌کند؟**



۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** از متقاطع‌بودن دو دایره نتیجه می‌شود $۲ < OO' < ۸$ و بیشترین مقدار صحیح OO' برابر ۷ است. مطابق شکل، AB وتر مطلوب است، پس داریم:

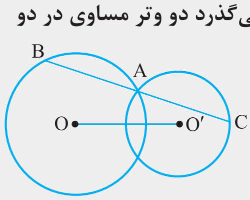
$$OO'^۲ = \underline{OH^۲} + O'H^۲ \Rightarrow OO'^۲ = \underline{OB^۲ - BH^۲} + O'H^۲$$

فیثاغورس

عمود OH وتر AB را نصف می‌کند پس $AH = BH = x$ و داریم:

$$۷^۲ = ۵^۲ - x^۲ + (۳ + x)^۲ \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ - x^۲ + ۶x + x^۲ + ۹ \Rightarrow ۶x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \ , \ AB = ۲AH = ۲x = ۵$$

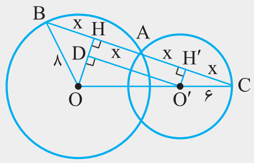
تست **مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ در نقطهٔ A متقاطع‌اند و $OO' = ۱۲$. اگر خطی که از A می‌گذرد دو وتر مساوی در دو دایره ایجاد کند $(AB = AC)$، آن‌گاه طول این وترها کدام است؟**



۱) $\sqrt{۱۲۰}$ ۲) $\sqrt{۱۳۰}$

۳) $\sqrt{۱۴۰}$ ۴) $\sqrt{۱۱۰}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با فرض $AB=AC=۲x$، مطابق شکل داریم:



$$OH^۲=OB^۲-BH^۲=۸^۲-x^۲ \Rightarrow OH=\sqrt{۶۴-x^۲}$$

$$O'H'^۲=O'C^۲-CH'^۲=۶^۲-x^۲ \Rightarrow O'H'=\sqrt{۳۶-x^۲}$$

$$O'D=HH'=AH+AH'=x+x=۲x$$

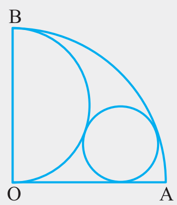
$$OO'^۲=OD^۲+O'D^۲ \Rightarrow OO'^۲=(OH-O'H')^۲+O'D^۲ \Rightarrow (\sqrt{۶۴-x^۲}-\sqrt{۳۶-x^۲})^۲+(۲x)^۲=۱۲^۲$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} ۶۴-t+۳۶-t-۲\sqrt{۶۴-t}\sqrt{۳۶-t}+۴t=۱۴۴ \Rightarrow \sqrt{۶۴-t}\sqrt{۳۶-t}=t-۲۲$$

$$\Rightarrow ۶۴\times۳۶-۱۰۰t+t^۲=t^۲-۴۴t+۲۲^۲ \Rightarrow ۵۶t=۲۳۰۴-۴۸۴=۱۸۲۰ \Rightarrow t=\frac{۱۸۲۰}{۵۶}=۳۲/۵$$

$$x^۲=۳۲/۵ \Rightarrow AB^۲=۴x^۲=۴\times۳۲/۵=۱۳۰ \Rightarrow AB=\sqrt{۱۳۰}$$

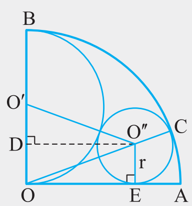
تست **ربع دایره به شعاع‌های عمود بر هم OA و OB مفروض است، نیم‌دایره‌ای به قطر OB داخل آن رسم می‌کنیم. اگر دایره‌ای بر OA و ربع دایره و نیم‌دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع این دایره چه کسری از شعاع ربع دایره است؟**



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** شعاع ربع دایره و شعاع دایره را به ترتیب R و r در نظر می‌گیریم. نیم‌دایره و دایره مماس‌خارج هستند پس $O'O''=\frac{R}{۲}+r$. ربع دایره و دایره در نقطهٔ C مماس‌داخل هستند پس $OO''=R-r$. در مثلث $O'O''O$ ارتفاع $O''D$ را رسم می‌کنیم، داریم:



$$OD=O''E=r\ ,\ O'D=OO'-OD=\frac{R}{۲}-r$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های $O'O''D$ و $OO''D$ داریم:

$$O''D^۲=O'O''^۲-O'D^۲=OO''^۲-OD^۲ \Rightarrow (\frac{R}{۲}+r)^۲-(\frac{R}{۲}-r)^۲=(R-r)^۲-r^۲ \Rightarrow R\times۲r=R\times(R-r-r)$$

$$\Rightarrow ۲r=R-۲r \Rightarrow R=۴r \Rightarrow r=\frac{R}{۴}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

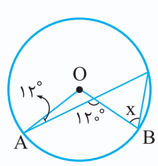
زاویهٔ مرکزی، خط مماس بر دایره

۱- اگر فاصلهٔ نقاط E و F تا مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۷Rx+۴R^۲=۰$ باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به دایره چگونه‌اند؟

۱) هر دو بیرون دایره قرار دارند. ۲) یکی روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

۳) هر دو درون دایره واقع‌اند. ۴) یکی روی دایره و دیگری درون آن قرار دارد.

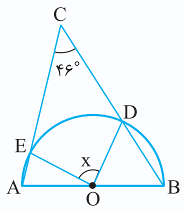
۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مقدار x کدام است؟



۱) ۶۴° ۲) ۶۶°

۳) ۶۰° ۴) ۵۸°

۳- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. مقدار x کدام است؟



۱) ۸۴°

۲) ۹۲°

۳) ۸۶°

۴) ۸۸°

۴- نقاط $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ ، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر $A_1A_4 = b$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع ده‌ضلعی منتظم $A_1A_2 \ldots A_{10}$ کدام است؟

۱) $b - R$ ۲) $b^2 - R^2$ ۳) $R + \frac{b}{2}$ ۴) $b - 2R$

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، دایره‌ای مرکزش روی قاعدهٔ مثلث، در رأس A بر ضلع AC مماس و از رأس B می‌گذرد. ساق مثلث چند برابر شعاع دایره است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}+1$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

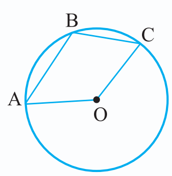
۷- مربع ABCD به ضلع $2+\sqrt{2}$ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر رأس D و مماس بر دو ضلع AB و BC کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}-1$

۸- در نیم‌دایره‌ای به قطر AB ، وتر CD چنان قرار دارد که $\widehat{BC} = 47^\circ$ و $AB = 2CD$. اندازهٔ زاویهٔ AOD چند درجه است؟

۱) ۶۷° ۲) ۵۳° ۳) ۷۳° ۴) ۸۴°

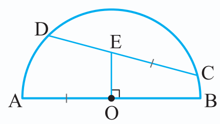
۹- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{A} = 53^\circ$ و $\hat{C} = 47^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ AOC کدام است؟



۱) ۱۵۰° ۲) ۱۶۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۱۴۰°

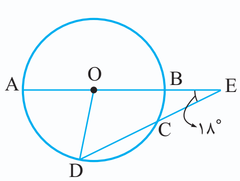
۱۰- در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و $OA = CE$ است. اگر اندازهٔ کمان BC برابر ۱۵° باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان $\widehat{AD}$ چند درجه است؟



۱) ۳۰° ۲) ۶۰°

۳) ۴۵° ۴) ۵۰°

۱۱- در دایره زیر، اندازهٔ پاره‌خط CE با طول شعاع دایره برابر است. اگر $\hat{E} = 18^\circ$ و O مرکز دایره باشد، اندازهٔ کمان AD چند درجه است؟



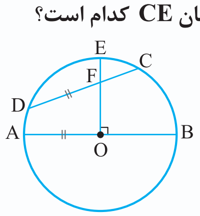
۱) ۴۵°

۲) ۴۸°

۳) ۵۴°

۴) ۷۲°

۱۲- در شکل زیر، شعاع OE بر قطر AB عمود است. اگر اندازهٔ کمان AD برابر ۲۰° و $DF = OA$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان CE کدام است؟



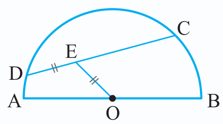
۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۵۰°

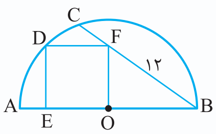
۴) ۵۵°

۱۳- در نیم‌دایره مقابل، $OE = DE$ و قطر AB دو برابر طول پاره‌خط CE است. اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟



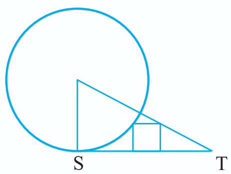
۱) ۱۲۰° ۲) ۱۰۸° ۳) ۱۰۵° ۴) ۹۰°

۱۴- مطابق شکل، O مرکز نیم‌دایره و چهارضلعی $OEDF$ مربع است. اگر $BF = ۱۲$ باشد، آن‌گاه ضلع مربع کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۵- در شکل مقابل، شعاع دایره ۵ و ضلع مربع ۲ است. اندازهٔ مماس TS کدام است؟

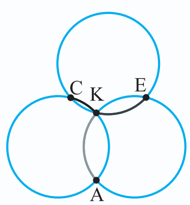


۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۶- دو سر قطر نیم‌دایره‌ای روی دو ضلع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد و موازی وتر مثلث می‌باشد. هم‌چنین وتر مثلث، مماس بر نیم‌دایره است. اگر اندازهٔ اضلاع قائم مثلث ۳ و ۴ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۴۹}$ ۲) $\frac{۶۰}{۴۸}$ ۳) $\frac{۶۰}{۴۷}$ ۴) $\frac{۶۰}{۴۶}$

۱۷- سه دایره به شعاع‌های مساوی از نقطهٔ K می‌گذرند و دوبه‌دو متقاطع‌اند. حاصل $\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{KE} + \overset{\frown}{CK}$ کدام است؟



۱) ۹۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۸۰°
۴) ۲۷۰°

۱۸- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB = AC)$، نقطهٔ O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است، مثلث OCD چگونه است؟ *(سراسری ریاضی ۹٤)*

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

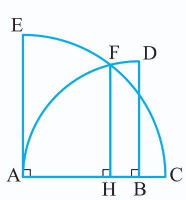
۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB = AC\,,\ \hat{A} = ۴۰^\circ)$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع BC، ساق AC را در E و ساق AB را در D قطع می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ ADE کدام است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۱۰۵° ۳) ۱۰۸° ۴) ۱۱۰°

۲۰- در یک ربع دایره، OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند و نقطهٔ C روی کمان آن، چنان قرار دارد که $BC = ۲$ و $AC = ۶\sqrt{۲}$ است، شعاع ربع دایره کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) ۸

۲۱- در شکل مقابل، دو ربع دایره به شعاع‌های $AB = ۲۵$ و $AC = ۳۰$ رسم شده است. طول پاره‌خط HF کدام است؟



۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴

۲۲- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$، $BC = ۱۲$، نیم‌دایره‌ای به قطر BC ضلع AB را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند، طول پاره‌خط DE کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۳- در یک ربع دایره OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند. نقطهٔ D روی شعاع OA چنان است که $OD = ۱۵$ و $DA = ۵$ و نقطهٔ C روی کمان ربع دایره چنان قرار دارد که $B\hat{C}D = ۹۰^\circ$ است. طول پاره‌خط CD کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

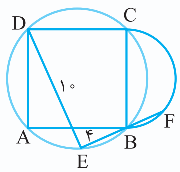
۲۴- در نیم‌دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی AB است و C به A نزدیک‌تر است. اگر $CD = ۱$ و $AC = ۶$ باشد، آن‌گاه شعاع نیم‌دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۵- در مثلث ABC، $\hat{B} = ۲\hat{A}$. نیم‌دایره‌ای به قطر BC ضلع AB را در E و ضلع AC را در D قطع می‌کند به طوری که $CD = ۲$ و $AD = ۶$ است. طول پاره‌خط DE کدام است؟

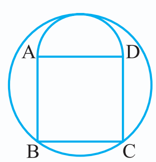
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶- در شکل زیر، دایره‌ای از رأس‌های مربع $ABCD$ می‌گذرد. نیم‌دایره‌ای به قطر BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ E روی دایره چنان است که $DE = ۱۰$ و $BE = ۴$، امتداد BE نیم‌دایره را در نقطهٔ F قطع می‌کند. طول پاره‌خط BF کدام است؟



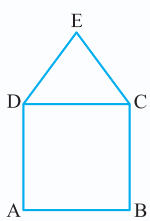
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۷- در شکل روبه‌رو، $ABCD$ مربعی به ضلع واحد و نیم‌دایره به قطر AD می‌باشد. دایره‌ای از رأس‌های B و C گذشته و بر نیم‌دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

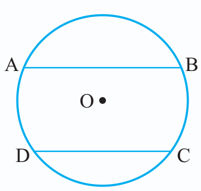
۲۸- در شکل مقابل، $ABCD$ مربعی به ضلع یک و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است. شعاع دایره‌ای که از نقاط A، B و E می‌گذرد، کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

وترهای مساوی، قطر عمود بر وتر، وترهای نامساوی

۲۹- مطابق شکل، در دایره‌ای به مرکز O، دو وتر AB و CD موازی‌اند و فاصلهٔ آن‌ها برابر ۵ است، اگر $AB = ۱۶$ و $CD = ۱۴$، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟



۱) ۶۵π ۲) ۶۸π
۳) $\frac{۱۱۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲۲۵\pi}{۴}$

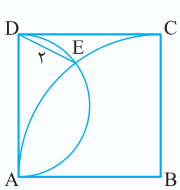
۳۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB وتر مثلث را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند. اگر $BD = ۱۸$ و $CD = ۷$ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط CE کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

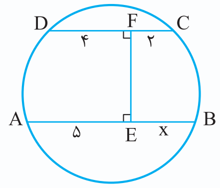
۳۱- امتداد یک وتر به طول ۶ در یک نیم‌دایره، امتداد قطر نیم‌دایره را قطع می‌کند و با آن زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. اگر طول پاره‌خطی که بین نیم‌دایره و نقطهٔ تقاطع با قطر پدید می‌آید، برابر یک باشد، آن‌گاه طول قطر نیم‌دایره کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۲- مطابق شکل، در مربع $ABCD$، نیم‌دایره و ربع دایره در نقطهٔ E متقاطع‌اند و $DE = ۲$. مساحت مربع کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۲۰



۳۳- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

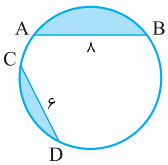
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳۴- دو وتر متقاطع با طول‌های برابر، زاویهٔ 60° با یکدیگر می‌سازند و طول پاره‌خط‌هایی که روی یکدیگر پدید می‌آورند ۲ و ۸ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{30}$

۳۵- شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۳ و ۵ است. از نقطهٔ A روی دایرهٔ بزرگ‌تر، دو وتر AE و AF را مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اندازهٔ EF کدام است؟

۱) ۸/۱ ۲) ۹/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۷/۲



۳۶- در شکل روبه‌رو، مجموع اندازه‌های کمان‌های AB و CD برابر 180° است. اگر $AB = 8$ و $CD = 6$ باشد، آن‌گاه مجموع مساحت‌های نواحی رنگی، کدام است؟

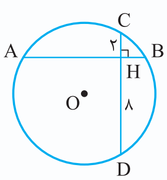
۱) $10\pi - 12$
۲) $\frac{25\pi}{2} - 8$
۳) $10\pi - 16$
۴) $\frac{25\pi}{2} - 24$

۳۷- در یک دایره، نقطهٔ C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متری تقسیم کرده است. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد،آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

۱) ۷۲π ۲) ۱۲۸π ۳) ۶۴π ۴) ۱۰۸π

۳۸- فاصلهٔ وسط کمان نظیر وتر به طول ۲۴ در یک دایره از انتهای این وتر برابر ۱۳ است. فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از انتهای این وتر کدام است؟

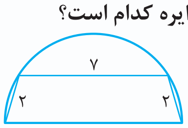
۱) ۲۸/۸ ۲) ۲۱/۲ ۳) ۳۳/۸ ۴) ۳۲/۵



۳۹- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و دو وتر AB و CD بر هم عمودند، اگر $CH = 2$ ، $DH = 8$ و شعاع دایره $r = 3\sqrt{5}$ باشد، اندازهٔ وتر AB کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

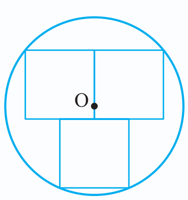
۴۰- مطابق شکل، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعدهٔ کوچک ۷ و ساق‌های ۲ در یک نیم‌دایره محاط شده است. قطر نیم‌دایره کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۸

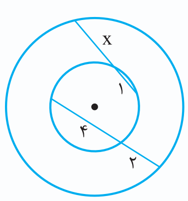
۴۱- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۱۲ و ۱۶ در یک دایره به شعاع ۱۰، محاط است. اگر مرکز دایره خارج ذوزنقه باشد. آن‌گاه مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴



۴۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و مربع‌ها به ضلع ۱۶ سانتی‌مترند. مساحت دایره چند برابر π است؟

۱) ۴۲۵
۲) ۳۶۱
۳) ۴۴۱
۴) ۴۷۵



۴۳- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکزند. با توجه به اندازه‌های داده‌شده x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

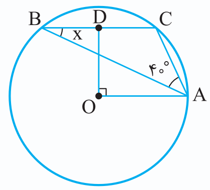
۴۴- دو دایره هم‌مرکزند. وتری به طول $۲\sqrt{۳}$ از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس است و وتری به طول ۶، دایرهٔ کوچک را قطع می‌کند. طول وتر ایجادشده در دایرهٔ کوچک کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) ۴

۴۵- دو دایره هم‌مرکزند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است ۳۲ می‌باشد. اگر کم‌ترین فاصلهٔ نقاط روی دو دایره ۸ باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۴۶- در شکل مقابل، O مرکز دایره و D وسط وتر BC است. x کدام است؟



۱) ۵۰
۲) ۴۵
۳) ۲۵
۴) ۲۰

۴۷- دایره‌ای به شعاع ۱۰ و وتر AB از آن مفروض‌اند. دورترین نقطهٔ دایره از این وتر با طول وتر برابر است. فاصلهٔ مرکز دایره از این وتر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۸- در مثلث ABC، $AC > AB$ و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و M پای میانهٔ رأس A است. اگر $A\hat{O}M = ۹۰^\circ$ و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ $\hat{B}$ چند درجه است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۱۱۵° ۳) ۱۲۵° ۴) ۱۲۰°

۴۹- در مثلث ABC، O مرکز دایرهٔ محیطی و D و M به ترتیب پای نیمساز و میانهٔ رأس A می‌باشند. AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در A' قطع کند. می‌دانیم AM میانهٔ رأس A در مثلث $AA'O$ است، زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۴۵° ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۵۰- نقطهٔ ثابت M در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳، به فاصلهٔ $۲\sqrt{۲}$ از مرکز دایره قرار دارد. وتر دلخواه EF از M می‌گذرد، کم‌ترین محیط مثلث EOF کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۱- دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۵ و ۷ مفروض‌اند. با فرض $AB = ۵$، اگر C نقطه‌ای روی دایرهٔ بزرگ‌تر باشد به طوری که اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}B$ ماکسیمم باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

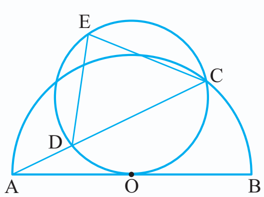
۱) $۵\sqrt{۶}$ ۲) $\frac{۳۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۴}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

زاویهٔ محاطی و ظلی و زاویهٔ برخورد وترها

۵۲- در مثلث ABC، $\hat{B} = ۷۰^\circ$، $\hat{C} = ۳۰^\circ$ است. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و D نقطهٔ وسط کمان نظیر ضلع BC باشد، آن‌گاه زاویهٔ AOD چند درجه است؟

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۴۰° ۳) ۱۵۰° ۴) ۱۳۰°

۵۳- در شکل زیر، دایره در نقطهٔ O بر مرکز نیم‌دایره با قطر BA، مماس است. اگر اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۲۶° باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



۱) ۷۴
۲) ۸۴
۳) ۷۸
۴) ۸۰

۵۴- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۷۲^\circ$، دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. وسط کمان‌های نظیر اضلاع AB و AC را به ترتیب E و D می‌نامیم. زاویهٔ بین دو وتر DE و AC در این دایره چند درجه است؟

۱) ۴۸° ۲) ۵۰° ۳) ۴۴° ۴) ۵۴°

۵۵- در دایره‌ای به قطر AB، نقطهٔ M روی دایره قرار دارد، به طوری که $M\hat{A}B = ۵۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ ظلی که رأس آن، نقطهٔ M است، چند درجه است؟

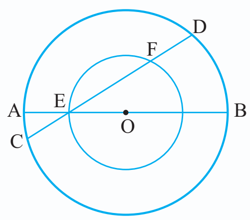
۱) ۲۵° ۲) ۴۵° ۳) ۴۰° ۴) ۳۰°

۵۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$ خط‌های مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقاط A و B، یکدیگر را با زاویهٔ ۵۰° قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ رأس مثلث چند درجه است؟

۱) ۳۵° ۲) ۴۰° ۳) ۴۵° ۴) ۵۰°

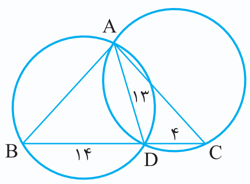
۵۷- زاویهٔ محاطی $B\hat{A}C = ۳۸^\circ$ در یک دایره مفروض است. دو خط مماس بر دایره در نقاط B و C با چه زاویه‌ای متقاطع‌اند؟

۱) ۱۰۸° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۰۵° ۴) ۱۰۴°



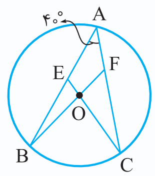
۵۸- در دو دایرهٔ هم‌مرکز، قطر AB دایرهٔ کوچک را در نقطهٔ E قطع کرده است. وتر CD در دایرهٔ بزرگ از E می‌گذرد و دایرهٔ کوچک را در F قطع می‌کند به طوری که $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF} = ۱۰۴^\circ$. اندازهٔ کمان BD چند درجه است؟

۱) ۸۴
۲) ۸۶
۳) ۸۲
۴) ۷۶



۵۹- در شکل مقابل، دو دایره مساوی‌اند و $CD = ۴$، $AD = ۱۳$ و $BD = ۱۴$. مساحت مثلث ABC کدام است؟

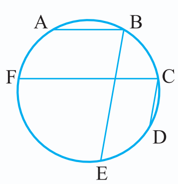
۱) ۹۶
۲) ۷۲
۳) ۱۲۸
۴) ۱۰۸



۶۰- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۴۰^\circ$ است، حاصل $B\hat{E}C + B\hat{F}C$ چند درجه است؟

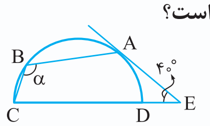
۱) ۸۰° ۲) ۱۲۰
۳) ۱۶۰ ۴) ۲۰۰

۶۱- در شکل زیر، اگر $AB \parallel FC$، $CD \parallel BE$ و $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ $F\hat{C}D$ چند درجه است؟



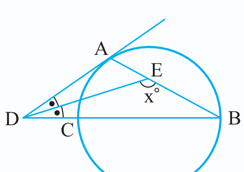
۱) ۹۰°
۲) ۵۵°
۳) ۷۰°
۴) ۸۰°

۶۲- در شکل زیر، E روی امتداد قطر CD قرار دارد. اگر EA بر نیم‌دایره مماس باشد و $\hat{E} = ۴۰^\circ$، آن‌گاه مقدار α کدام است؟

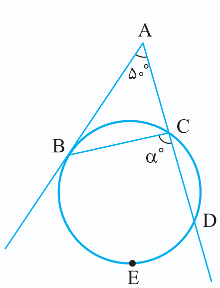


۱) ۱۰۵° ۲) ۱۱۰°
۳) ۱۱۵° ۴) ۱۲۰°

۶۳- در شکل زیر، BC قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر DE نیمساز زاویهٔ $\hat{D}$ باشد، مقدار x کدام است؟



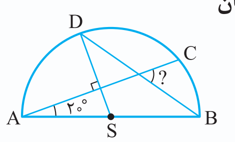
۱) ۱۰۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۳۰°



۶۴- در شکل روبه‌رو، $\hat{A} = ۵۰^\circ$ و AB بر دایره مماس است. اگر $\overset{\frown}{BED} = ۲\overset{\frown}{CD}$، آن‌گاه α کدام است؟

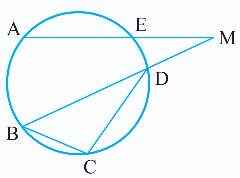
۱) ۱۰۲°
۲) ۸۴°
۳) ۹۲°
۴) ۷۴°

۶۵- AB قطر نیم‌دایره‌ای به مرکز S است. اگر $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AC \perp DS$، آن‌گاه اندازهٔ زاویه‌ای که با علامت سؤال نشان داده شده، کدام است؟



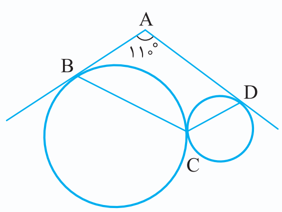
۱) ۴۵°
۲) ۵۵°
۳) ۶۰°
۴) ۷۲°

۶۶- در دایرهٔ روبه‌رو، $\overset{\frown}{AE} = (۴x)^\circ$، $\hat{M} = \overset{\frown}{DE} = x^\circ$ و $B\hat{C}D = ۱۰۰^\circ$. مقدار x کدام است؟



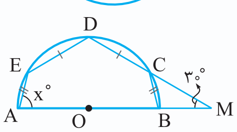
۱) ۱۵
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۲۵

۶۷- مطابق شکل، دو دایره در نقطهٔ C مماس خارج‌اند و AB و AD بر دو دایره مماس‌اند. اگر $\hat{A} = ۱۱۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ BCD چند درجه است؟



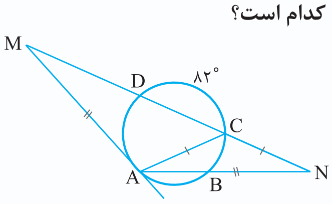
۱) ۱۳۵°
۲) ۱۲۵°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۰°

۶۸- در شکل روبه‌رو، AB قطر نیم‌دایره و $AE = BC$، $CD = ED$ و $\hat{M} = ۳۰^\circ$ است. مقدار x کدام است؟



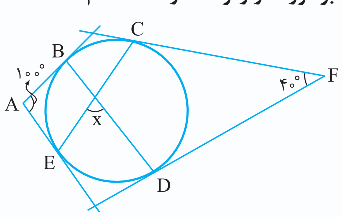
۱) ۶۰°
۲) ۷۵°
۳) ۸۰°
۴) ۶۵°

۶۹- در شکل زیر، $\overset{\frown}{CD} = ۸۲^\circ$، $AC = CN$، $AM = AN$ و MA بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{M}$ کدام است؟



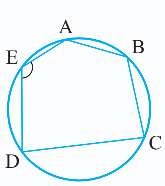
۱) $۳۳/۶^\circ$
۲) $۲۵/۶^\circ$
۳) $۳۲/۱^\circ$
۴) $۲۷/۸^\circ$

۷۰- در شکل زیر، از نقاط A و F بر دایره مماس رسم شده است. اگر $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$ و $\hat{F} = ۴۰^\circ$ آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ برخورد دو وتر BD و CE کدام است؟



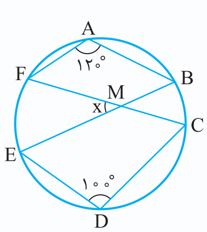
۱) ۷۰°
۲) ۶۰°
۳) ۸۰°
۴) ۵۰°

۷۱- در شکل مقابل، $\frac{AB}{۱} = \frac{BC}{\sqrt{۲}} = \frac{CD}{\sqrt{۳}} = R$ (R شعاع دایره است.)، اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



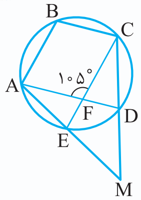
۱) ۱۲۰°
۲) ۱۳۵°
۳) ۱۱۰°
۴) ۱۵۰°

۷۲- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



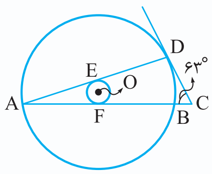
۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۳۵°
۴) ۴۰°

۷۳- در شکل مقابل، ABCF متوازی‌الاضلاع است. اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



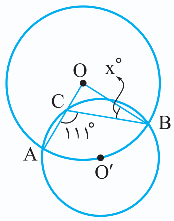
۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۳۵

۷۴- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز و اضلاع زاویهٔ A بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس‌اند و مماس بر دایره در نقطهٔ D، یک ضلع زاویهٔ A را با زاویهٔ ۶۳° قطع می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟



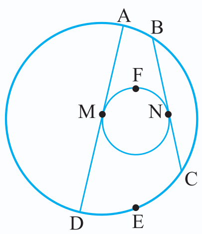
۱) ۱۲°
۲) ۱۰°
۳) ۱۵°
۴) ۱۸°

۷۵- در شکل زیر، O مرکز دایرهٔ بزرگ است و O′ مرکز دایرهٔ کوچک، روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. مقدار x کدام است؟



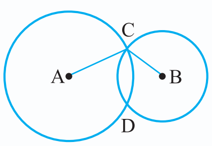
۱) ۲۶°
۲) ۲۷°
۳) ۲۸°
۴) ۲۹°

۷۶- در شکل زیر، وترهای BC و AD از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس‌اند. اگر $\widehat{MFN}$ = ۱۵۴° و $\widehat{DEC}$ = ۷۰°، آن‌گاه اندازهٔ کمان کوچک $\widehat{AB}$ چند درجه است؟



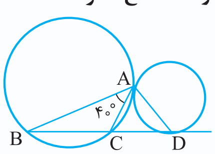
۱) ۱۵°
۲) ۱۶°
۳) ۱۷°
۴) ۱۸°

۷۷- در شکل زیر، دو دایره به مراکز A و B در نقاط C و D متقاطع‌اند. اگر $A\hat{C}B$ = ۱۵۰° باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های کوچک CD در دو دایره کدام است؟



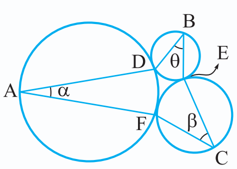
۱) ۴۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۷۸- در شکل زیر، دو دایره، مماس خارج‌اند و خط مماس بر دایرهٔ کوچک در نقطهٔ D، دایرهٔ بزرگ را در نقاط B و C قطع کرده است. اگر $B\hat{A}C$ = ۴۰°، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ CAD کدام است؟



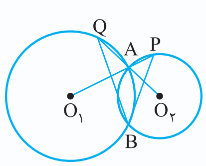
۱) ۶۰°
۲) ۷۰°
۳) ۵۰°
۴) ۸۰°

۷۹- در شکل مقابل، دایره‌ها دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. حاصل $\alpha+\beta+\theta$ کدام است؟



۱) ۴۵°
۲) ۹۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۸۰°

۸۰- مطابق شکل، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر $P\hat{A}Q$ = ۱۱۰°، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ PBQ چند درجه است؟

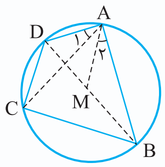


۱) ۳۰°
۲) ۳۵°
۳) ۴۰°
۴) ۴۵°

۸۱- دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟ *(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۴)*

۱) MA ۲) محیط ۳) مساحت ۴) زاویهٔ $B\hat{M}C$

۸۲- در شکل زیر، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. حاصل $AD.BC$ برابر کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*



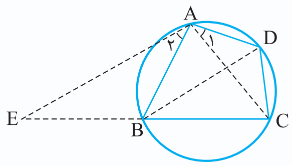
۱) $DM.AC$

۲) $BM.AC$

۳) $AB.CD$

۴) $BD.BM$

۸۳- در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$، حاصل $BD.AC$ کدام است؟



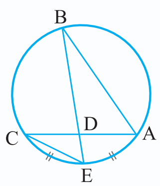
۱) $AD.CE$

۲) $AE.CD$

۳) $AE.BC$

۴) $CD.CE$

۸۴- در شکل روبه‌رو، $AB = ۶$، $BE = ۸$، $AD = ۲/۴$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CE}$، اندازهٔ CE کدام است؟



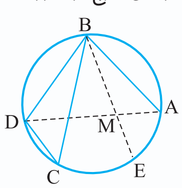
۱) ۳/۶

۲) ۳/۲

۳) ۳/۸

۴) ۳

۸۵- در شکل زیر، $AB = ۶$، $BC = ۸$، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$. اندازهٔ AM کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۳)*



۱) ۲

۲) ۲/۲۵

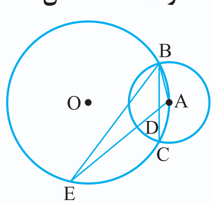
۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

۸۶- دو دایرهٔ مساوی C و C' به شعاع ۲، مماس خارج‌اند. دایرهٔ C'' با کوچک‌ترین قطر بر هر دو دایرهٔ C و C' مماس داخل می‌باشد. اندازهٔ وتری از دایرهٔ C'' که بر هر دو دایرهٔ C و C' مماس است، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۸۷- دو دایره به مرکزهای A و O در نقاط B و C متقاطع‌اند و مرکز دایرهٔ کوچک روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. اگر $AD = ۴$ و $DE = ۱۲$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک کدام است؟



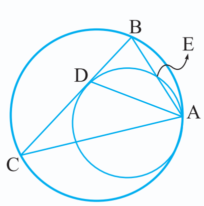
۱) ۹

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۱۲

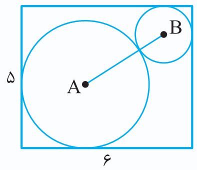
۸۸- در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ A، مماس‌داخل هستند و وتر BC در نقطهٔ D بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس می‌باشد. اگر $AC = b$ و $AE = m$ باشد، آن‌گاه طول پاره خط AD کدام است؟



۱) $\frac{b+m}{۲}$ ۲) $\sqrt{bm}$

۳) $\frac{b+۲m}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{bm}$

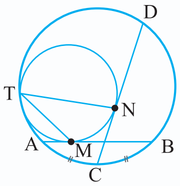
۸۹- در شکل مقابل، ابعاد مستطیل ۵ و ۶ و شعاع دایره به مرکز B برابر یک است و دو دایره مماس خارج‌اند و بر اضلاع مستطیل مماس‌اند. شعاع دایرهٔ بزرگ کدام است؟



۱) $۱۰-۲\sqrt{۱۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۵}-۵$

۳) $۱۲-۲\sqrt{۱۵}$ ۴) $۵-\sqrt{۱۵}$

۹۰- چهار نقطهٔ A، B، C و D طوری روی دایرهٔ بزرگ قرار دارند که $\widehat{AB}=\widehat{BD}=۲\widehat{AC}=۶۰^\circ$. دایرهٔ کوچک‌تر در نقطهٔ T بر دایرهٔ بزرگ‌تر و در نقاط M و N بر وترهای AB و CD مماس است. اندازهٔ زاویهٔ MTN کدام است؟



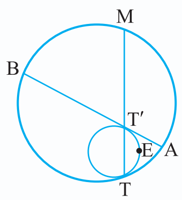
۱) ۳۰°

۲) $۲۲/۵^\circ$

۳) $۲۷/۵^\circ$

۴) ۱۵°

۹۱- دو دایرهٔ C و C′ در نقطهٔ T مماس داخل‌اند و وتر AB از دایرهٔ C در نقطهٔ T′ بر دایرهٔ C′ مماس است. اگر امتداد TT′، دایرهٔ C را در نقطهٔ M قطع کند، با فرض این‌که $\widehat{AT}=۸۰^\circ$ و $\widehat{TET'}=۱۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان $\widehat{AM}$ چند درجه است؟



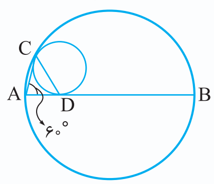
۱) ۳۰°

۲) ۳۵°

۳) ۴۵°

۴) ۴۰°

۹۲- در شکل زیر، AB قطر دایرهٔ بزرگ و دایرهٔ کوچک بر AB در نقطهٔ D مماس و با دایرهٔ بزرگ در نقطهٔ C مماس‌داخل است. اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ BDC چند درجه است؟



۱) ۱۳۵° ۲) ۱۲۰°

۳) ۱۰۵° ۴) ۱۰۸°

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

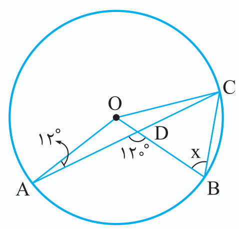
۱- گزینه۲

$$3x^2-7Rx+4R^2=0 \Rightarrow (x-R)(3x-4R)=0$$

$$\Rightarrow x=R \text{ یا } x=\frac{4R}{3}$$

بنابراین یکی از نقاط روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

۲- گزینه۲ O را به C وصل می‌کنیم، مثلث OAC متساوی‌الساقین است $(OA=OC)$، پس $O\hat{C}A=12^\circ$ و در مثلث OCD داریم:



$$12^\circ+120^\circ+B\hat{O}C=180^\circ$$

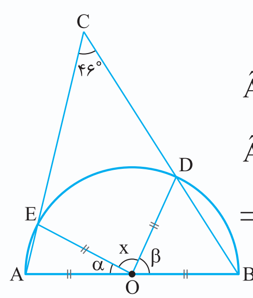
$$\Rightarrow B\hat{O}C=48^\circ$$

$$OB=OC \Rightarrow O\hat{C}B=\hat{B}=x$$

و نهایتاً در مثلث OBC داریم:

$$x+x+48^\circ=180^\circ \Rightarrow 2x=132^\circ \Rightarrow x=66^\circ$$

۳- گزینه۴ **روش اول** در مثلث‌های متساوی‌الساقین AOE و DOB داریم:



$$\hat{A}=\frac{180^\circ-\alpha}{2} \ , \ \hat{B}=\frac{180^\circ-\beta}{2}$$

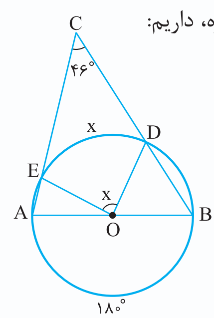
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ-\alpha}{2}+\frac{180^\circ-\beta}{2}+46^\circ=180^\circ$$

$$360^\circ-\alpha-\beta+92^\circ=360^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=92^\circ$$

$$\alpha+\beta+x=180^\circ \Rightarrow x=180^\circ-92^\circ=88^\circ$$

روش دوم $D\hat{O}E$ زاویهٔ مرکزی است، پس اندازهٔ کمان DE برابر x است، اما بنا به زاویهٔ تقاطع امتداد دو وتر دایره، داریم:

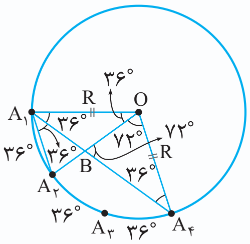


$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE}}{2} \Rightarrow 46^\circ=\frac{180^\circ-x}{2}$$

$$x=180^\circ-2\times46^\circ=180^\circ-92^\circ=88^\circ$$

۴- گزینه۱ مثلث A_1OA_4 متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 108° است، پس $O\hat{A}_4A_1=O\hat{A}_1A_4=36^\circ$. از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین OA_1A_2 اندازهٔ زاویهٔ رأس 36° است.

پس $O\hat{A}_1A_2=72^\circ$ و در نتیجه $A_2\hat{A}_1A_4=36^\circ$ و اندازهٔ زوایا مطابق شکل می‌شود:

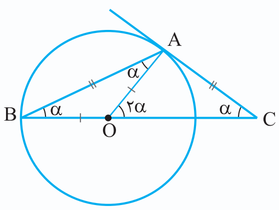


$$A_1A_4=A_1B+A_4B$$

$$\Rightarrow b=A_1A_2+OA_4$$

$$\Rightarrow A_1A_2=b-R$$

۵- گزینه۳ با فرض $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$ در مثلث متساوی‌الساقین AOB بنا به زاویهٔ خارجی، داریم $A\hat{O}C=2\alpha$. شعاع گذرنده بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است پس $O\hat{A}C=90^\circ$ و داریم:



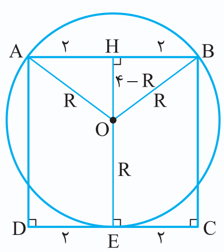
$$\alpha+2\alpha=90^\circ \Rightarrow 3\alpha=90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA=\frac{OC}{2} \\ AC=\frac{\sqrt{3}}{2}OC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times OA=\sqrt{3}\,OA$$

۶- گزینه۲ مرکز دایره روی عمودمنصف AB که همان عمودمنصف CD است، قرار دارد. در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:



$$OA^2=AH^2+OH^2$$

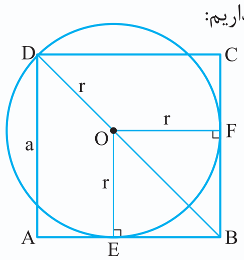
$$\Rightarrow R^2=2^2+(4-R)^2$$

$$\Rightarrow R^2=4+16-8R+R^2$$

$$\Rightarrow 8R=20$$

$$\Rightarrow R=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}=2/5$$

۷- گزینه۱ مرکز دایره روی قطر مربع قرار دارد، زیرا O از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است. چهارضلعی BEOF مربع است و قطر آن برابر است با $OB=r\sqrt{2}$ و داریم:



$$BD=OB+OD$$

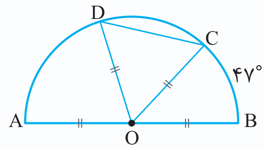
$$\Rightarrow a\sqrt{2}=r\sqrt{2}+r$$

$$\Rightarrow r=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow r=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$=a(2-\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$$

۸- گزینه۲ بنا به فرض $AB = ۲CD$ در نتیجه $OD = OC = CD$، یعنی مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است.

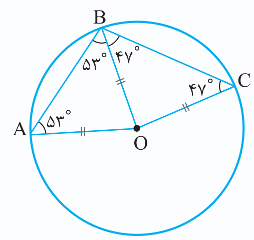


پس $\widehat{CD} = ۶۰^\circ$ و داریم:

$$\widehat{AD} + \widehat{CD} + \widehat{BC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۴۷^\circ = ۷۳^\circ$$

$$A\hat{O}D = \widehat{AD} = ۷۳^\circ$$

۹- گزینه۲ شعاع OB را رسم می‌کنیم، در چهارضلعی ABCO داریم:

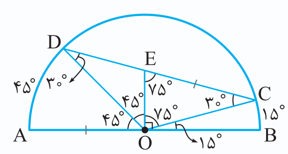


$$A\hat{O}C + ۵۳^\circ + ۵۳^\circ + ۴۷^\circ + ۴۷^\circ = ۳۶۰^\circ$$

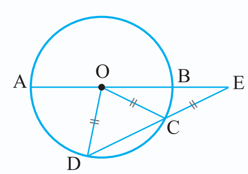
$$\Rightarrow A\hat{O}C = ۱۶۰^\circ$$

۱۰- گزینه۳ زاویهٔ مرکزی BOC برابر ۱۵° است، پس $C\hat{O}E = ۷۵^\circ$. چون مثلث OCE متساوی‌الساقین است دو زاویهٔ دیگر آن ۷۵° و ۳۰° می‌شود، به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث COD، داریم: $\hat{D} = ۳۰^\circ$ و $D\hat{O}E = ۷۵^\circ - ۳۰^\circ = ۴۵^\circ$

نهایتاً $\widehat{AD} = A\hat{O}D = ۹۰^\circ - ۴۵^\circ = ۴۵^\circ$.



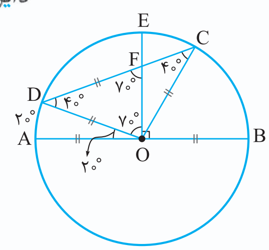
۱۱- گزینه۳ بنا به فرض، CE با شعاع دایره برابر است، شعاع OC را رسم می‌کنیم، مثلث OCE متساوی‌الساقین است پس $E\hat{O}C = \hat{E} = ۱۸^\circ$ و بنا به زاویهٔ خارجی داریم: $O\hat{C}D = ۳۶^\circ$.



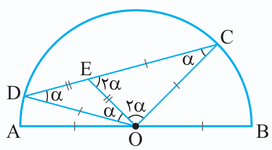
اما مثلث OCD متساوی‌الساقین است پس $\hat{D} = ۳۶^\circ$ و نهایتاً به کمک زاویهٔ خارجی در مثلث DOE داریم:

$$A\hat{O}D = \hat{D} + O\hat{E}D = ۳۶^\circ + ۱۸^\circ = ۵۴^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = ۵۴^\circ$$

۱۲- گزینه۱ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D$ برابر ۲۰° است پس $D\hat{O}E = ۷۰^\circ$ و در مثلث متساوی‌الساقین ODF دو زاویهٔ دیگر ۷۰° و ۴۰° است. مثلث ODC متساوی‌الساقین است پس $\hat{C} = ۴۰^\circ$ و بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث OFC نتیجه می‌شود $C\hat{O}E = ۳۰^\circ$ و در نتیجه $\widehat{CE} = ۳۰^\circ$.



۱۳- گزینه۲ بنا به فرض $OE = DE$ و $AB = ۲CE$ است پس $CE = OC = OD$. اگر $\hat{D} = \alpha$، آن‌گاه زوایا برحسب α مطابق شکل زیر می‌شود. در نتیجه:

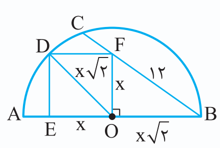


$$\alpha + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

$$C\hat{O}D = ۳\alpha = ۳ \times ۳۶^\circ = ۱۰۸^\circ \xrightarrow[\text{مرکزی}]{\text{زاویهٔ}} \widehat{CD} = ۱۰۸^\circ$$

۱۴- گزینه٤ قطر مربع همان شعاع دایره است، اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم: $OD = OB = x\sqrt{۲}$ و در نتیجه:

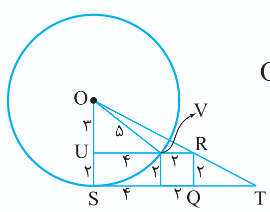


$$۱۲^۲ = x^۲ + (x\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴۸ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۳}$$

۱۵- گزینه۳ مطابق شکل $OU = OS - US = ۵ - ۲ = ۳$ و در مثلث قائم‌الزاویه OUV نتیجه می‌شود $UV = ۴$ و به کمک قضیهٔ تالس یا تشابه داریم:

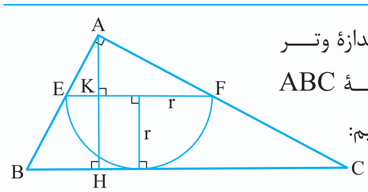


$$\overset{\Delta}{OUR} \sim \overset{\Delta}{OST} \Rightarrow \frac{OU}{OS} = \frac{UR}{TS}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۴+۲}{TS}$$

$$\Rightarrow TS = \frac{۳۰}{۳} = ۱۰$$

۱۶- گزینه۱ اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $BC = ۵$ است و داریم:



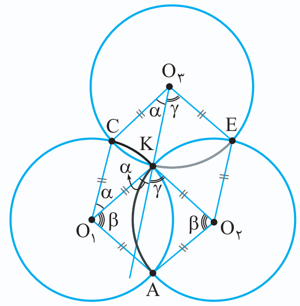
$$S_{(ABC)} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AH - KH}{AH} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{\frac{۱۲}{۵} - r}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{۲r}{۵} \Rightarrow \frac{۱۲ - ۵r}{۱۲} = \frac{۲r}{۵}$$

$$\Rightarrow ۶۰ - ۲۵r = ۲۴r \Rightarrow r = \frac{۶۰}{۴۹}$$

۱۷- گزینه۳ مطابق شکل چهارضلعی‌های O_1KO_3C، O_2KO_3E و O_1KO_2A همگی لوزی هستند، در نتیجه:



$O_1\hat{K}O_2=\alpha+\gamma$

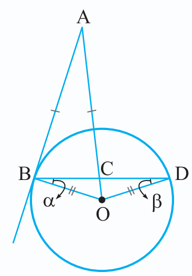
$O_1\hat{K}O_2+K\hat{O}_2A=180^\circ$

$\Rightarrow \alpha+\gamma+\beta=180^\circ$

و با توجه به این‌که α و β و γ زوایای مرکزی‌اند، نتیجه می‌شود:

$\overset{\frown}{CK}+\overset{\frown}{KE}+\overset{\frown}{AK}=180^\circ$

۱۸- گزینه۲ در مثلث متساوی‌الساقین OBD داریم $\alpha=\beta$. AB بر دایره مماس است، پس زاویهٔ ABO قائمه است که نتیجه می‌دهد $A\hat{B}C=90^\circ-\alpha$ اما مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس می‌توان نوشت:

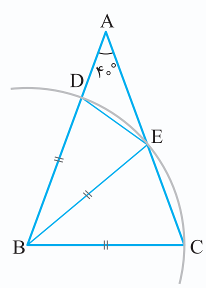


$A\hat{C}B=A\hat{B}C=90^\circ-\alpha \Rightarrow O\hat{C}D=90^\circ-\alpha$

$\overset{\Delta}{OCD}: O\hat{C}D+O\hat{D}C+C\hat{O}D=180^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ-\alpha+\underbrace{\beta}_{\alpha}+C\hat{O}D=180^\circ \Rightarrow C\hat{O}D=90^\circ$

۱۹- گزینه۲ مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB=AC)$. داریم:



$\hat{C}=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$

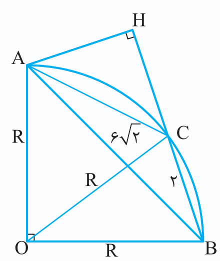
$BC=BE \Rightarrow B\hat{E}C=\hat{C}=70^\circ$

$B\hat{E}C=E\hat{B}A+\hat{A} \Rightarrow E\hat{B}A=70^\circ-40^\circ=30^\circ$ زاویهٔ خارجی

$BE=BD \Rightarrow B\hat{D}E=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$

$A\hat{D}E=180^\circ-B\hat{D}E=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

۲۰- گزینه۲ در مثلث‌های متساوی‌الساقین OAC و OBC داریم:



$A\hat{C}B=O\hat{C}A+O\hat{C}B$

$=\frac{180^\circ-A\hat{O}C}{2}+\frac{180^\circ-B\hat{O}C}{2}$

$=\frac{360^\circ-90^\circ}{2}=135^\circ$

$\Rightarrow A\hat{C}H=45^\circ \Rightarrow C\hat{A}H=45^\circ \Rightarrow AH=CH$

$AH^2+CH^2=AC^2 \Rightarrow 2AH^2=2CH^2=(6\sqrt{2})^2$

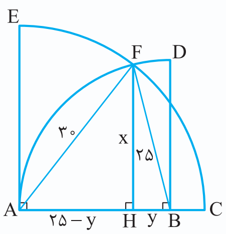
$\Rightarrow AH=CH=6$

$AB^2=AH^2+BH^2=6^2+(6+2)^2=6^2+8^2=10^2$

$\Rightarrow AB=10$

$AB^2=R^2+R^2 \Rightarrow 10^2=2R^2 \Rightarrow R=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

۲۱- گزینه٤



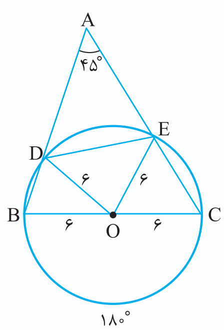
$\begin{cases}x^2+(25-y)^2=30^2\\ x^2+y^2=25^2\end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (25-y)^2-y^2=30^2-25^2$

$\Rightarrow (25-y+y)(25-y-y)=(30-25)(30+25)$

$\Rightarrow 25(25-2y)=5\times 55 \Rightarrow 25-2y=11 \Rightarrow y=7$

$x^2+7^2=25^2 \Rightarrow x^2=25^2-7^2=24^2 \Rightarrow x=24$

۲۲- گزینه۲



$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{2}$

$\Rightarrow 45^\circ=\frac{180^\circ-\overset{\frown}{DE}}{2}$

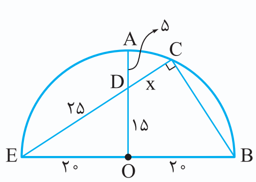
$\Rightarrow \overset{\frown}{DE}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

$\Rightarrow D\hat{O}E=90^\circ$

$\Rightarrow DE^2=OE^2+OD^2$

$\Rightarrow DE^2=6^2+6^2=2\times 6^2 \Rightarrow DE=6\sqrt{2}$

۲۳- گزینه۱ ربع دایره را به صورت نیم‌دایره به قطر BE رسم می‌کنیم. چون زاویهٔ C قائمه است، پس امتداد ضلع CD از انتهای قطر BE، یعنی نقطهٔ E می‌گذرد. شعاع ربع دایره برابر $OA=15+5=20$ است. بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم: $DE=\sqrt{20^2+15^2}=25$ و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ODE و CBE متشابه‌اند:

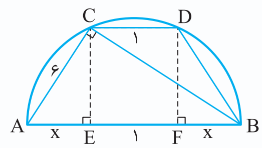


$\overset{\Delta}{ODE}\sim\overset{\Delta}{CBE} \Rightarrow \frac{DE}{BE}=\frac{OE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{25}{40}=\frac{20}{CE} \Rightarrow CE=\frac{800}{25}=32$

$\Rightarrow DE+CD=32 \Rightarrow 25+x=32 \Rightarrow x=7$

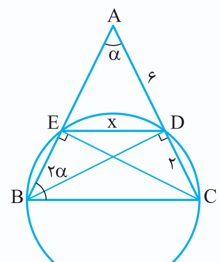
-۲۴ گزینه۲ چون $CD \parallel AB$ است، پس $BD = AC = ۶$ و ذوزنقهٔ ABDC متساوی‌الساقین است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بنا به روابط طولی داریم:



$$AC^۲ = AE \times AB$$
$$\Rightarrow ۶^۲ = x\times(x+۱+x)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ + x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(۲x+۹) = ۰$$
$$\xrightarrow{x>۰} x = ۴ \Rightarrow AB = ۲x+۱ = ۹$$

پس شعاع دایره ۴/۵ است.

-۲۵ گزینه۳ می‌دانیم در مثلثی که یک زاویه، دو برابر زاویهٔ دیگر باشد $(\hat{B} = ۲\hat{A})$ آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه دو برابر واسطهٔ هندسی مجموع دو ضلع دیگر و ضلع روبه‌رو به زاویه نصف است.



پس می‌توان نوشت:

$$AC^۲ = (AB+BC)\times BC \Rightarrow ۸^۲ = (c+a)\times a$$

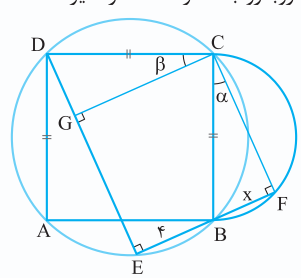
در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC و ADB داریم:

$$BD^۲ = BC^۲ - CD^۲ = AB^۲ - AD^۲ \Rightarrow a^۲ - ۲^۲ = c^۲ - ۶^۲$$
$$\Rightarrow c^۲ - a^۲ = ۳۶ - ۴ = ۳۲$$
$$\begin{cases} c^۲ - a^۲ = ۳۲ \\ a\times(c+a) = ۶۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{c-a}{a} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲c - ۲a = a \Rightarrow ۲c = ۳a \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{۲}{۳}$$

اما اگر در مثلث ABC دو ارتفاع BD و CE رسم شود، آن‌گاه مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است و داریم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{۶}{c} \Rightarrow x = \frac{۶a}{c} = ۶\times\frac{۲}{۳} = ۴$$

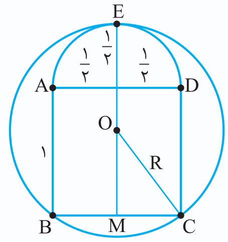
-۲۶ گزینه۲ زاویهٔ DEB روبه‌رو به قطر BD در دایره است، پس قائمه است.



هم‌چنین زاویهٔ F نیز قائمه است. عمود CG را رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ α و β برابرند، زیرا زوایای GCF و BCD قائمه هستند. پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CDG و CBF به حالت یک ضلع و زاویهٔ حادهٔ مجاور آن همنهشت‌اند. در نتیجه $CG = CF$ و این یعنی، چهارضلعی EFCG مربع است و $GD = BF = x$ و داریم:

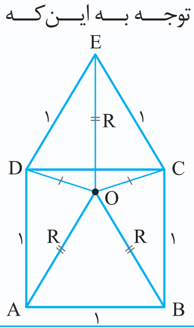
$$GE = EF \Rightarrow DE - GD = BE + BF$$
$$\Rightarrow ۱۰ - x = ۴ + x \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

-۲۷ گزینه۱ مرکز دایره از نقاط B و C به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. ME برابر ضلع مربع به علاوهٔ قطر نیم‌دایره است، یعنی:



$$OM = ME - OE = \frac{۳}{۲} - R$$
$$OC^۲ = OM^۲ + MC^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = (\frac{۳}{۲} - R)^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = \frac{۹}{۴} - ۳R + R^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow R = \frac{۵}{۶}$$

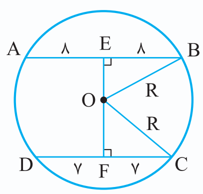
-۲۸ گزینه۱ مرکز دایره‌ای که از نقاط A، B و E می‌گذرد، روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس $OC = OD$. دو مثلث OEC و OBC به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت‌اند، در نتیجه $O\hat{C}E = O\hat{C}B = \frac{۹۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$ و با توجه به این‌که $D\hat{E}O = O\hat{E}C = ۳۰^\circ$، نتیجه می‌شود:



$$D\hat{O}E = C\hat{O}E = ۷۵^\circ$$

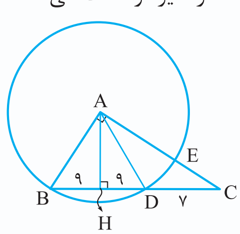
پس مثلث‌های OCE، ODE، ODA و OCB همنهشت و متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۳۰° هستند، در نتیجه $R = ۱$ است.

-۲۹ گزینه۱ فرض کنیم $OE = x$، در این صورت $OF = ۵ - x$ است و داریم:



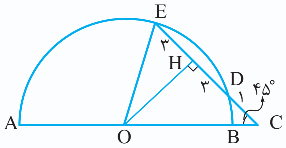
$$OB^۲ = BE^۲ + OE^۲$$
$$OC^۲ = OF^۲ + CF^۲$$
$$\xrightarrow{OB=OC=R} ۸^۲ + x^۲ = (۵-x)^۲ + ۷^۲$$
$$\Rightarrow ۶۴ + x^۲ = ۲۵ + x^۲ - ۱۰x + ۴۹$$
$$۱۰x = ۱۰ \Rightarrow x = ۱$$
$$S_{\text{دایره}} = \pi R^۲ = \pi(۶۴ + x^۲) = \pi(۶۴+۱) = ۶۵\pi$$

-۳۰ گزینه۲ ارتفاع AH وتر BD در دایره را نصف می‌کند، داریم:



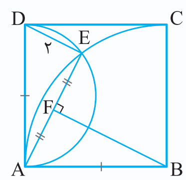
$$AB^۲ = BH \times BC$$
$$= ۹\times(۱۸+۷) = ۹\times ۲۵$$
$$\Rightarrow AB = ۳\times ۵ = ۱۵$$
$$AC^۲ = CH \times BC$$
$$= (۹+۷)(۱۸+۷) = ۱۶\times ۲۵ \Rightarrow AC = ۴\times ۵ = ۲۰$$
$$CE = AC - AE = AC - AB = ۲۰ - ۱۵ = ۵$$

۳۱- **گزینه۴** عمود OH وتر DE را نصف می‌کند در نتیجه $CH = CD + DH = ۱ + ۳ = ۴$. مثلث OCH قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $OH = CH = ۴$ و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه OHE داریم:



$$AB = ۱۰ , OE = ۵$$

۳۲- **گزینه۴** عمود BF بر وتر AE در ربع دایره، آن را نصف می‌کند. زاویهٔ AED قائمه است و دو زاویهٔ $B\hat{A}F$ و $A\hat{D}E$ هر دو متمم $D\hat{A}E$ هستند پس برابرند. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFB و DEA به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند در نتیجه:

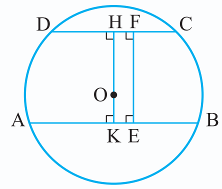


$$AF = DE = ۲ \Rightarrow EF = ۲ \Rightarrow AE = ۴$$

$$AD^۲ = DE^۲ + AE^۲ = ۲^۲ + ۴^۲ = ۲۰$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع}} = ۲۰$$

۳۳- **گزینه۲** دو وتر AB و CD موازی‌اند. از مرکز دایره بر آن‌ها عمود رسم می‌کنیم، این وترها نصف می‌شوند.



$$AB = AE + BE = ۵ + x$$

$$\Rightarrow AK = BK = \frac{۵ + x}{۲}$$

$$CD = DF + CF = ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow CH = DH = \frac{۶}{۲} = ۳$$

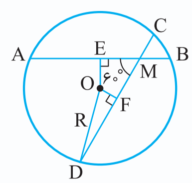
چهارضلعی KEFH مستطیل است، پس:

$$KE = HF \Rightarrow BK - BE = CH - CF$$

$$\Rightarrow \frac{۵ + x}{۲} - x = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۵ - x}{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow ۵ - x = ۲ \Rightarrow x = ۳$$

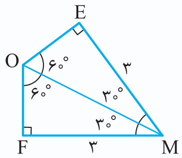
۳۴- **گزینه۱** بنا به فرض، زاویهٔ بین دو وتر برابر AB و CD برابر ۶۰°، $MB = MC = ۲$ و $MA = MD = ۸$ است. عمودهای OE و OF را رسم می‌کنیم. دو وتر نصف می‌شوند و داریم:



$$MF = MD - DF$$

$$= ۸ - \frac{۸ + ۲}{۲} = ۸ - ۵ = ۳$$

حال O را به M وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF و OME همنهشت‌اند و داریم:



$$MF = \frac{\sqrt{۳}}{۲} OM \Rightarrow ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times OM$$

$$\Rightarrow OM = ۲\sqrt{۳}$$

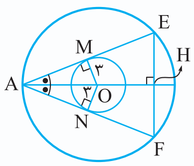
$$OF = \frac{OM}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODF، داریم:

$$R^۲ = OF^۲ + DF^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۵^۲ = ۳ + ۲۵ = ۲۸$$

$$\Rightarrow R = ۲\sqrt{۷}$$

۳۵- **گزینه۲** طول دو وتر AE و AF برابر است، زیرا فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر می‌باشد $(OM = ON = ۳)$ و با توجه به $OA = ۵$ از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:



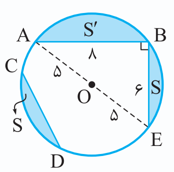
$$AM = AN = ۴ \Rightarrow AE = AF = ۸$$

$$\overset{\Delta}{OAM} \sim \overset{\Delta}{EAH} \Rightarrow \frac{OM}{EH} = \frac{OA}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{EH} = \frac{۵}{۸}$$

$$EH = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸ \Rightarrow EF = ۲EH = ۲ \times ۴/۸ = ۹/۶$$

۳۶- **گزینه۴** وتر BE را مساوی وتر CD رسم می‌کنیم. مساحت قطعات نظیر وترهای BE و CD برابر است، مقدار آن‌ها را S و مساحت قطعهٔ نظیر وتر AB را S′ می‌نامیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} \\ (\text{فرض})\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = ۱۸۰^\circ$$

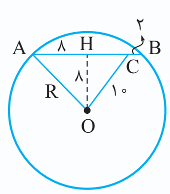
پس AE قطر دایره است و بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AE^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow AE = ۱۰$$

$$S + S' = (\text{مساحت نیم‌دایره}) - (\text{مساحت مثلث } ABE)$$

$$\Rightarrow S + S' = \frac{\pi \times ۵^۲}{۲} - \frac{۶ \times ۸}{۲} = \frac{۲۵\pi}{۲} - ۲۴$$

۳۷- **گزینه۲** عمود OH وتر AB را نصف می‌کند چون $AB = ۱۶$ است، نتیجه می‌شود $AH = BH = ۸$ و $CH = ۸ - ۲ = ۶$.



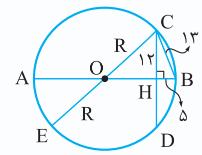
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH داریم:

$$OH^۲ = OC^۲ - CH^۲ = ۱۰^۲ - ۶^۲ = ۸^۲ \Rightarrow OH = ۸$$

$R^2 = 8^2 + 8^2 = 2\times 8^2 \Rightarrow R = 8\sqrt{2}$

در نتیجه: مساحت دایره $= \pi R^2 = 128\pi$

۳۸- گزینه۳ بنا به فرض $CD = 24$ پس $CH = DH = 12$ و $BC = 13$ است. دورترین نقطهٔ دایره از انتهای وتر CD با وصل یکی از دو انتها به مرکز دایره به دست می‌آید (CE قطر دایره) داریم:



$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow BH = 5$

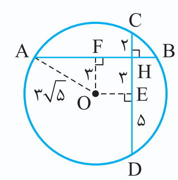
$OH = OB - BH = R - 5$

$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow R^2 = (R-5)^2 + 12^2$

$\Rightarrow R^2 = R^2 - 10R + 25 + 144 \Rightarrow 10R = 169$

$\Rightarrow R = 16.9 \Rightarrow CE = 2R = 2\times 16.9 = 33.8$

۳۹- گزینه۴ بنا به فرض $CH = 2$ و $DH = 8$ است، از مرکز دایره به دو وتر عمود می‌کنیم. چهارضلعی OEHF مستطیل است و داریم:



$HE = DH - DE = 8 - \frac{8+2}{2} = 8 - 5 = 3$

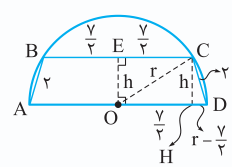
$\Rightarrow OF = 3$

$OA^2 = AF^2 + OF^2 \Rightarrow (3\sqrt{5})^2 = AF^2 + 3^2$

$\Rightarrow 45 = AF^2 + 9 \Rightarrow AF^2 = 36 \Rightarrow AF = 6$

$\Rightarrow AB = 2AF = 12$

۴۰- گزینه۴ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCE و DCH داریم:



$$\begin{cases} OC^2 = OE^2 + CE^2 \\ CD^2 = CH^2 + DH^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = h^2 + (\frac{7}{2})^2 \\ 2^2 = h^2 + (r - \frac{7}{2})^2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{-} r^2 - 4 = (\frac{7}{2})^2 - (r - \frac{7}{2})^2$

$\Rightarrow r^2 - 4 = (\frac{7}{2} + r - \frac{7}{2})(\frac{7}{2} - r + \frac{7}{2})$

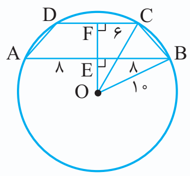
$\Rightarrow r^2 - 4 = r(7 - r) \Rightarrow r^2 - 4 = 7r - r^2$

$\Rightarrow 2r^2 - 7r - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$

$\Rightarrow r = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4}$

$\xrightarrow{r>0} r = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow AD = 2r = 8$

۴۱- گزینه۱ قطر عمود بر AB بر CD نیز عمود است و هر دو وتر را نصف می‌کند. داریم:



$\overset{\Delta}{OBE}: OE^2 + BE^2 = OB^2$

$\Rightarrow OE^2 = 10^2 - 8^2 = 36$

$\Rightarrow OE = 6$

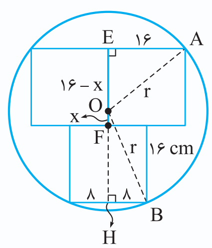
$\overset{\Delta}{OCF}: OF^2 + CF^2 = OC^2$

$\Rightarrow OF^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow OF = 8$

$EF = OF - OE = 8 - 6 = 2$

$S_{(ABCD)} = \frac{1}{2} EF \times (AB + CD) = \frac{1}{2} \times 2 \times (16 + 12) = 28$

۴۲- گزینه۱ فرض کنیم $OF = x$ باشد، در این صورت $OE = 16 - x$ و $OH = 16 + x$ است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAE و OBH داریم:



$$\left.\begin{array}{l} r^2 = 16^2 + (16 - x)^2 \\ r^2 = 8^2 + (16 + x)^2 \end{array}\right\}$$

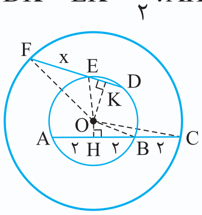
$\Rightarrow 16^2 + (16 - x)^2 = 8^2 + (16 + x)^2$

$\Rightarrow 16^2 + 16^2 - 32x + x^2 = 8^2 + 16^2 + 32x + x^2$

$\Rightarrow 64x = 16^2 - 8^2 = 8 \times 24 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$

$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi(8^2 + (16+3)^2) = \pi(64 + 361) = 425\pi$

۴۳- گزینه۳ از مرکز دایره‌ها بر وترهای AB و DE عمود می‌کنیم. دو وتر نصف می‌شود: $AH = BH = 2$، $DK = EK = \frac{1}{2}$.



شعاع دایره‌های کوچک و بزرگ را به ترتیب r و R می‌نامیم، داریم:

$OH^2 = OB^2 - BH^2 = OC^2 - CH^2$

$\Rightarrow r^2 - 2^2 = R^2 - 4^2$

$OK^2 = OE^2 - EK^2 = OF^2 - KF^2$

$\Rightarrow r^2 - (\frac{1}{2})^2 = R^2 - (x + \frac{1}{2})^2$

از تفاضل دو تساوی فوق داریم:

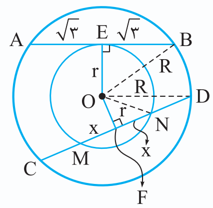
$2^2 - (\frac{1}{2})^2 = 4^2 - (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow 4 - \frac{1}{4} = 16 - (x + \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm\frac{7}{2}$

$\xrightarrow{x>0} x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

۴۴- گزینه۲ از مرکز دایره‌ها بر دو وتر AB و CD عمود رسم می‌کنیم، این وترها در دو دایره نصف می‌شوند:

$AE = BE = \sqrt{۳}$ ، $CF = DF = ۳$, $MF = NF = x$



$$OB^۲ = OE^۲ + BE^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = r^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = r^۲ + ۳ \quad (۱)$$

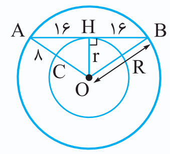
$$OF^۲ = OD^۲ - DF^۲ = ON^۲ - NF^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۳^۲ = r^۲ - x^۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow r^۲ + ۳ - ۳^۲ = r^۲ - x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۹ - ۳ = ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶} \qquad MN = ۲x = ۲\sqrt{۶}$$

۴۵- گزینه۲

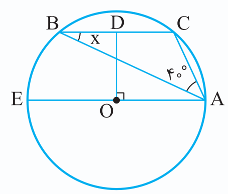


$$\begin{cases} R^۲ - r^۲ = ۱۶^۲ \\ R - r = ۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} R + r = \frac{۱۶ \times ۱۶}{۸} = ۳۲$$

$$\begin{cases} R + r = ۳۲ \\ R - r = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲r = ۲۴ \Rightarrow r = ۱۲$$

۴۶- گزینه۳ چون D وسط وتر BC است، پس OD بر BC عمود است در نتیجه وتر BC با شعاع OA موازی است. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AE پدید آید.



$$AE \| BC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$$

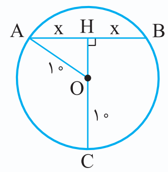
$$B\hat{A}C = \frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC} = ۲ \times ۴۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{BE} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\widehat{AC} + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = ۵۰^\circ$$

زاویهٔ محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵۰^\circ}{۲} = ۲۵^\circ$

۴۷- گزینه۲ C دورترین نقطهٔ دایره از وتر AB است. بنا به فرض AB = CH می‌باشد، فرض کنیم AH = x باشد. داریم:



$$OH = CH - OC$$

$$= AB - OC = ۲x - ۱۰$$

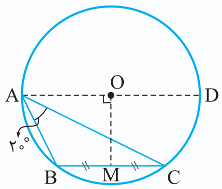
$$OA^۲ = AH^۲ + OH^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰^۲ = x^۲ + (۲x - ۱۰)^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۵x^۲ - ۴۰x + ۱۰۰ \Rightarrow ۵x^۲ - ۴۰x = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۴۰}{۵} = ۸ \quad , \quad OH = ۲ \times ۸ - ۱۰ = ۶$$

۴۸- گزینه۲ چون M وسط BC است، پس OM بر BC عمود است، لذا OA || BC. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AD ایجاد شود:



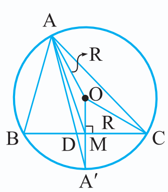
$$AD \| BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC} = ۲ \times ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$$

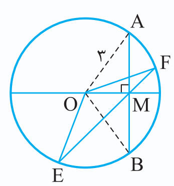
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\widehat{CD} + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = ۷۰^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ + ۳۵^\circ = ۱۲۵^\circ$$

۴۹- گزینه۲ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است، پس اگر M وسط BC باشد، OM بر آن عمود است و کمان نظیر BC را نصف می‌کند $(\widehat{A'B} = \widehat{A'C})$ و نیمساز زاویهٔ A یعنی AD امتدادش از نقطهٔ A' می‌گذرد. اگر در مثلث AOA'، AM میانهٔ OA' باشد در این صورت $OM = MA'$ می‌شود، یعنی شعاع OA' نصف می‌شود. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMC، $OM = \frac{OC}{۲}$ است که نتیجه می‌دهد زاویهٔ $O\hat{C}M = ۳۰^\circ$ و $M\hat{O}C = ۶۰^\circ$، بنابراین $\widehat{A'C} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{BC} = ۱۲۰^\circ$ و نهایتاً: $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{۲} = ۶۰^\circ$



۵۰- گزینه۲ محیط مثلث EOF وقتی کم‌ترین است که ضلع EF در آن کوچک‌ترین باشد، کم‌ترین طول EF، وتر AB است که بر قطر گذرنده از M عمود است.



بنا به فرض $OM = ۲\sqrt{۲}$ و شعاع دایره ۳ است، پس می‌توان نوشت:

$$OA^۲ = OM^۲ + MA^۲ \Rightarrow ۳^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + MA^۲$$

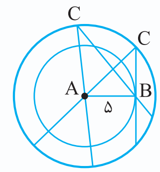
$$\Rightarrow MA^۲ = ۹ - ۸ = ۱ \Rightarrow MA = ۱$$

$$\text{کم‌ترین محیط } \overset{\Delta}{EOF} = \text{محیط } \overset{\Delta}{AOB} = OA + OB + AB$$

$$= ۳ + ۳ + ۲ \times ۱ = ۶ + ۲ = ۸$$

۵۱- گزینه۱ یک ضلع زاویهٔ ACB همواره قطری در دایرهٔ بزرگ و ضلع دیگر آن وتری از این دایره است. هر چه‌قدر این وتر از مرکز دایره دورتر باشد، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}B$ بزرگ‌تر است و ماکسیمم

فاصلهٔ این وتر تا مرکز دایره وقتی است که BC بر AB عمـود باشـد، داریم:



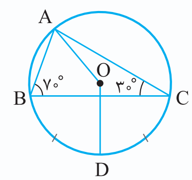
$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + 5^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow BC = 2\sqrt{6}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

۵۲- گزینه۲



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

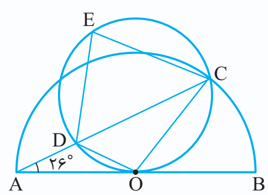
$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 160^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$

۵۳- گزینه۳ O را بـه C و D وصل مـی‌کنـیم. زاویـهٔ A در نیم‌دایره، محاطی است، پس داریم:



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 26^\circ = 52^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = 52^\circ$$

اما زاویهٔ $B\hat{O}C$ در دایره، زاویهٔ ظلی است، پس می‌توان نوشت:

$$B\hat{O}C = \frac{\overset{\frown}{OC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{OC} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$$

بنا به زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس بر دایره داریم:

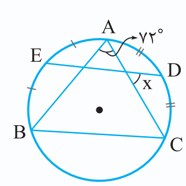
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{OC} - \overset{\frown}{OD}}{2} \Rightarrow 26^\circ \times 2 = 104^\circ - \overset{\frown}{OD}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{OD} = 104^\circ - 52^\circ = 52^\circ$$

و نهایتاً اندازهٔ زاویهٔ محاطی E برابر است با:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{COD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{OD} + \overset{\frown}{OC}}{2} = \frac{52^\circ + 104^\circ}{2} = 26^\circ + 52^\circ = 78^\circ$$

۵۴- گزینه٤



$$x = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AE}}{2}$$

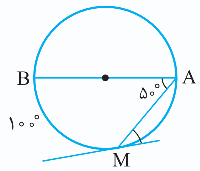
$$= \frac{\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{4}$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 72^\circ = 144^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

بنابراین: $x = \frac{216^\circ}{4} = 54^\circ$

۵۵- گزینه۳

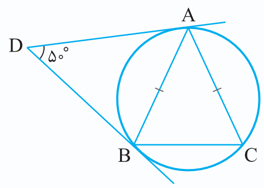


محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

ظلی $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

۵۶- گزینه٤



$$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \hat{D}$$

$$= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

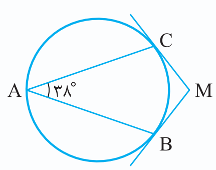
$$AB = AC$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} = 130^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 2 \times 130^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

۵۷- گزینه٤



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

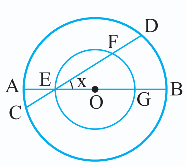
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 38^\circ = 76^\circ$$

$$\hat{M} = 180^\circ - \overset{\frown}{BC} = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

۵۸- گزینه٤ بنا بـه زاویـهٔ وتـرهـای متقـاطع AB و CD در دایرهٔ بزرگ داریم:

$$x = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

اما در دایرهٔ کوچک بنا به زاویهٔ محاطی داریم:



$$x = \frac{\overset{\frown}{GF}}{2} = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{EF}}{2}$$

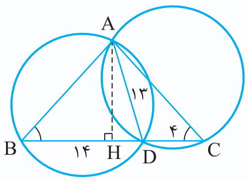
پس از تساوی‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = 180^\circ - (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF})$$

اما بنا به فرض $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF} = 104^\circ$ پس نهایتاً داریم:

$$\overset{\frown}{BD} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

۵۹- گزینه۴ چون دو دایره مساوی‌اند. کمان کوچک $\overset{\frown}{AD}$ در هر دو دایره هم‌اندازه است، پس $\hat{B}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است. با رسم ارتفاع AH داریم:

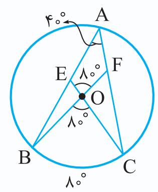


$$BC=۱۸ \Rightarrow BH=CH=۹ \Rightarrow DH=CH-CD=۹-۴=۵$$

$$AH^۲=AD^۲-DH^۲=۱۳^۲-۵^۲=۱۲^۲ \Rightarrow AH=۱۲$$

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۸=۱۰۸$$

۶۰- گزینه۲ زاویهٔ A محاطی است، پس $\overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}=۸۰^\circ$ و در نتیجه $B\hat{O}C=۸۰^\circ$ و $E\hat{O}F=۸۰^\circ$ داریم:

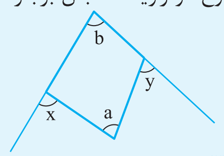


$$B\hat{E}C+B\hat{F}C=\hat{A}+E\hat{O}F$$

$$\Rightarrow B\hat{E}C+B\hat{F}C=۴۰^\circ+۸۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

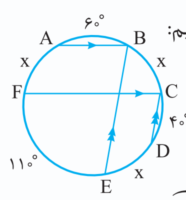
برای اثبات تساوی فوق کافی است O را به A وصل کنیم و از زاویهٔ خارجی در مثلث استفاده کنیم.

یادآوری در هر چهارضلعی محدب، مجموع دو زاویهٔ مقابل برابر مجموع دو زاویهٔ خارجی دیگر است.



$$\Rightarrow a+b=x+y$$

۶۱- گزینه۴ فرض کنیم $AF=x$، بنا به وترهای موازی نتیجه می‌شود $DE=BC=AF=x$. مفروضات مسئله روی شکل آورده شده است، داریم:



$$x+۶۰^\circ+x+۴۰^\circ+x+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

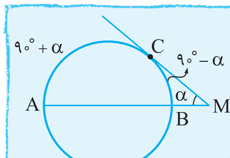
$$\Rightarrow ۳x=۱۵۰^\circ \Rightarrow x=۵۰^\circ$$

محاطی $F\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{DF}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{x+۱۱۰^\circ}{۲}$

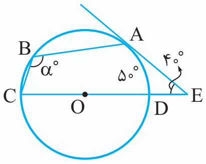
$$=\frac{۵۰^\circ+۱۱۰^\circ}{۲}=\frac{۱۶۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$

۶۲- گزینه۳

نکتهٔ کلیدی MC بر دایره مماس و AB قطر دایره است. با فرض $\hat{M}=\alpha$ داریم:



$$\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ-\alpha\ ,\ \overset{\frown}{AC}=۹۰^\circ+\alpha$$

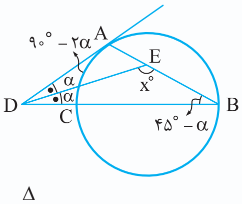


$$\overset{\frown}{AD}=۹۰^\circ-۴۰^\circ=۵۰^\circ$$

محاطی $A\hat{B}C=\alpha=\frac{۱۸۰^\circ+\overset{\frown}{AD}}{۲}$

$$=\frac{۱۸۰^\circ+۵۰^\circ}{۲}=۱۱۵^\circ$$

۶۳- گزینه۳

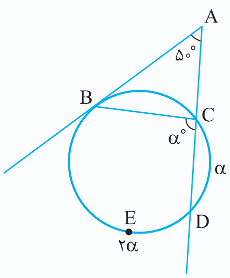


$$\overset{\frown}{AC}=۹۰^\circ-\hat{D}=۹۰^\circ-۲\alpha$$

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=۴۵^\circ-\alpha$$

$$\overset{\Delta}{BDE}: x+\alpha+۴۵^\circ-\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۳۵^\circ$$

۶۴- گزینه۳ در این پرسش داریم:



$$B\hat{E}D=۲\alpha$$

$$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{CD}=۲\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\alpha$$

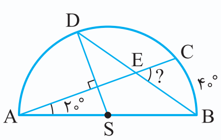
$$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-۲\alpha-\alpha=۳۶۰^\circ-۳\alpha$$

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BED}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰^\circ=\frac{۲\alpha-(۳۶۰^\circ-۳\alpha)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha=۴۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۹۲^\circ$$

۶۵- گزینه۲ قطر شامل DS بر وتر AC عمود است، پس AC و کمان نظیر آن را نصف می‌کند. $(\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD})$



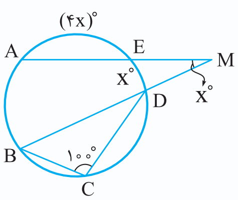
$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{AD}+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۷۰^\circ$$

$$B\hat{E}C=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۴۰^\circ+۷۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ$$

۶۶- گزینه۴



$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}+۴x+x}{۲}$$

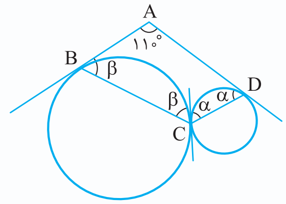
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۲۰۰^\circ-۵x$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲۰۰^\circ-۵x-x}{۲} \Rightarrow ۸x=۲۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=۲۵^\circ$$

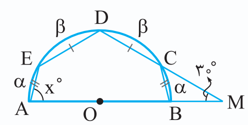
۶۷- گزینه۲ مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ C رسم می‌کنیم. در نقطهٔ C دو زاویهٔ ظلی پدید می‌آید که هر کدام با زوایای

ظلی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ برابرند، زیرا کمان‌های روبه‌رو به آن‌ها یکسان است. در چهارضلعی ABCD داریم:



$$\alpha+\beta+\alpha+\beta+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۲۵۰^\circ$$
$$\Rightarrow B\hat{C}D=۱۲۵^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=۱۲۵^\circ$$

۶۸- گزینه۲ کمان‌های نظیر وترهای مساوی برابرند، پس $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}=\alpha$ و $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{CD}=\beta$. بنا به زاویهٔ محاطی داریم:



$$\hat{A}=\frac{\alpha+۲\beta}{۲}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\alpha+۲\beta}{۲}$$

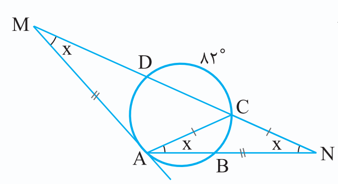
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AED}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\alpha+\beta-\alpha}{۲}\Rightarrow \beta=۶۰^\circ$$

$$\alpha+\beta+\beta+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

$$x=\frac{۲\beta+\alpha}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ+۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

۶۹- گزینه۴ فرض کنیم $\hat{M}=x$. با توجه به $AM=AN$، داریم: $\hat{N}=x$



در مثلث متساوی‌الساقین ACN نتیجه می‌شود $N\hat{A}C=x$. داریم:

$$N\hat{A}C=x\Rightarrow B\hat{A}C=x\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=x\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۲x$$

$$\hat{N}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AD}-۲x}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۴x$$

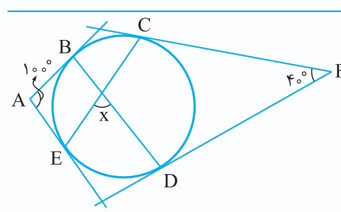
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AB}+۲x-۴x}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۴x$$

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۴x+۲x+۸۲^\circ+۴x=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰x=۳۶۰^\circ-۸۲^\circ=۲۷۸\Rightarrow x=۲۷/۸^\circ$$

۷۰- گزینه۱



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{BE}=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\\ \overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ-\hat{F}=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ\end{array}\right\}$$

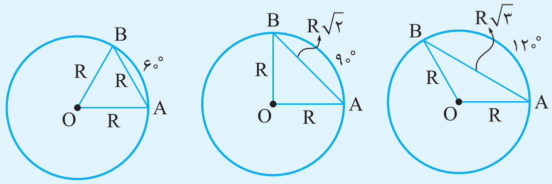
$$\xrightarrow{+}\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CD}=۲۲۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CD})=۳۶۰^\circ-۲۲۰^\circ=۱۴۰^\circ$$

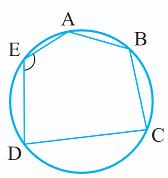
$$x=\frac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$

۷۱- گزینه۲

نکتهٔ کلیدی در دایره به شعاع R اگر اندازهٔ وتر AB برابر R یا $R\sqrt{۲}$ یا $R\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ به ترتیب برابر °۶۰ یا °۹۰ یا °۱۲۰ است و برعکس.

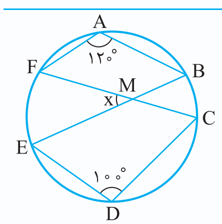


با توجه به نکتهٔ فوق و فرض $AB=R$، $BC=R\sqrt{۲}$ و $CD=R\sqrt{۳}$، نتیجه می‌شود: $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD}=۱۲۰^\circ$ و نهایتاً داریم:



$$\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{ABD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$
$$=\frac{۶۰^\circ+۹۰^\circ+۱۲۰^\circ}{۲}=\frac{۲۷۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$$

۷۲- گزینه۴



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BDF}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=۲\times۱۲۰^\circ=۲۴۰^\circ$$

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{EAC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BAF}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BAF}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=۲\times۱۰۰^\circ=۲۰۰^\circ$$

از جمع دو تساوی فوق داریم:

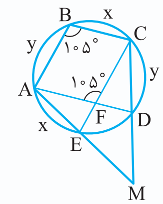
$$\overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BAF}+۲(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})=۴۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})+۲(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})=۴۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=۴۴۰^\circ-۳۶۰^\circ=۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{۸۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

۷۳- گزینه۳



$AB \parallel CE \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE} = x$

$BC \parallel AD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = y$

ABCF متوازی‌الاضلاع است. $\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{AFC} = 105^\circ$

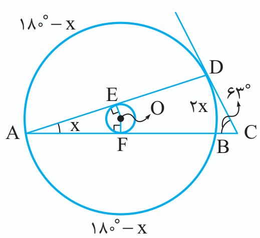
$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AEC}}{2} = 105^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AEC} = 210^\circ$

$\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AEC} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ \Rightarrow x + y = 150^\circ$

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{x + y - (360^\circ - x - y - x - y)}{2}$

$= \frac{3(x+y) - 360^\circ}{2} = \frac{450^\circ - 360^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

۷۴- گزینه۴ چون $OE = OF$ (شعاع‌های دایرهٔ کوچک)، پس مرکز دایرهٔ بزرگ از دو وتر AB و AD به یک فاصله است، لذا

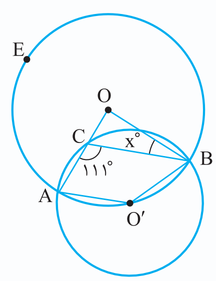


طول این دو وتر و در نتیجه کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$ ، $AB = AD$). با فرض $\hat{A} = x$ و خاصیت زاویهٔ محاطی، $\overset{\frown}{BD} = 2x$ می‌شود، در نتیجه $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$ و داریم:

$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow 63^\circ = \frac{180^\circ - x - 2x}{2}$

$\Rightarrow 180^\circ - 3x = 126^\circ \Rightarrow 3x = 54^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$

۷۵- گزینه۲ نقطهٔ O' را به A و B وصل می‌کنیم. زاویهٔ $\hat{ACB} = 111^\circ$ در دایرهٔ کوچک محاطی است، پس:



$\hat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 2 \times 111^\circ = 222^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{ACB} = 360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$

$\xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} A\hat{O'}B = 138^\circ$

از طرفی $A\hat{O'}B$ در دایرهٔ بزرگ محاطی است، پس:

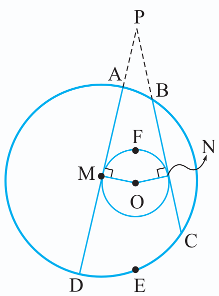
$A\hat{O'}B = \frac{\overset{\frown}{AEB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AEB} = 2 \times 138^\circ = 276^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AO'B} = 360^\circ - 276^\circ = 84^\circ \xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \hat{AOB} = 84^\circ$

و نهایتاً به کمک زاویهٔ خارجی در مثلث BOC داریم:

$\hat{ACB} = \hat{AOB} + \hat{OBC} \Rightarrow 111^\circ = 84^\circ + x \Rightarrow x = 27^\circ$

۷۶- گزینه۴ نقطهٔ تلاقی امتداد وترهای BC و AD را P می‌نامیم و داریم:



$\overset{\frown}{MFN} = 154^\circ \Rightarrow \hat{MON} = 154^\circ$

$\hat{p} = 180 - \hat{MON}$

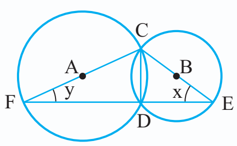
$= 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$

$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{CED} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

$\Rightarrow 26^\circ = \frac{70^\circ - \overset{\frown}{AB}}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 70^\circ - 52^\circ = 18^\circ$

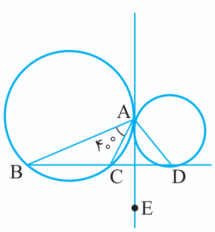
۷۷- گزینه۳ CE قطر دایرهٔ کوچک، پس $\hat{CDE} = 90^\circ$ با استدلال مشابه داریم: $\hat{CDF} = 90^\circ$، پس DE و DF روی یک امتدادند، بنا به فرض $\hat{ACB} = 150^\circ$ در نتیجه در مثلث CEF اندازهٔ یک زاویهٔ آن $\hat{FCE} = 150^\circ$ است.



با فرض $\hat{E} = x$ و $\hat{F} = y$ اندازهٔ مجموع کمان‌های CD در دو دایره $2x + 2y$ است و داریم: $x + y = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

اندازهٔ مجموع کمان‌های CD $= 2(x+y) = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

۷۸- گزینه۲ در نقطهٔ A مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم:



$(\text{ظلی } \hat{CAE} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} , \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}) \Rightarrow \hat{CAE} = \hat{B} \quad (1)$

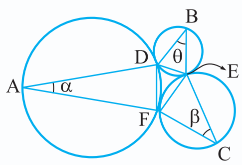
$(\text{ظلی } \hat{DAE} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} , \text{ ظلی } \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}) \Rightarrow \hat{DAE} = \hat{D} \quad (2)$

$\overset{\Delta}{ABD} : \hat{B} + \hat{D} + \hat{BAD} = 180^\circ \xrightarrow{(1),(2)}$

$\underbrace{\hat{CAE} + \hat{DAE}}_{\hat{CAD}} + 40^\circ + \hat{CAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\hat{CAD} = 140^\circ \Rightarrow \hat{CAD} = 70^\circ$

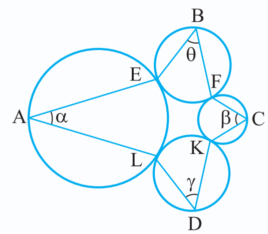
۷۹- گزینه۲ فرض کنید در نقطهٔ D مماس مشترک دو دایره را رسم کنیم، در این صورت در این نقطه دو زاویهٔ ظلی پدید می‌آید که یکی در دایرهٔ بزرگ‌تر با زاویهٔ محاطی به اندازهٔ α برابر است و دیگری با زاویهٔ محاطی θ در دایرهٔ کوچک‌تر برابر است، یعنی $F\hat{D}E=\alpha+\theta$. با استدلال مشابه داریم: $D\hat{F}E=\alpha+\beta$ و $D\hat{E}F=\theta+\beta$ و داریم: $\overset{\Delta}{DEF}: F\hat{D}E+D\hat{F}E+D\hat{E}F=۱۸۰^\circ$



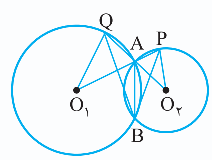
$$\Rightarrow \alpha+\theta+\alpha+\beta+\theta+\beta=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+\theta=۹۰^\circ$$

نکته اگر چهار دایره مطابق شکل روبه‌رو دوبه‌دو بر هم مماس باشند، آن‌گاه داریم:

$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=۱۸۰^\circ$$



۸۰- گزینه۳ وتر مشترک AB و شعاع‌های $O_{۱}Q$ و $O_{۲}P$ را رسم می‌کنیم، فرض کنیم $A\hat{B}Q=x$ و $A\hat{B}P=y$ در این صورت بنا به زاویهٔ محاطی و مرکزی داریم:



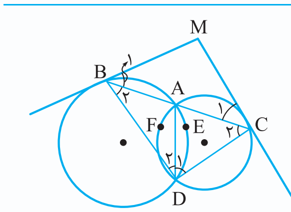
$$A\hat{O}_{۱}Q=\overset{\frown}{AQ}=۲A\hat{B}Q=۲x$$
$$A\hat{O}_{۲}P=\overset{\frown}{AP}=۲A\hat{B}P=۲y$$

در مثلث‌های متساوی‌الساقین $AO_{۱}Q$ و $AO_{۲}P$ می‌توان نوشت:

$$O_{۱}\hat{A}Q=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{O}_{۱}Q}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲x}{۲}=۹۰^\circ-x$$
$$O_{۲}\hat{A}P=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{O}_{۲}P}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲y}{۲}=۹۰^\circ-y$$

$$\xrightarrow{+} O_{۱}\hat{A}Q+O_{۲}\hat{A}P=۱۸۰^\circ-x-y$$
$$O_{۱}\hat{A}Q+O_{۲}\hat{A}P+P\hat{A}Q+O_{۱}\hat{A}O_{۲}=۳۶۰^\circ$$
$$\xrightarrow{O_{۱}\hat{A}O_{۲}=P\hat{A}Q=۱۱۰^\circ} ۱۸۰^\circ-x-y+۱۱۰^\circ+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x+y=۲۲۰^\circ-۱۸۰^\circ=۴۰^\circ \Rightarrow P\hat{B}Q=۴۰^\circ$$

۸۱- گزینه٤ وتر مشترک AD و پاره‌خط‌های BD و CD را رسم می‌کنیم، داریم:



$$(\text{ظلی}\ \hat{B}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ ,\ \text{محاطی}\ \hat{D}_{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}) \Rightarrow \hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۲}$$
$$(\text{ظلی}\ \hat{C}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\ ,\ \text{محاطی}\ \hat{D}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}) \Rightarrow \hat{C}_{۱}=\hat{D}_{۱}$$
$$\Rightarrow \hat{B}_{۱}+\hat{C}_{۱}=\hat{D}_{۱}+\hat{D}_{۲}=B\hat{D}C \quad (۱)$$

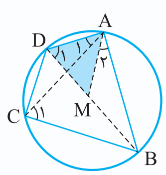
اما در مثلث‌های BMC و BDC داریم:

$$B\hat{M}C+\hat{B}_{۱}+\hat{C}_{۱}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_{۱}+\hat{C}_{۱}=۱۸۰^\circ-B\hat{M}C \quad (۲)$$
$$B\hat{D}C+\hat{B}_{۲}+\hat{C}_{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}C=۱۸۰^\circ-\hat{B}_{۲}-\hat{C}_{۲} \quad (۳)$$
$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow ۱۸۰^\circ-B\hat{M}C=۱۸۰^\circ-\hat{B}_{۲}-\hat{C}_{۲}$$
$$\Rightarrow B\hat{M}C=\hat{B}_{۲}+\hat{C}_{۲}=\frac{\overset{\frown}{AED}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AFD}}{۲}$$

کمان‌های $\overset{\frown}{AED}$ و $\overset{\frown}{AFD}$ دارای مقدار ثابتی هستند، زیرا دو دایره معلوم‌اند. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{M}C$ با تغییر قاطع در نقطهٔ A همواره ثابت می‌ماند.

۸۲- گزینه۱

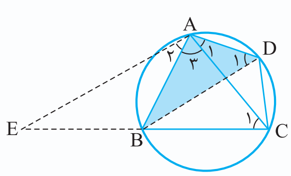
$$(\text{محاطی}\ \hat{D}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ ,\ \text{محاطی}\ \hat{C}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}) \Rightarrow \hat{D}_{۱}=\hat{C}_{۱}$$
$$(\text{فرض})\ \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲} \Rightarrow \hat{A}_{۱}+C\hat{A}M=C\hat{A}M+\hat{A}_{۲}$$
$$\Rightarrow D\hat{A}M=C\hat{A}B$$



$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM}\sim\overset{\Delta}{ACB}$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC=AC.DM$$

۸۳- گزینه۱

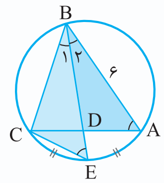
$$(\text{محاطی}\ \hat{D}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ ,\ \text{محاطی}\ \hat{C}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}) \Rightarrow \hat{D}_{۱}=\hat{C}_{۱}$$
$$(\text{فرض})\ \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲} \Rightarrow \hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۳}=\hat{A}_{۳}+\hat{A}_{۲} \Rightarrow B\hat{A}D=E\hat{A}C$$



$$\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{AEC}$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AC}$$
$$\Rightarrow BD.AC=AD.CE$$

۸۴- گزینه۲ وتر BC را رسم می‌کنیم دو زاویهٔ $\hat{B}_{۱}$ و $\hat{B}_{۲}$ محاطی و روبه‌رو به کمان‌های مساوی CE و AE هستند، پس $\hat{B}_{۱}=\hat{B}_{۲}$ و داریم:

$$(\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}) \Rightarrow \hat{E}=\hat{A}$$
$$(\hat{E}=\hat{A}\ ,\hat{B}_{۱}=\hat{B}_{۲}) \Rightarrow \overset{\Delta}{BCE}\sim\overset{\Delta}{BDA} \Rightarrow \frac{CE}{AD}=\frac{BE}{AB}$$



اما بنا به فرض $AB = ۶$ ، $AD = ۲/۴$ و $BE = ۸$ است، در نتیجه داریم:

$$CE = \frac{AD \times BE}{AB} = \frac{۲/۴ \times ۸}{۶} = ۳/۲$$

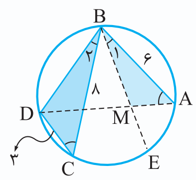
۸۵- گزینه۲

$$\left(\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}, \hat{B}_۲ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\right) \xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$\left(\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}, \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\right) \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

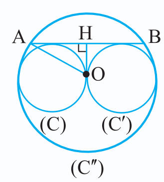
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \sim \overset{\Delta}{CBD} \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

اما بنا به فرض $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ و $CD = ۳$ ، در نتیجه داریم:



$$AM = \frac{CD \times AB}{BC} = \frac{۳ \times ۶}{۸} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۸۶- گزینه۱ شعاع دایرهٔ C'' برابر ۴ است $(OA = ۴)$، زیرا شعاع دایره‌های کوچک برابر ۲ می‌باشد، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:



$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$
$$\Rightarrow AH^۲ = ۴^۲ - ۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$
$$\Rightarrow AH = ۲\sqrt{۳}$$
$$AB = ۲AH = ۴\sqrt{۳}$$

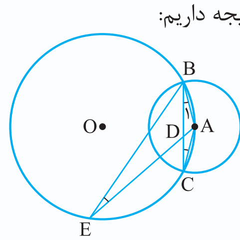
۸۷- گزینه۲ A را به C وصل می‌کنیم. AB و AC شعاع‌های دایره به مرکز A هستند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{C}$ و داریم:

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E} \xrightarrow{\hat{B}_۱ = \hat{C}} \hat{B}_۱ = \hat{E}$$

$$(B\hat{A}D = B\hat{A}E, \hat{B}_۱ = \hat{E}) \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEB}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^۲ = AE.AD$$

بنا به فرض $AD = ۴$ ، $DE = ۱۲$ ، در نتیجه داریم:



$$AB^۲ = (AD + DE) \times AD$$
$$= (۴ + ۱۲) \times ۴ = ۱۶ \times ۴$$
$$\Rightarrow AB = ۴ \times ۲ = ۸$$

۸۸- گزینه۲ اولاً ثابت می‌کنیم در این شکل همواره AD نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ است. مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ A رسم می‌کنیم. در مثلث ADC بنا به زاویهٔ خارجی داریم:

$$A\hat{D}B = \hat{C} + \hat{A}_۲$$

دو زاویهٔ $A\hat{D}B$ و $D\hat{A}F$ در دایرهٔ کوچک، ظلی هستند و کمان روبه‌روی آن‌ها $\overset{\frown}{AED}$ است، پس این دو زاویه برابرند و می‌توان نوشت:

$$A\hat{D}B = D\hat{A}F = \hat{A}_۱ + B\hat{A}F \qquad (۱)$$

اما در دایرهٔ بزرگ زاویهٔ $\hat{C}$ محاطی و زاویهٔ $B\hat{A}F$ ظلی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ می‌باشند، پس برابرند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$A\hat{D}B = \hat{C} + \hat{A}_۲ \qquad (۲)$$

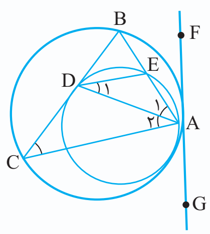
$$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{C} + \hat{A}_۲ = \hat{A}_۱ + B\hat{A}F \xrightarrow{\hat{C} = B\hat{A}F}$$

$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است AD نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$

ثانیاً با فرض $AE = m$ و $AC = b$ می‌خواهیم طول AD را حساب کنیم به همین جهت D را به E وصل می‌کنیم.

در دایرهٔ کوچک، $\hat{D}_۱$ زاویهٔ محاطی و $E\hat{A}F$ زاویهٔ ظلی و روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AE}$ هستند، پس برابرند. $(\hat{D}_۱ = E\hat{A}F)$

اما $E\hat{A}F$ همان زاویهٔ $B\hat{A}F$ است که با زاویهٔ $\hat{C}$ برابر است، لذا $\hat{D}_۱ = \hat{C}$. پس می‌توان نوشت:

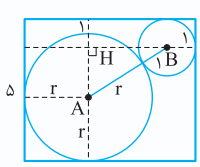


$$(\hat{D}_۱ = \hat{C} \text{ و } \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲)$$
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AED} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$
$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AD^۲ = AE \cdot AC = m \times b \Rightarrow AD = \sqrt{bm}$$

۸۹- گزینه۱ با توجه به شکل داریم:

$$BH + r + ۱ = ۶ \Rightarrow BH = ۵ - r$$
$$AH + r + ۱ = ۵ \Rightarrow AH = ۴ - r$$
$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow (r+۱)^۲ = (۴-r)^۲ + (۵-r)^۲$$
$$\Rightarrow r^۲ + ۲r + ۱ = r^۲ - ۸r + ۱۶ + r^۲ - ۱۰r + ۲۵$$
$$\Rightarrow r^۲ - ۲۰r + ۴۰ = ۰ \Rightarrow r = ۱۰ \pm \sqrt{۶۰} = ۱۰ \pm ۲\sqrt{۱۵}$$

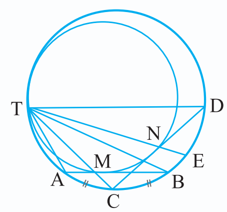


جواب $r = ۱۰ + ۲\sqrt{۱۵}$ قابل‌قبول نیست، زیرا از ۴ بیشتر است که منفی‌بودن AH را موجب می‌شود پس جواب قابل‌قبول $r = ۱۰ - ۲\sqrt{۱۵}$ است.

۹۰- **گزینه۲** در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TM نیمساز زاویهٔ ATB است، پس امتداد TM قطعاً از وسط کمان AB یعنی نقطهٔ C می‌گذرد. هم‌چنین TN نیمساز زاویه $C\hat{T}D$ است، پس امتداد TN از وسط کمان CD یعنی نقطهٔ E می‌گذرد و داریم:

$$M\hat{T}N = C\hat{T}E = \frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۴} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BD}}{۴}$$

اما بنا به فرض $\overset{\frown}{BC} = ۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = ۶۰^\circ$ است، در نتیجه:



$$M\hat{T}N = \frac{۳۰^\circ + ۶۰^\circ}{۴}$$

$$= \frac{۹۰^\circ}{۴} = ۲۲/۵^\circ$$

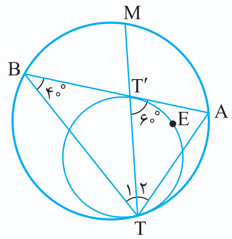
۹۱- **گزینه۴** در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TT' نیمساز زاویهٔ $A\hat{T}B$ است، پس امتداد TT' از وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ می‌گذرد، یعنی نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ است. اما در دایرهٔ کوچک زاویهٔ $A\hat{T}'T$ ظلی است، پس:

$$A\hat{T}'T = \frac{\overset{\frown}{TET'}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

از طرفی در دایرهٔ بزرگ $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است، پس:

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

در نتیجه بنا به زاویهٔ خارجی $T_۱ = ۲۰^\circ$ و $\hat{T}_۲ = ۲۰^\circ$ می‌شود و نهایتاً داریم:

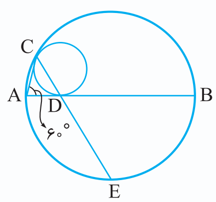


$$\hat{T}_۲ = ۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} = ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = ۴۰^\circ$$

۹۲- **گزینه۳** امتداد CD از وسط کمان AB می‌گذرد (به پرسش ۹۰ رجوع شود)؛ در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ محاطی $\hat{C}$ برابر است با:

$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$ و نهایتاً داریم:



$$B\hat{D}C = \hat{A} + \hat{C}$$

$$= ۶۰^\circ + ۴۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$