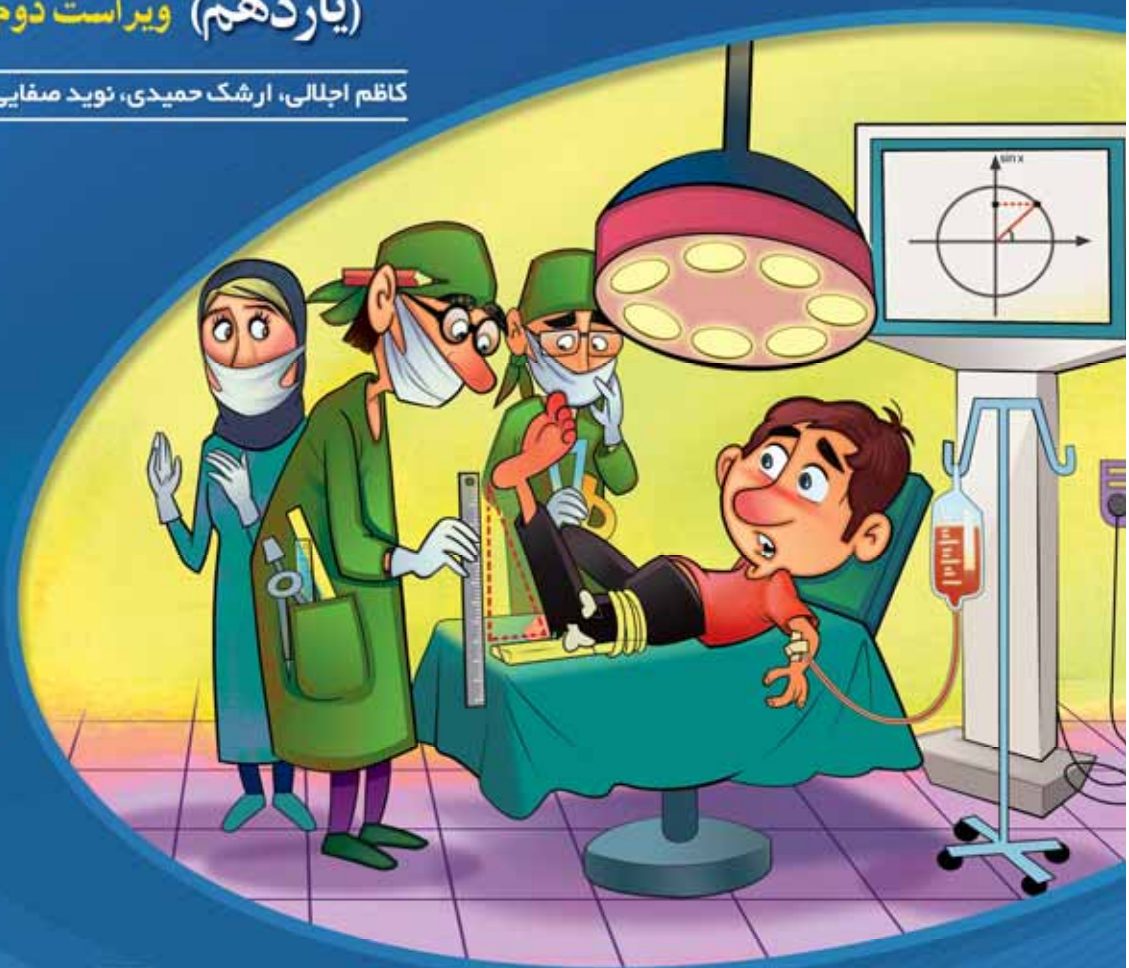


درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی تجربی

(یازدهم) ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتشارات
انتگرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی ۲ سال یازدهم و با هدف کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در فصل هشتم گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف به‌ویژه کنکور سراسری نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست برخی پرسش‌های ویراست قبلی را حذف کرده‌ایم و البته تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دسته اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دسته دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری، بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دسته اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دسته سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دسته دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «ریاضی ۲ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان خانم‌ها عاطفه ربیعی، فهیمه گودرزی، هاله ایمانی و آقای آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

◆ فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

۲	درس اول: هندسه تحلیلی
۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۵	درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم
۲۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۳	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۳۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: هندسه

۴۴	درس‌های اول و دوم: ترسیم‌های هندسی - استدلال و قضیه تالس
۵۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۳	درس سوم: تشابه مثلث‌ها
۶۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل سوم: تابع

۸۶	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع
۹۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۰۹	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
۱۱۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۵	درس سوم: اعمال جبری روی توابع
۱۳۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل چهارم: مثلثات

- درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۴۰
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۴۳
- درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۴۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۵۴
- درس سوم: توابع مثلثاتی ۱۶۰
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۳

◆ فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۱۶۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۷۲
- درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۱۷۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۵

◆ فصل ششم: حد و پیوستگی

- درس اول: فرایندهای حدی ۲۰۰
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۴
- درس دوم: محاسبه حد توابع ۲۰۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۱۷
- درس سوم: پیوستگی ۲۲۷
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۳۲

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

- درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۲۳۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۴۲
- درس دوم: آمار توصیفی ۲۴۷
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۵۰

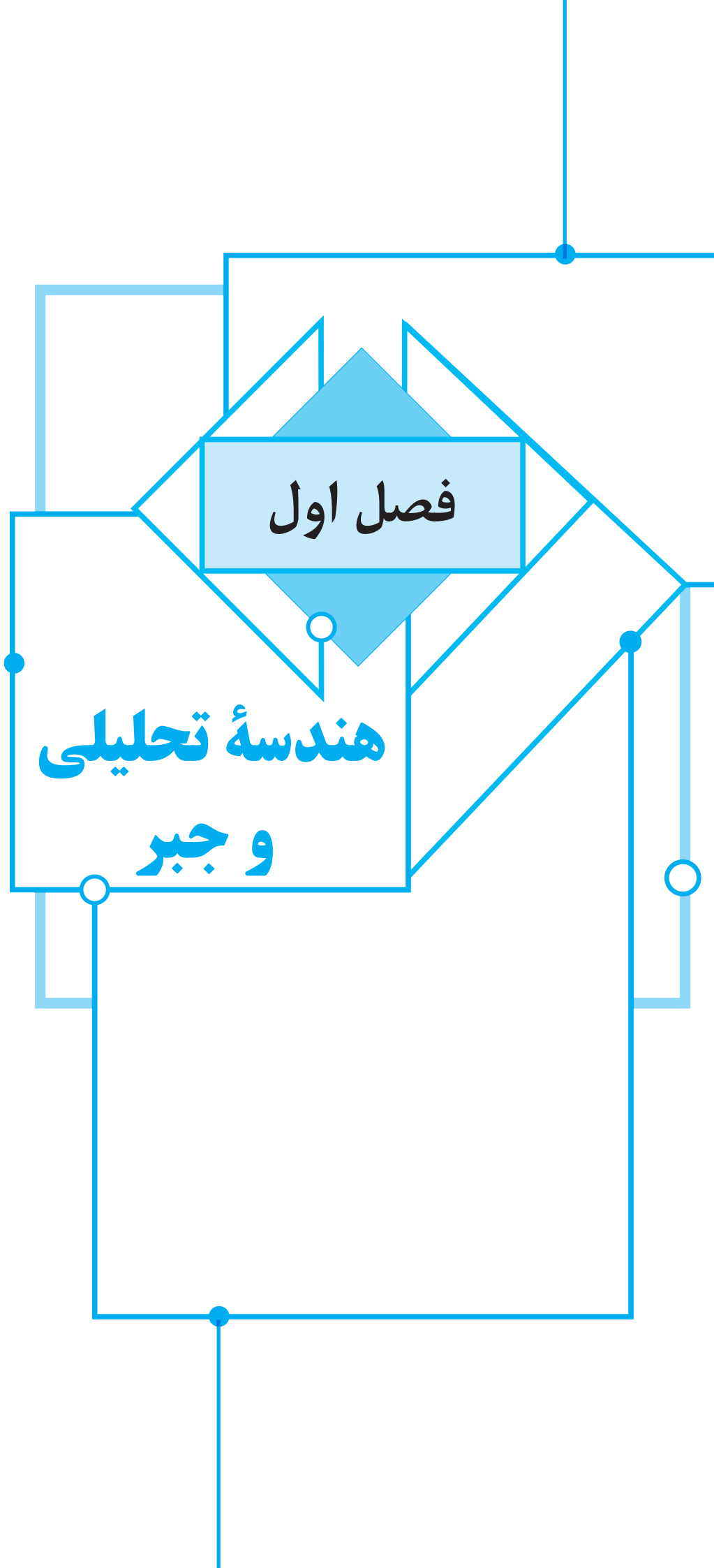


◆ فصل هشتم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۵۴	فصل اول
۲۸۱	فصل دوم
۲۹۹	فصل سوم
۳۳۰	فصل چهارم
۳۴۳	فصل پنجم
۳۶۰	فصل ششم
۳۷۵	فصل هفتم

◆ فصل نهم: پاسخنامه کلیدی

۳۸۴	پاسخنامه کلیدی
-----	-------	----------------



فصل اول

هندسه تحلیلی
و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی

نکته

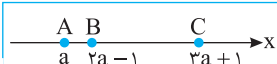
فاصله بین دو نقطه

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه روی محور x باشند، آن گاه طول پاره خط AB برابر است با $AB = |x_A - x_B|$. به همین ترتیب، اگر $C(0, y_C)$ و $D(0, y_D)$ دو نقطه روی محور y باشند، آن گاه طول پاره خط CD برابر است با $CD = |y_C - y_D|$. به طور کلی، اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند، طول پاره خط AB برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

تست



در شکل مقابل $AB + BC = 5$. اندازه پاره خط BC کدام است؟



- | | |
|---------|-------|
| ۳ (۲) | ۲ (۱) |
| ۴/۵ (۴) | ۴ (۳) |

راه حل

فاصله A از B برابر است با $AB = 2a - 1 - a = a - 1$. فاصله B از C برابر است با $BC = 3a + 1 - (2a - 1) = a + 2$. بنابراین $AB + BC = 5 \Rightarrow a - 1 + a + 2 = 5 \Rightarrow a = 2$.

در نتیجه $BC = a + 2 = 4$.

تست



اگر A و B نقطه‌های $(k+3, 2)$ و $(5, 10)$ باشند و $AB = 17$ ، حاصل ضرب مقادیر ممکن k کدام است؟

- | | | | |
|----------|---------|-------|--------|
| -۲۲۱ (۴) | ۲۲۱ (۳) | ۴ (۲) | -۴ (۱) |
|----------|---------|-------|--------|

راه حل

توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(k+3-5)^2 + (2-10)^2} = 17 \Rightarrow \sqrt{(k-2)^2 + 8^2} = 17 \Rightarrow 289 = (k-2)^2 + 64$$

$$225 = (k-2)^2 \Rightarrow k-2 = \pm\sqrt{225} \Rightarrow k = 2 \pm \sqrt{225}$$

حاصل ضرب این دو مقدار برابر است با

$$(2 - \sqrt{225})(2 + \sqrt{225}) = 4 - 225 = -221$$

نکته

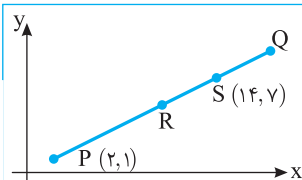
مختصات وسط پاره خط

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات باشند، مختصات نقطه M ، وسط پاره خط AB ، برابرند با $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ ، $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

تست



در شکل روبه‌رو نقطه R وسط پاره خط PQ و نقطه S وسط پاره خط QR است. طول نقطه Q کدام است؟



- | | |
|--------|--------|
| ۱۶ (۲) | ۱۷ (۱) |
| ۱۸ (۴) | ۱۵ (۳) |

راه حل

طول نقطه Q را با x نشان می‌دهیم. چون R وسط PQ است، پس طول نقطه R برابر $\frac{x+2}{2}$ است. از طرف دیگر نقطه S وسط پاره خط QR است،

بنابراین طول نقطه S برابر با $\frac{1}{2}(x + \frac{x+2}{2})$ است. با توجه به شکل، طول نقطه S برابر ۱۴ است. بنابراین

$$\frac{1}{2}(x + \frac{x+2}{2}) = 14 \Rightarrow x + \frac{x+2}{2} = 28 \Rightarrow 2x + x + 2 = 56 \Rightarrow 3x = 54 \Rightarrow x = 18$$

تست
□□□□

رأس‌های مثلث ABC نقطه‌های $A(2, 5)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(4, 1)$ هستند. طول میانه‌ای که از رأس A می‌گذرد چقدر است؟

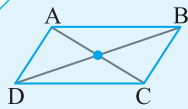
- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{17}$ (۴) $\sqrt{26}$

راه‌حل

وسط ضلع BC نقطه $(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2})$ یعنی نقطه $(1, 2)$ است. طول میانه‌ای که از رأس A می‌گذرد برابر با فاصله نقطه A از نقطه وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$$

نکته



اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، چون قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، پس وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است، در نتیجه

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

تست
□□□□

نقطه‌های $A(0, 2)$ ، $B(k, k+2)$ ، $C(6, 10)$ و $D(n, k)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. طول قطر BD چقدر است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

راه‌حل

در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه وسط قطر AC همان نقطه وسط قطر BD است. بنابراین

$$\begin{cases} 6 = k + n \\ 12 = 2k + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 5 + n \Rightarrow n = 1 \\ k = 5 \end{cases} \quad \text{در نتیجه} \quad (\frac{0+6}{2}, \frac{2+10}{2}) = (\frac{k+n}{2}, \frac{k+2+k}{2})$$

بنابراین B نقطه $(5, 7)$ و D نقطه $(1, 5)$ است، پس $BD = \sqrt{(5-1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

نکته

شیب و معادله خط

فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند که روی خطی موازی محور y نیستند. در این صورت شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد برابر

$$\text{است با } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \text{ و معادله خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد به صورت } y - y_A = m(x - x_A) \text{ است.}$$

نکته

خطوط موازی و خطوط عمود بر هم

دو خط غیرموازی با محور y با هم موازی‌اند، اگر و فقط اگر شیب آن‌ها برابر باشد و دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، اگر و فقط اگر حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ باشد.

تست
□□□□

اگر خط‌های $2mx - 3y = 1$ و $y = 1 - 2x$ بر هم عمود باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

راه‌حل

شیب خط $2mx - 3y = 1$ برابر $\frac{-2m}{-3}$ ، یعنی $\frac{2m}{3}$ است و شیب خط $y = 1 - 2x$ برابر $-\frac{2}{1}$ ، یعنی -۲ است. حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱ است. بنابراین

$$\frac{2m}{3} \times (-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

تست
□□□□

معادله خطی که از نقطه $(5, -3)$ می‌گذرد و بر خطی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد عمود است، کدام است؟

- (۱) $3x + y - 12 = 0$ (۲) $3y + x + 4 = 0$ (۳) $y - 3x - 14 = 0$ (۴) $3x - y - 18 = 0$

راه‌حل

شیب خطی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد برابر است با $-\frac{4-3}{-1-2} = -\frac{1}{3}$. بنابراین شیب خطی که بر آن عمود است برابر با ۳ است.

$$y + 3 = 3(x - 5) \Rightarrow 3x - y - 18 = 0$$

معادله خطی که از نقطه $(5, -3)$ با شیب ۳ می‌گذرد به صورت مقابل است

تست
□□□□

اگر نقطه‌های $A(1, -1)$ ، $B(2, 3)$ و $C(-2, 5)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC کدام است؟

(۴) $y = -2x - 1$

(۳) $y = -2x + 1$

(۲) $y = 2x + 1$

(۱) $y = 2x - 3$

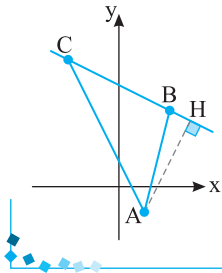
راه‌حل

ابتدا توجه کنید که شیب خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد، برابر است با

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5 - 3}{-2 - 2} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین ارتفاع وارد بر این ضلع، یعنی HA روی خطی به شیب 2 قرار دارد و معادله آن به صورت زیر است

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - (-1) = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 3$$



تست
□□□□

اگر نقطه‌های $A(2, 1)$ و $B(4, -3)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، معادله عمودمنصف AB کدام است؟

(۴) $2x + y = 3$

(۳) $2x - y = 3$

(۲) $x - 2y = 5$

(۱) $x + 2y = 5$

راه‌حل

راه‌حل اول فرض کنید نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 1}{4 - 2} = -2$. بنابراین شیب عمودمنصف پاره‌خط AB برابر $\frac{1}{2}$

است. پس معادله عمودمنصف AB که از نقطه $M(3, -1)$ می‌گذرد و شیب آن $\frac{1}{2}$ است به صورت زیر است:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow x - 2y = 5$$

راه‌حل دوم اگر نقطه $M(x, y)$ روی عمودمنصف AB باشد، فاصله آن از M برابر فاصله M از B است

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 3)^2} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9$$

$$4x - 8y = 20 \Rightarrow x - 2y = 5$$

معادله اخیر همان معادله عمودمنصف پاره‌خط AB است.

تست
□□□□

در شکل روبه‌رو چهارضلعی $OABC$ مربع است. مقدار $b + c$ کدام است؟

(۱) $5\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) 2

(۴) 5

راه‌حل

$O(0, 0)$ است، همچنین می‌دانیم، مربع نوعی متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه

$$\begin{cases} x_O + x_B = x_C + x_A \\ y_O + y_B = y_C + y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c - a \\ -\gamma = -a - 4 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

همچنین، از اینکه OA بر OC عمود است نتیجه می‌شود که حاصل ضرب شیب خط‌هایی که OA و OC بر آن‌ها قرار دارند برابر -1 است. چون

$$m_{OC} = \frac{-a - 0}{c - 0} = -\frac{a}{c} \text{ و } m_{OA} = \frac{-4 - 0}{-a - 0} = \frac{4}{a} \text{ پس } \frac{4}{a} \times \left(-\frac{a}{c}\right) = -1 \text{ بنابراین } c = 4 \text{ و در نتیجه } b = 1 \text{ پس } b + c = 5.$$

فاصله نقطه از خط

نکته

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ فاصله نقطه } A(x_0, y_0) \text{ از خط } ax + by + c = 0 \text{ برابر است با}$$

تست ۱۱

فاصله نقطه $(-2, 3)$ تا خط $8x+6y=15$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{13}{10}$ (۲) $\frac{11}{10}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۴) $\frac{3}{10}$

راه حل

فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. بنابراین فاصله نقطه $(-2, 3)$ تا خط $8x+6y-15=0$ برابر

$$\frac{|8(-2)+6(3)-15|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{13}{10}$$

است با $\frac{13}{10}$.

تست ۱۲

فاصله نقطه $A(1, 2k)$ از خط $y=-kx+1$ برابر ۳ است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

راه حل

ابتدا معادله خط را به صورت $kx+y-1=0$ می نویسیم. به این ترتیب

$$3 = \frac{|k+2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow |3k-1| = 3\sqrt{k^2+1} \Rightarrow 9k^2-6k+1=9k^2+9 \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$$

تست ۱۳

اگر نقاط $A(1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, 6)$ رأس های مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{6}{\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{10}{\sqrt{10}}$

راه حل

ابتدا توجه کنید که معادله خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد، به صورت زیر است:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6-0}{1-3} = -3, \quad y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = -3(x - 3) \Rightarrow 3x + y - 9 = 0$$

طول ارتفاع AH برابر با فاصله نقطه A از خطی است که ضلع BC روی آن قرار دارد $AH = \frac{|3x_A + y_A - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|3+2-9|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

تست ۱۴

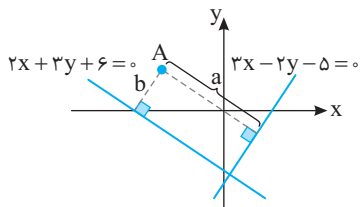
دو ضلع از مستطیلی روی خط های $2x-2y-5=0$ و $2x+3y+6=0$ قرار دارند و نقطه $A(-2, 1)$ یک رأس این مستطیل است.

مساحت این مستطیل چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

راه حل

شیب خط های داده شده به ترتیب $\frac{3}{2}$ و $-\frac{2}{3}$ است و چون $\frac{3}{2} \times (-\frac{2}{3}) = -1$ پس این خط ها بر هم عمودند. بنابراین دو ضلع مجاور مستطیل مورد نظر روی این خط ها قرار دارند. از طرف دیگر، چون نقطه $A(-2, 1)$ روی خط های داده شده نیست، پس فاصله این نقطه تا خط های داده شده برابر با طول ضلع های مستطیل است:



$$a = \frac{|-6 - 2 - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

فاصله نقطه $A(-2, 1)$ از خط $2x-2y-5=0$: $a = \frac{|-6-2-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

$$b = \frac{|-4 + 3 + 6|}{\sqrt{4+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

فاصله نقطه $A(-2, 1)$ از خط $2x+3y+6=0$: $b = \frac{|-4+3+6|}{\sqrt{4+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

بنابراین مساحت مستطیل مورد نظر برابر است با $ab = \frac{5}{\sqrt{13}} \times \sqrt{13} = 5$.

نکته

فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تست ۱۵

 مساحت مربعی که دو ضلع آن روی خطهای $2x+y=2$ و $4x+2y+6=0$ قرار دارد چقدر است؟

۱۵ (۴)

۲۵ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱)

راه حل

شیب هر دو خط برابر با -2 است. بنابراین دو خط با هم موازی اند، پس طول ضلع مربع برابر با فاصلهٔ دو خط موازی $2x+y-2=0$ و $4x+2y+6=0$ است. اگر دو طرف معادلهٔ خط اول را در 2 ضرب کنیم، به صورت $4x+2y-4=0$ درمی‌آید. در نتیجه طول ضلع مربع برابر است

$$\text{با } \frac{|6-(-4)|}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{20}} \text{ بنابراین مساحت مربع برابر است با } \left(\frac{10}{\sqrt{20}}\right)^2 = 5.$$

تست ۱۶

 اگر فاصلهٔ دو خط موازی $ax-4y+24=0$ و $x-y+b=0$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل ضرب مقادیرهای ممکن b کدام است؟

-۳۲ (۴)

-۱۲ (۳)

۳۲ (۲)

۱۲ (۱)

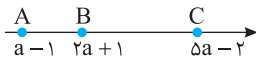
راه حل

معادلهٔ خط دوم را به شکل $4x-4y+4b=0$ می‌نویسیم. چون فاصلهٔ دو خط موازی برابر $\sqrt{2}$ است، پس

$$\frac{|4b-24|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{4|b-6|}{4\sqrt{2}} = \frac{|b-6|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |b-6|=2 \Rightarrow b=4, b=8$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیرهای ممکن b برابر 32 است.

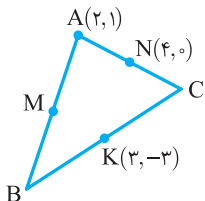
فاصله بین دو نقطه روی محور



- ۱- در شکل مقابل اگر $AB=5$ ، طول پاره خط BC کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲
- ۲- نقطه‌های $A(0,0)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,-3)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟
 (۱) فقط متساوی‌الساقین (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) فقط قائم‌الزاویه (۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین
- ۳- مساحت مثلثی که نقاط $A(0,0)$ ، $B(2,2)$ و $C(2,-3)$ رأس‌های آن هستند، کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۴- فاصله نقطه $A(2,0)$ از نقطه $B(m,0)$ دو برابر فاصله A از نقطه $C(2m-1,0)$ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟
 (۱) $\frac{16}{5}$ (۲) $\frac{32}{5}$ (۳) $\frac{16}{15}$ (۴) $\frac{32}{15}$

مختصات وسط پاره خط

- ۵- نقطه وسط پاره خط میان نقطه‌های $(a+1, 4-2b)$ و $(3-a, 2b-3)$ کدام است؟
 (۱) $(a-1, b-1)$ (۲) $(2, -\frac{1}{2})$ (۳) $(2, \frac{1}{2})$ (۴) $(2a, 4b)$
- ۶- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -1)$ و $B(4, 5)$ هستند. مرکز این دایره کدام نقطه است؟
 (۱) $(3, 2)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, 1)$
- ۷- اگر نقطه $M(1, a)$ وسط پاره خط واصل نقاط $A(3, 3a)$ و $B(b, 2)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳
- ۸- اگر نقطه M وسط پاره خط واصل نقاط $A(1, 4)$ و $B(3, 6)$ روی خط $y=mx+1$ باشد، مقدار m کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۹- نقطه M، وسط پاره خط AB، روی خط $y=2x+1$ قرار دارد. اگر A نقطه $(2, -3m)$ و B نقطه $(m, 1)$ باشد، نقطه M کدام است؟
 (۱) $(-\frac{1}{2}, 2)$ (۲) $(\frac{1}{2}, 2)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, -2)$
- ۱۰- در شکل مقابل نقطه‌های M، N و K وسط ضلع‌های مثلث ABC هستند. نقطه M کدام است؟
 (۱) $(-1, 2)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(-1, -2)$
- ۱۱- نقطه‌های $A(-2, -3)$ ، $B(3, -2)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1, 3)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. نقطه C کدام است؟
 (۱) $(1, 1)$ (۲) $(2, 2)$ (۳) $(3, 3)$ (۴) $(4, 4)$
- ۱۲- معادله میانه AM در مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(0, -4)$ و $C(4, 6)$ کدام است؟
 (۱) $y=x+1$ (۲) $y=-2x+5$ (۳) $y=-x+3$ (۴) $y=2x-3$
- ۱۳- معادله میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که با محورهای مختصات و خط $x+2y=12$ تشکیل می‌شود کدام است؟
 (۱) $x+2y=0$ (۲) $x-2y=0$ (۳) $x-y=0$ (۴) $2x+y=0$



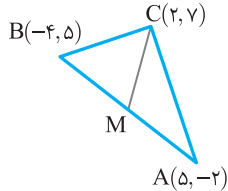
فاصله بین دو نقطه

۱۴- فاصله نقطه $A(2, 3)$ از نقطه $B(-1, 6)$ چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۵- نقاط $A(2, 3)$ و $B(6, 0)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳



۱۶- در مثلث روبه‌رو، طول میانه CM کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{130}}{2}$ (۲) $\sqrt{130}$ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

۱۷- فاصله نقطه $A(1, 2)$ از نقطه $B(2, m)$ برابر m است. مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۸- اگر نقطه‌های $A(1, 0)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-1, 3)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، محیط این مثلث کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2} + \sqrt{15}$ (۳) $\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

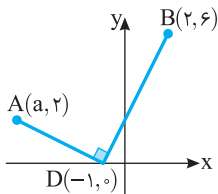
۱۹- نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(5, -5)$ و $C(-1, 2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) فقط متساوی‌الساقین (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) فقط قائم‌الزاویه (۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

خطوط موازی و خطوط عمود بر هم

۲۰- خط $3x + 4y = 1$ بر کدام یک از خط‌های زیر عمود است؟

- (۱) $3x - 4y = 1$ (۲) $4x + 3y = 1$ (۳) $6x + 8y = 5$ (۴) $8x - 6y = 7$



۲۱- در شکل مقابل مقدار a کدام است؟

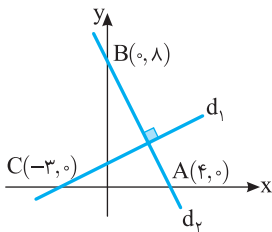
- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) -۳

۲۲- به ازای چند مقدار k خط‌های $x + ky = 1$ و $(k+1)x - ky = 2$ بر هم عمودند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

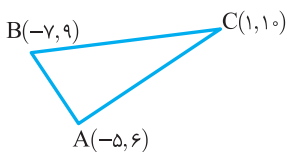
۲۳- معادله خطی که بر خط $y = \frac{3}{4}x$ عمود است و محور x را در نقطه‌ای به طول ۱۵ قطع می‌کند کدام است؟

- (۱) $4x + 3y = 60$ (۲) $3x + 4y = 60$ (۳) $4x + y = 60$ (۴) $x + 4y = 60$



۲۴- در شکل مقابل معادله خط d_1 کدام است؟

- (۱) $2y = x - 3$ (۲) $2y - 2x = 6$ (۳) $2y = x + 3$ (۴) $2y = 3x$



۲۵- در مثلث روبه‌رو، معادله ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

- (۱) $3y - 2x = 28$ (۲) $3y + 2x = 32$ (۳) $2y - 3x = 38$ (۴) $3y - 2x = 38$

۲۶- خطی که از نقاط $A(1, a)$ و $B(3, 2a)$ می‌گذرد، بر خط $2x - 3y = 1$ عمود است. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۷- معادله عمودمنصف پاره خط میان نقطه های $A(-3, 1)$ و $B(5, 4)$ کدام است؟

- ۱) $6x + 16y = 31$ (۱) ۲) $16x + 6y = 31$ (۲) ۳) $16x + 6y = 21$ (۳) ۴) $6x + 16y = 21$ (۴)

فاصله نقطه از خط

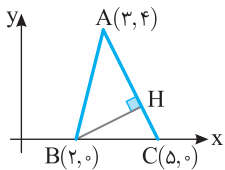
۲۸- فاصله نقطه $A(2, 3)$ از خط $4y = 3x + 1$ کدام است؟

- ۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) $\frac{2}{5}$ (۳) ۴) $\frac{4}{5}$ (۴)

۲۹- خط $3x + 4y - 3 = 0$ بر دایره ای به مرکز $(2, 3)$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) ۴ (۴)

۳۰- در شکل مقابل طول چقدر است؟



- ۱) $\frac{14}{\sqrt{5}}$ (۱) ۲) $\frac{16}{\sqrt{5}}$ (۲)

- ۳) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ (۳) ۴) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (۴)

۳۱- مساحت مربعی که یک رأس آن نقطه $A(2, 1)$ و یک ضلع آن روی خط $y = 2x + 1$ است، کدام است؟

- ۱) $\frac{16}{5}$ (۱) ۲) $\frac{25}{3}$ (۲) ۳) ۴ (۳) ۴) $\frac{9}{5}$ (۴)

فاصله دو خط موازی

۳۲- فاصله دو خط موازی $2x - y = 3$ و $3y - 6x = 5$ از یکدیگر چقدر است؟

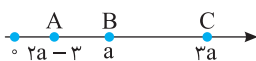
- ۱) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ (۱) ۲) $\frac{14}{3\sqrt{5}}$ (۲) ۳) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ (۳) ۴) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ (۴)

۳۳- دو ضلع مستطیلی روی دو خط موازی $3x + 4y + 1 = 0$ و $3x + 4y - 1 = 0$ قرار دارند و مساحت این مستطیل برابر ۱۲ است. طول قطر این مستطیل چقدر است؟

- ۱) $\sqrt{7}$ (۱) ۲) ۷ (۲) ۳) $\sqrt{5}$ (۳) ۴) ۵ (۴)

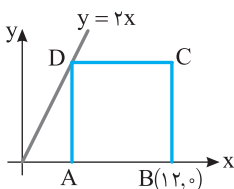
هندسه تحلیلی

فاصله بین دو نقطه روی محور



۳۴- در شکل مقابل $AB \times BC = 4$. اندازه پاره خط AC کدام است؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۵ (۳) ۴) ۶ (۴)



۳۵- در شکل روبه رو چهارضلعی ABCD مربع است. نقطه C کدام است؟

- ۱) $(8, 12)$ (۱) ۲) $(12, 12)$ (۲) ۳) $(12, 8)$ (۳) ۴) $(12, 10)$ (۴)

۳۶- نقطه های $(2, 4)$ ، $(4, 5)$ و $(3, 2)$ وسط ضلع های یک مثلث هستند. کدام یک از این مثلث نیست؟

- ۱) $(1, 1)$ (۱) ۲) $(3, 7)$ (۲) ۳) $(3, -3)$ (۳) ۴) $(5, 3)$ (۴)

مختصات وسط پاره خط

۳۷- نقطه های $A(m, 4)$ ، $B(3, m)$ ، $C(m+n, m-n)$ و $D(m-n, n)$ رأس های متوازی الاضلاع ABCD هستند. مقدار mn کدام است؟

- ۱) ۲ (۱) ۲) -۲ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) -۳ (۴)

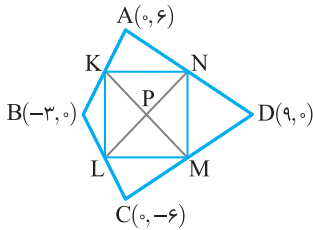
۳۸- نقطه های $A(-b, -a)$ ، $B(a, -3)$ ، $C(5, a)$ و $D(-2, a)$ رأس های متوازی الاضلاع ABCD هستند. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{3}$ (۱) ۲) $-\frac{3}{4}$ (۲) ۳) $\frac{3}{4}$ (۳) ۴) $-\frac{4}{3}$ (۴)

۳۹- یک رأس متوازی الاضلاعی نقطه $A(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ و دو ضلع آن روی خطهای $2y=x+3$ و $y=3x+2$ قرار دارند. نقطه برخورد قطره‌های متوازی الاضلاع کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۳) $(\frac{3}{2}, 1)$ (۴) $(\frac{1}{2}, 1)$

۴۰- در شکل مقابل نقطه‌های M, N, K, L وسط ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ هستند و چهارضلعی $MNKL$ متوازی الاضلاع است. طول نقطه P کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

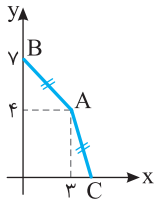
۴۱- نقطه‌های $M(-2, -1)$ ، $N(5, 4)$ و $P(-3, -4)$ به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB ، AC و BC از مثلث ABC هستند. معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد کدام است؟

- (۱) $y=x+1$ (۲) $2y=x$ (۳) $3y=x-1$ (۴) $4y=3x+2$

فاصله بین دو نقطه

۴۲- اگر نقطه‌های $A(1, -1)$ ، $B(3, 1)$ و $C(m, -2)$ رأس‌های مثلث ABC باشند و طول میانه نظیر رأس C برابر ۲ باشد. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲



۴۳- در شکل روبه‌رو $AB=AC$. طول نقطه C کدام است؟

- (۱) $3+\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $3+\sqrt{2}$ (۴) $3+3\sqrt{2}$

۴۴- فاصله نقطه $(a, 2)$ از نقطه‌های $(3, 4)$ و $(-2, 1)$ برابر است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۵- نقطه‌های $A(a, b)$ و $B(2b, a-1)$ دو انتهای قطر دایره‌ای به مرکز $O(1, -1)$ هستند. طول شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{31}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $\sqrt{37}$ (۴) $\sqrt{52}$

۴۶- طول نقطه‌ای روی محور x که فاصله‌اش از نقطه‌های $A(0, 3)$ و $B(3, 2)$ برابر است کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۴۷- نقطه‌ای روی محور y که از نقطه‌های $A(-3, 0)$ و $B(4, -1)$ به یک فاصله است کدام نقطه است؟

- (۱) $(0, 4)$ (۲) $(0, -4)$ (۳) $(4, 0)$ (۴) $(-4, 0)$

۴۸- نقطه‌ای روی خط $y=2x$ وجود دارد که از دو نقطه $A(1, -1)$ و $B(-1, 2)$ به یک فاصله است. مجموع طول و عرض این نقطه کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۹- چند نقطه روی سهمی به معادله $y=x^2$ وجود دارد که فاصله آن‌ها از نقطه $A(0, 1)$ برابر ۱ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

خطوط موازی و خطوط عمود بر هم

۵۰- خط‌های $mx+3y-6=0$ و $4x+ny-8=0$ بر هم عمودند و $4m-3n=8$. مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵۱- نقطه‌های $A(0, 1)$ ، $B(2, 4)$ و $C(-a, a^2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. به ازای کدام مقدار a زاویه B قائمه است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) -۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) -۱

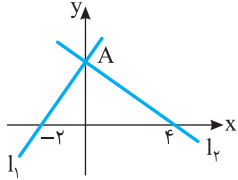
۵۲- نقطه‌های $A(2,1)$ ، $B(2,3)$ ، $C(5,4)$ و $D(k,1)$ مفروض‌اند. اگر خط AC بر خط عمود BD باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) ۳

۵۳- خط‌های $(5-k)y+2x=3$ و $mx-y=-2$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور x قطع می‌کنند. مقدار $k-m$ کدام است؟

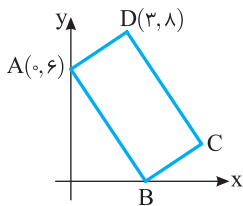
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۵۴- در شکل مقابل، خط‌های l_1 و l_2 در نقطه A روی محور y بر یکدیگر عمودند. عرض نقطه A چقدر است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

۵۵- در شکل مقابل، مساحت مستطیل $ABCD$ چقدر است؟



- (۱) ۲۶ (۲) ۱۳ (۳) $2\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{13}$

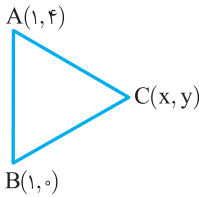
۵۶- نقطه‌های $A(0,0)$ ، $B(a,b)$ ، $C(c,16)$ و $D(0,10)$ رأس‌های لوزی $ABCD$ واقع در ربع اول هستند. مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{y}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{y}{4}$

۵۷- اگر نقطه‌های $A(1,2)$ ، $B(-1,0)$ و $C(3,-2)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع CH کدام است؟

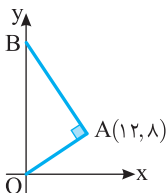
- (۱) $y=x-1$ (۲) $y=-2x+4$ (۳) $y=-x+1$ (۴) $y=x+1$

۵۸- در شکل مقابل اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، عرض نقطه C کدام است؟



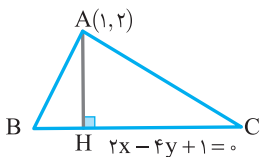
- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{y}{2}$

۵۹- در شکل روبه‌رو مساحت مثلث OAB چقدر است؟



- (۱) ۱۵۶ (۲) ۳۱۲ (۳) ۹۲ (۴) ۱۱۲

۶۰- در شکل مقابل، نقطه H کدام است؟



- (۱) $(\frac{3}{2}, 1)$ (۲) $(2, \frac{5}{4})$ (۳) $(-1, -\frac{3}{4})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, 0)$

۶۱- قرینه نقطه $A(1,2)$ نسبت به خط $y=ax+b$ نقطه $A'(-3,4)$ است. مقدار ab کدام است؟

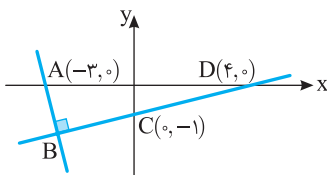
- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۵ (۴) -۵

◆ فاصله نقطه از خط

۶۲- اگر نقطه B قرینه نقطه $A(3,-1)$ نسبت به خط $3x-4y+17=0$ باشد، طول پاره‌خط AB چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۶۳- در شکل مقابل طول پاره‌خط AB کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ (۲) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$ (۳) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ (۴) $\frac{5\sqrt{17}}{17}$

۶۴- طول ارتفاع وارد از رأس B در مثلث ABC با رأس‌های $A(1,3)$ ، $B(-2,1)$ و $C(3,-1)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{16}{\sqrt{29}}$ (۳) $\frac{16}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{8}{\sqrt{29}}$

۶۵- مساحت مثلثی که نقاط $A(0,0)$ ، $B(2,1)$ و $C(3,-3)$ رأس‌های آن باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{11}{2}$ (۴) $\frac{13}{2}$

۶۶- فاصله مبدأ مختصات تا خط $y-4=m(x+2)$ برابر ۲ است. مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۶۷- فاصله نقطه $(k, 3)$ تا خط $4x-3y=-5$ برابر ۴ است. مجموع مقادیرهای ممکن k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۸- فاصله نقطه $(2, 3)$ تا خط $12y-5x=k$ برابر $\frac{5}{13}$ است. مجموع مقادیرهای ممکن k کدام است؟

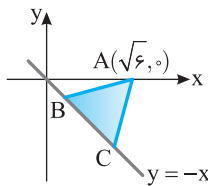
- (۱) ۴۹ (۲) ۵۰ (۳) ۵۱ (۴) ۵۲

۶۹- کدام خط بر خط $3x+4y=16$ عمود است و فاصله نقطه $(1,1)$ از آن برابر ۳ است؟

- (۱) $-4x+3y-14=0$ (۲) $-4x+3y+14=0$ (۳) $-4x+3y+12=0$ (۴) $-4x+3y-16=0$

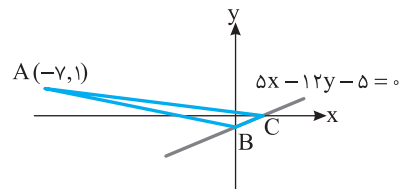
۷۰- دو نقطه بر خط به معادله $y=x-1$ قرار دارند که فاصله این نقطه‌ها از خط به معادله $2x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

- (۱) ۹ و ۱۵ (۲) ۱۱ و ۱۵ (۳) ۱۱ و ۱۵ (۴) ۹ و ۱۱



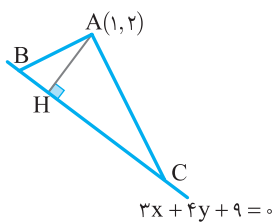
۷۱- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. مساحت این مثلث چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) $2\sqrt{3}$



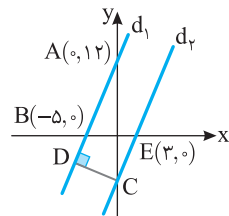
۷۲- در شکل مقابل، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

- (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{15}{8}$ (۴) $\frac{13}{6}$



۷۳- در شکل روبه‌رو $BH=2$. طول پاره‌خط AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) ۷ (۴) ۵



۷۴- در شکل روبه‌رو $d_1 \parallel d_2$. طول پاره‌خط CD کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{24}$ (۲) $\frac{96}{13}$ (۳) $\frac{5}{13}$ (۴) $\frac{4}{13}$

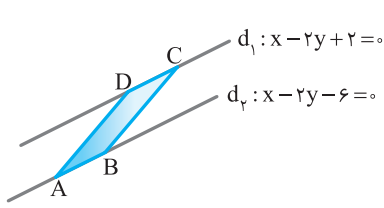
فاصله دو خط موازی

۷۵- دو ضلع مستطیلی روی خط‌های $4x+3y=1$ و $3x-4y=2$ هستند. اگر نقطه $A(1,2)$ یک رأس مستطیل باشد، مساحت آن کدام است؟

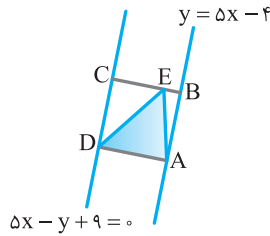
- (۱) $\frac{63}{25}$ (۲) $\frac{56}{25}$ (۳) $\frac{48}{25}$ (۴) $\frac{42}{25}$

۷۶- معادله‌های ضلع‌های مستطیلی به صورت مقابل است. مساحت این مستطیل کدام است؟ $2x-3y=1$ ، $3x+2y=4$ ، $4x-6y=5$ ، $9x+6y=1$

- (۱) $\frac{11}{26}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{11}{13}$



- ۷۷- در شکل روبه‌رو $AB = 2\sqrt{5}$. مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چقدر است؟
- (۱) $4\sqrt{5}$
 (۲) ۱۶
 (۳) ۸
 (۴) $8\sqrt{5}$



- ۷۸- در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مربع است. مساحت مثلث EDA چقدر است؟
- (۱) $\frac{13}{4}$
 (۲) ۳
 (۳) $\frac{13}{2}$
 (۴) $\frac{3}{2}$

- ۷۹- خط‌های $x + 2y + 1 = 0$ و $3x + 6y + k = 0$ موازی‌اند و فاصلهٔ میان آن‌ها برابر $\sqrt{5}$ است. مجموع مقادیرهای ممکن k کدام است؟
- (۱) -۶
 (۲) ۴
 (۳) ۶
 (۴) -۴

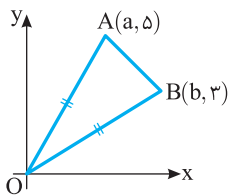
- ۸۰- فاصلهٔ خط‌های موازی $ax + 3y + 5 = 0$ و $2x + y + k = 0$ برابر $2\sqrt{5}$ است. اگر $k > 0$ ، مقدار $a + k$ کدام است؟
- (۱) $\frac{32}{3}$
 (۲) $\frac{35}{3}$
 (۳) $\frac{47}{3}$
 (۴) $\frac{53}{3}$

- ۸۱- فاصلهٔ خط‌های موازی $12x + 9y = 2$ و $ax + 3y + c = 0$ برابر ۳ است. اگر $c > 0$ ، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{43}$
 (۲) $\frac{4}{43}$
 (۳) $\frac{3}{45}$
 (۴) $\frac{1}{43}$

هندسهٔ تحلیلی

- ۸۲- اگر نقطه‌های $A(1, 2)$ ، $B(3, -1)$ و $C(-1, -2)$ سه رأس از یک متوازی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس چهارم کدام نمی‌تواند باشد؟
- (۱) $(-3, 1)$
 (۲) $(2, -3)$
 (۳) $(1, -5)$
 (۴) $(5, 3)$



- ۸۳- در شکل مقابل $AB = 2\sqrt{2}$. مقدار $a + b$ کدام است؟
- (۱) ۸
 (۲) ۱۰
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۴

- ۸۴- اگر نقطه‌های $A(0, 0)$ ، $B(1, 2)$ و $C(2, k)$ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC باشند، k چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟
- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

- ۸۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(1, -1)$ نسبت به خط $y = 2x$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$
 (۲) $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})$
 (۳) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$
 (۴) $(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$

- ۸۶- اگر نقطه‌های $A(-2, 3)$ ، $B(4, -5)$ و $C(-3, 1)$ رأس‌هایی از متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟
- (۱) ۵
 (۲) ۱۰
 (۳) ۲۰
 (۴) ۳۰

- ۸۷- معادلهٔ خطی که از خط‌های $x + 3y - 1 = 0$ و $x + 3y + 4 = 0$ به یک فاصله است، کدام است؟

- (۱) $x + 3y + 3 = 0$
 (۲) $2x + 6y - 3 = 0$
 (۳) $x + 3y - 3 = 0$
 (۴) $2x + 6y + 3 = 0$

- ۸۸- معادلهٔ خطی که از دو خط $2x - y + 1 = 0$ و $2y - 4x + 3 = 0$ به یک فاصله است، کدام است؟

- (۱) $4x - 2y - \frac{1}{2} = 0$
 (۲) $4x - 2y - \frac{1}{4} = 0$
 (۳) $2x - y - \frac{1}{2} = 0$
 (۴) $2x + y - \frac{1}{2} = 0$

کنکور سراسری

تجربی - ۹۲

۸۹- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $y=x+1$ و $2x-2y=3$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۹۰- مساحت مثلثی با سه رأس $A(2,5)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) ۷ (۴) $\frac{7}{5}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۹۱- نقطه $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y-x=5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

ریاضی - ۹۷

۹۲- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|$ و $y=5-|x-1|$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

تجربی - ۹۹

۹۳- مثلثی با رأس‌های $A(1,5)$ ، $B(7,3)$ و $C(2,-2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

۹۴- اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+2x=16$ ، $y-x=2$ و $y=0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث. در صفحه مختصات

خارج از کشور تجربی - ۹۹

کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

خارج از کشور ریاضی - ۹۹

۹۵- نمودارهای دو تابع $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=x+7$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) $10\sqrt{2}$

۹ مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+m}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط $y = 2x + 1$ است، پس

$$\frac{-3m+1}{2} = 2\left(\frac{2+m}{2}\right) + 1 \Rightarrow -3m+1 = 4+2m+2 \Rightarrow \Delta m = -5 \Rightarrow m = -1$$

بنابراین M نقطه $\left(\frac{2-1}{2}, \frac{-3(-1)+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ یعنی $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ است.

۱۰ اگر C نقطه (x_1, y_1) باشد، چون نقطه N وسط AC است، پس

$$(x_N, y_N) = \left(\frac{2+x_1}{2}, \frac{1+y_1}{2}\right) = (4, 0) \text{ . بنابراین } x_1 = 6 \text{ و } y_1 = -1 \text{ . به همین ترتیب، اگر B نقطه}$$

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{6+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2}\right) = (3, -3) \text{ باشد، چون نقطه K وسط BC است، پس}$$

بنابراین $x_2 = 0$ و $y_2 = -5$. سرانجام، اگر M نقطه (x_3, y_3) باشد، چون وسط AB

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-5}{2}\right) = (1, -2) \text{ است، پس}$$

۱۱ در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه وسط

پاره‌خط AC همان نقطه وسط پاره‌خط BD است. بنابراین

$$\left(\frac{-2+x}{2}, \frac{-3+y}{2}\right) = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{در نتیجه } -2+x=2 \Rightarrow x=4, \quad -3+y=1 \Rightarrow y=4$$

یعنی C نقطه $(4, 4)$ است.

۱۲ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه M وسط پاره‌خط BC به صورت زیر است:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

بنابراین معادله خطی که میانه AM روی آن قرار دارد، به صورت زیر است:

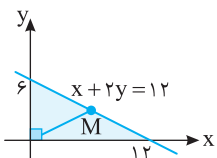
$$y - y_A = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = \frac{1-2}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = -x + 3$$

۱۳ دو سر وتر مثلث مورد نظر

نقطه‌های برخورد خط $x + 2y = 12$ با محورهای

مختصات هستند. مطابق شکل، این نقطه‌ها

$(0, 6)$ و $(12, 0)$ هستند. وسط پاره‌خط میان این



دو نقطه. نقطه $M\left(\frac{0+12}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = M(6, 3)$ یعنی $M(6, 3)$ است. شیب خطی که از مبدأ و این

نقطه می‌گذرد برابر $\frac{3-0}{6-0} = \frac{1}{2}$ است. پس معادله خط مورد نظر به صورت زیر است:

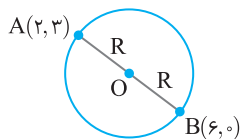
$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow x - 2y = 0$$

۱۴ فاصله نقطه A از نقطه B برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-6)^2} = 3\sqrt{2}$$

۱۵ مطابق شکل زیر، شعاع دایره برابر نصف فاصله دو نقطه A و B است. پس

$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = 5, \quad R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$$



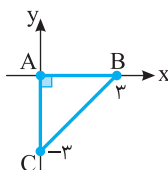
۱۶ M نقطه $\left(\frac{5-4}{2}, \frac{-2+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ یعنی $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ است. بنابراین

$$CM = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$

۱ طول پاره‌خط AB برابر است با $(2a+1)-(a-1)$. بنابراین

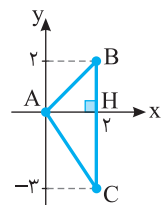
$$AB = 2a+1-a+1 = 5 \Rightarrow a = 3$$

پس طول پاره‌خط BC برابر است با $BC = (5a-2)-(2a+1) = 3a-3 = 6$.



۲ با توجه به شکل زیر واضح است که

$\hat{A} = 90^\circ$ و $AB = AC = 3$. بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.



۳ با توجه به شکل زیر واضح است که

$$BC = 2 - (-3) = 5, \quad AH = 2$$

$$\text{بنابراین } S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$

۴ فاصله A از B برابر است با $|m-2|$ و فاصله A از C برابر است با

$$|m-1-2| \text{ . بنابراین } |m-2| = |2|m-3| \text{ پس}$$

$$m-2 = 4m-6 \Rightarrow m = \frac{4}{3}, \quad m-2 = -4m+6 \Rightarrow m = \frac{8}{5}$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m برابر است با $\frac{32}{15}$.

۵ نقطه وسط پاره‌خط میان نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطه

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ است. بنابراین نقطه مورد نظر نقطه زیر است:}$$

$$\left(\frac{a+1+3-a}{2}, \frac{4-2b+2b-3}{2}\right) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

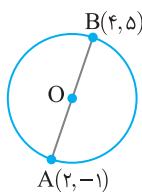
۶ مطابق شکل زیر نقطه O، مرکز دایره،

وسط قطر AB است. پس

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

پس نقطه $(3, 2)$ مرکز دایره است.



۷ چون نقطه M وسط پاره‌خط AB است، پس

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3+b}{2} \Rightarrow b = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow a = \frac{3a+2}{2} \Rightarrow 2a = 3a+2 \Rightarrow a = -2$$

پس $a+b = -3$.

۸ نقطه M وسط پاره‌خط واصل نقاط A و B است، پس

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$$

بنابراین نقطه $M(2, 5)$ روی خط $y = mx + 1$ قرار دارد و مختصات M در معادله

$$5 = 2m + 1 \Rightarrow m = 2$$

خط صدق می‌کنند. پس

است. در نتیجه شیب خط d_1 برابر $\frac{1}{4}$ است. از طرف دیگر خط d_1 از نقطه $C(-3, 0)$

می‌گذرد. بنابراین معادله آن به صورت مقابل است $y - 0 = \frac{1}{4}(x + 3) \Rightarrow 4y = x + 3$

فرض کنید CH ارتفاع وارده بر ضلع AB باشد. شیب خط گذرنده از

نقطه‌های A و B برابر $m_{AB} = \frac{9-6}{-7-(-5)} = -\frac{3}{2}$ است. بنابراین چون CH بر AB عمود

است، شیب خط گذرنده از نقطه‌های C و H برابر $\frac{2}{3}$ است. بنابراین معادله ارتفاع CH

به صورت مقابل است $y - 0 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow 3y - 2x = 2$

تذکره توجه کنید که شیب خط گذرنده از نقطه‌های A و B برابر

$m_{AB} = \frac{9-6}{-7-(-5)} = -\frac{3}{2}$ و شیب خط گذرنده از نقطه‌های A و C برابر

$m_{AC} = \frac{1-6}{1-(-5)} = \frac{2}{3}$ است. چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ ، پس AB بر AC عمود

است و معادله ارتفاع وارده بر ضلع AB همان معادله خط گذرنده از نقطه‌های A و C است.

شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با $\frac{2a-a}{3-1} = \frac{a}{2}$

شیب خط $2x - 3y = 1$ برابر $\frac{2}{3}$ است. چون این دو خط بر هم عمودند، پس

$$\frac{a}{2} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow a = -3$$

پس معادله خط گذرنده از نقاط $A(1, -3)$ و $B(3, -6)$ به صورت زیر است:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - (-3) = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y + 3 = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطه‌های A و B برابر $-\frac{3}{2}$ است.

راه‌حل اول می‌دانیم عمودمنصف پاره خط AB از وسط آن یعنی نقطه

$M(1, \frac{5}{2})$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از نقطه‌های A و B برابر $\frac{4-1}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$ است.

بنابراین شیب عمودمنصف پاره خط AB برابر $-\frac{8}{3}$ است. در نتیجه معادله این خط

به صورت $y - \frac{5}{2} = -\frac{8}{3}(x - 1) = -\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$ یا به طور ساده‌تر $16x + 6y = 31$ است.

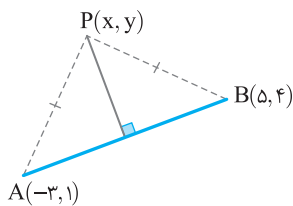
راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله

است. فرض می‌کنیم نقطه $P(x, y)$ روی عمودمنصف پاره خط AB باشد. در این صورت

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

$$\xrightarrow[\text{دو می‌رانسم}]{\text{طرفین را به توان}} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 41$$

$$16x + 6y = 31$$



فاصله نقطه $A(2, 3)$ از خط $3x - 4y + 1 = 0$ برابر است با

$$\frac{|3 \times 2 - 4 \times 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

۱۷ فاصله نقطه A از نقطه B را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (m-2)^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 5}$$

بنابراین $\sqrt{m^2 - 4m + 5} = m \Rightarrow m^2 - 4m + 5 = m^2 \Rightarrow m = \frac{5}{4}$

۱۸ طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

بنابراین محیط این مثلث برابر است با $\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$.

۱۹ طول ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

چون تساوی $BC^2 = AB^2 + AC^2$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر واضح است که این مثلث متساوی‌الساقین نیست.

۲۰ شیب خط $3x + 4y = 1$ برابر $-\frac{3}{4}$ است. برای اینکه خطی بر این خط

عمود باشد باید شیب آن برابر $\frac{4}{3}$ باشد. پس شیب خط‌های داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$3x - 4y = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{4} \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$4x + 3y = 1 \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$6x + 8y = 5 \Rightarrow m = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$8x - 6y = 7 \Rightarrow m = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{گزینه (۴)}$$

پس خط داده شده بر خط $8x - 6y = 7$ عمود است.

۲۱ شیب خط گذرنده از نقاط B و D برابر $\frac{6-0}{2-(-1)} = 2$ و شیب خط

گذرنده از نقاط A و D برابر $\frac{2-0}{a-(-1)} = \frac{2}{a+1}$ است. چون این دو خط بر هم عمودند، پس

$$2\left(\frac{2}{a+1}\right) = -1 \Rightarrow a = -5$$

۲۲ شیب خط $x + ky = 1$ برابر $-\frac{1}{k}$ و شیب خط $(k+1)x - ky = 2$

برابر $\frac{k+1}{k}$ است. برای اینکه دو خط بر هم عمود باشند، باید

$$\left(-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right) = -1 \Rightarrow k+1 = k^2 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

پس به ازای دو مقدار برای k دو خط بر هم عمودند.

۲۳ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است. بنابراین شیب

خطی که بر خط $y = \frac{3}{4}x$ عمود است $-\frac{4}{3}$ است و معادله خطی که شیب آن $-\frac{4}{3}$ است و

از نقطه $(15, 0)$ می‌گذرد به صورت مقابل است $4x + 3y = 60 \Rightarrow y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 15)$

۲۴ خط d_1 از دو نقطه $A(4, 0)$ و $B(0, 8)$ می‌گذرد. پس معادله آن

به صورت مقابل است: $y - 0 = \frac{8-0}{0-4}(x-4) \Rightarrow y = -2(x-4) = -2x + 8$

با توجه به شکل داده شده خط d_1 بر خط d_2 عمود است. چون شیب خط d_1 برابر -2

در این صورت

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, & y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x_N &= \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{x_2 + x_3}{2}, & y_N &= \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{y_2 + y_3}{2} \\ x_P &= \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 3 = \frac{x_1 + x_3}{2}, & y_P &= \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \end{aligned}$$

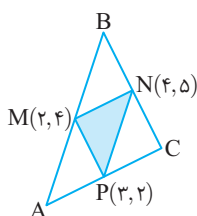
بنابراین

$$x_1 + x_2 = 4, \quad y_1 + y_2 = 8$$

$$x_2 + x_3 = 8, \quad y_2 + y_3 = 10$$

$$x_1 + x_3 = 6, \quad y_1 + y_3 = 4$$

اگر تساوی‌های ستون اول را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. از طرف دیگر می‌دانیم $x_2 + x_3 = 8$ ، بنابراین $x_1 + 8 = 9$ ، پس $x_1 = 1$. به همین ترتیب طبق $x_1 + x_2 = 4$ ، نتیجه می‌شود $x_2 = 3$ و با توجه به اینکه $x_2 + x_3 = 8$ ، پس $x_3 = 5$. اگر همین کار را با ستون سمت راست انجام دهیم، معلوم می‌شود $y_1 = 1$ ، $y_2 = 7$ و $y_3 = 3$. بنابراین رأس‌های مثلث نقطه‌های $(1, 1)$ ، $(3, 7)$ و $(5, 3)$ هستند.



چون قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، مطابق شکل

زیر نقطه M وسط قطرهای AC و BD است. یعنی

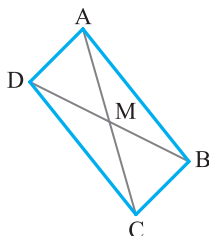
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow \frac{m + m + n}{2} = \frac{2 + m - n}{2}$$

$$2m + n = 2 + m - n \Rightarrow m = 3 - 2n$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \frac{4 + m - n}{2} = \frac{m + n}{2}$$

$$4 + m - n = m + n \Rightarrow n = 2$$

با توجه به اینکه $m = 3 - 2n$ ، بنابراین $m = -1$ و در نتیجه $mn = -2$.



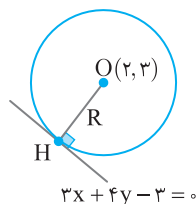
در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه وسط

پاره‌خط AC همان نقطه وسط پاره‌خط BD است.

در نتیجه $(\frac{-b+5}{2}, \frac{-a+a}{2}) = (\frac{a-2}{2}, \frac{-3+a}{2})$ بنابراین

$$\begin{cases} -b+5 = a-2 \\ 0 = -3+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7-a \\ a = 3 \end{cases}$$

پس $a = 3$ و $b = 7 - a = 4$. در نتیجه $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$



چون خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، پس کافی است فاصله نقطه $O(2, 3)$ (مرکز دایره) را از خط $3x + 4y - 3 = 0$ به دست آوریم که همان شعاع دایره است

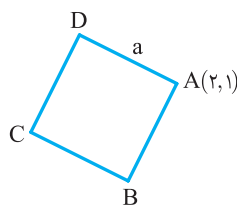
$$R = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

معادله خط گذرنده از نقطه‌های $A(3, 4)$ و $C(5, 0)$ به صورت زیر است.

$$y - y_C = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_C) \Rightarrow y - 0 = \frac{0 - 4}{5 - 3}(x - 5)$$

$$y = -2(x - 5) = -2x + 10 \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$$

بنابراین، طول BH برابر با فاصله $B(2, 0)$ از این خط است $BH = \frac{|4 + 0 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$



فرض می‌کنیم $ABCD$ مربع مورد نظر باشد. چون مختصات نقطه A در معادله خط داده شده صدق نمی‌کند $(1 \neq 2 \times 2 + 1)$ ، پس $y = 2x + 1$ معادله AD و AB نیست. با توجه به شکل یا معادله BC است یا DC . هر کدام که باشد، اگر فاصله نقطه A تا خط $y = 2x + 1$ را

حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید

$$2x - y + 1 = 0, \quad a = \frac{|4 - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $S = a^2 = \frac{16}{5}$

معادله دو خط مورد نظر به صورت $2x - y + \frac{5}{3} = 0$ و $2x - y - 3 = 0$

$$\frac{|-3 - \frac{5}{3}|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{14}{3\sqrt{5}}$$

است، پس فاصله آن‌ها از یکدیگر برابر است با

فاصله خط‌های موازی $3x + 4y + 10 = 0$ و $3x + 4y - 10 = 0$ برابر

است با $\frac{|10 - (-10)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$. بنابراین طول یک ضلع مستطیل مورد نظر 4 است، و

چون مساحت آن 12 است پس طول ضلع دیگرش برابر است با $\frac{12}{4} = 3$. در نتیجه

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

فاصله نقطه A از نقطه B برابر است با $a - (2a - 3) = 3 - a$. فاصله

نقطه C از نقطه B برابر است با $3a - a = 2a$. طبق فرض $AB \times BC = 4$ ، بنابراین

$$(3 - a)(2a) = 4 \Rightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

اگر $a = 1$ ، آن‌گاه $2a - 3 = -1$ که با توجه به مثبت بودن طول نقطه A قابل قبول نیست. اگر $a = 2$ ، آن‌گاه $A = 1$ ، $B = 2$ و $C = 6$. بنابراین $AC = 6 - 1 = 5$.

نقطه D روی خط $y = 2x$ است، پس به صورت $D(d, 2d)$ است. در

نتیجه نقطه A به صورت $A(d, 0)$ است. بنابراین طول AB برابر است با

$$2d = 12 - d \Rightarrow d = 4 \quad \text{پس} \quad AD = AB$$

بنابراین نقطه C نقطه $(12, 2d)$ یعنی $(12, 8)$ است.

فرض می‌کنیم رأس‌های مثلث نقطه‌های $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و

$C(x_3, y_3)$ باشند و نقطه‌های $M(2, 4)$ ، $N(4, 5)$ و $P(3, 2)$ به ترتیب وسط ضلع‌های AB ، BC و CA باشند.

۴۳ مختصات نقطه C را با $(c, 0)$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{3^2 + 0} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(c-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(c-3)^2 + 16}$$

طبق فرض $AB=AC$ ، در نتیجه

$$\sqrt{(c-3)^2 + 16} = 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} (c-3)^2 + 16 = 18$$

$$(c-3)^2 = 2 \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{2}$$

چون $c > x_A = 3$ ، پس $c = 3 + \sqrt{2}$.

۴۴ فاصله نقطه‌های $(3, 4)$ و $(a, 2)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

فاصله نقطه‌های $(-2, 1)$ و $(a, 2)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + 1}$$

چون این فاصله‌ها برابرند، پس

$$\sqrt{(a-3)^2 + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + 1} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} (a-3)^2 + 4 = (a+2)^2 + 1$$

$$a^2 - 6a + 9 + 4 = a^2 + 4a + 4 + 1 \Rightarrow 10a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

۴۵ ابتدا توجه کنید که O وسط AB است. بنابراین

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{a+2b}{2} \Rightarrow a+2b=2$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{b+a-1}{2} \Rightarrow a+b=-1$$

$$\begin{cases} a+2b=2 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ -2a-2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ -a-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ -a=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ 6+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ 2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2(-2)=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-4=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$a+b=-1 \xrightarrow{a=-4} b=3$$

در نتیجه $a=-4$ و $b=3$. پس کافی است فاصله نقطه‌های $O(1, -1)$ و

$A(-4, 3)$ را حساب کنیم تا طول شعاع دایره به دست آید

$$OA = \sqrt{(-4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

۴۶ راه‌حل اول نقطه مورد نظر را نقطه $C(a, 0)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$AC = \sqrt{(a-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{a^2 + 9}$$

$$BC = \sqrt{(a-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

چون $AC=BC$ ، بنابراین

$$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{(a-3)^2 + 4} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} a^2 + 9 = (a-3)^2 + 4$$

$$a^2 + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4 \Rightarrow 6a = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۴۷ راه‌حل دوم نقطه‌ای که فاصله‌اش از نقطه‌های $A(0, 3)$ و $B(3, 2)$ برابر باشد، روی

عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین ابتدا معادله عمودمنصف پاره‌خط AB را

به دست می‌آوریم. نقطه $M(\frac{3+0}{2}, \frac{2+3}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ وسط پاره‌خط AB است و شیب

آن برابر $m_{AB} = \frac{3-2}{0-3} = -\frac{1}{3}$ است. پس شیب عمودمنصف پاره‌خط AB برابر ۳

است و معادله آن می‌شود: $y - \frac{5}{2} = 3(x - \frac{3}{2})$ (۱)

چون نقطه مورد نظر روی محور X است آن را به صورت $C(a, 0)$ در نظر می‌گیریم.

مختصات نقطه C در معادله (۱) صدق می‌کند:

$$0 - \frac{5}{2} = 3(a - \frac{3}{2}) \Rightarrow a - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۳۹ خط‌های $y = x + 3$ و $y = 3x + 2$ موازی نیستند. پس معادله‌های

داده شده دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع هستند. همچنین $A(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ روی هیچ یک از این

خط‌ها قرار ندارد چون در معادله هیچ کدام از این خط‌ها صدق نمی‌کند. مطابق شکل مختصات

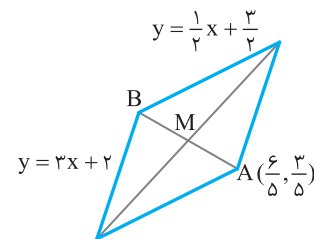
B را که محل تقاطع دو خط $y = \frac{1}{2}(x+3)$ و $y = 3x+2$ است، مشخص می‌کنیم

$$3x+2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \xrightarrow{y=3x+2} y = \frac{7}{5}$$

بنابراین رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. پس

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{7}{5}}{2} = 1$$

پس نقطه $M(\frac{1}{2}, 1)$ محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع است.



۴۰ در هر متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین P وسط پاره‌خط

MK است. نقطه M وسط CD است، پس طول آن برابر است با $\frac{0+9}{2} = \frac{9}{2}$. نقطه K وسط

AB است، پس طول آن برابر است با $\frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2}$. بنابراین طول نقطه P برابر است با

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

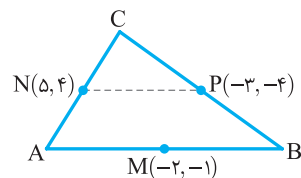
۴۱ چون NP و AB موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. بنابراین

ابتدا شیب خط NP را به دست می‌آوریم $m_{NP} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{-4-4}{-3-5} = 1$ پس

$m_{AB} = 1$. معادله خطی را که از نقطه $M(-2, -1)$ با شیب ۱ می‌گذرد می‌نویسیم

$$y + 1 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 1$$

پس معادله خطی که ضلع AB روی آن است $y = x + 1$ است.



۴۲ مختصات نقطه M، وسط AB، را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

پس طول میانه CM برابر است با

$$CM = \sqrt{(m-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$$

بنابراین

$$\sqrt{m^2 - 4m + 8} = 2 \Rightarrow m^2 - 4m + 8 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$