هندسه ۲

آموزش و تست

پُر از تست‌های دوست‌داشتنی

یازدهم

• جواد ترکمن • روح‌الله مصطفی‌زاده

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

تقدیم به دکتر یحیی تابش

یحیی تابش در سال ۱۳۳۹ در تهران به دنیا آمد. وی در رشته مهندسی کامپیوتر از دانشگاه صنعتی شریف فارغ التحصیل شد و مدرک دکتری خود را در ریاضیات کاربردی از دانشگاه سیراکیوس آمریکا اخذ کرد.
تابش به مدت ۱۱ سال در دانشگاه صنعتی اصفهان و پس از آن در دانشگاه صنعتی شریف مشغول به کار شد. او همچنین به مدت ۴ سال رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف و پس از آن به عنوان معاون مرکز کامپیوتر آن دانشگاه منصوب گردید.
دکتر تابش به مسابقات ریاضی و انفورماتیک علاقه زیادی دارد. وی یکی از برگزارکنندگان اولیهٔ مسابقهٔ ریاضیِ اصفهان بود. مسابقه‌ای که راه را به سوی المپیادهای ریاضی ایران و بسیاری المپیادهای علمی دیگر در ایران باز کرد. او از طراحان و مؤسسان خانه‌های ریاضیات در ایران است. همچنین نویسنده و ویراستار نخستین مجلهٔ انجمن ریاضی ایران (فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی) می‌باشد.
یحیی تابش در ایجاد تحرک در بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان به منظور انتخاب ریاضیات و علوم کامپیوتر به عنوان رشتهٔ تحصیلی، نقش بسزایی دارد.
وی در سال‌های متمادی درگیر آماده‌سازی تیم‌های ایرانی برای شرکت در المپیادهای ریاضی بوده است.
دکتر یحیی تابش عضو هیئت علمی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف در تاریخ ۳۰ جولای ۲۰۱۰ (۸ مرداد ۱۳۸۹) از سوی پروفسور پیتر کندراو، رییس کمیتهٔ جوایزِ «فدراسیون بین‌المللی مسابقات ملی ریاضی» به عنوان برندهٔ نشان جهانی «پال اردیش» در سال ۲۰۱۰ معرفی شد.

سخن نخست

بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم		فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم

«حضرت حافظ»

دانش‌آموزان عزیز! فرزندان دلبندم!
انتشارات مهروماه وارد مرحلهٔ جدیدی از فعالیت‌های آموزشی خود شده است. هم‌زمان با تحول اساسی در سیستم آموزش کشور و ایجاد تغییرات بنیادین در کتاب‌های درسی، جمعی از بهترین اساتید و مؤلفین توانمند کشور در «مهروماه» گرد هم آمده‌اند تا برای شما کتاب‌هایی را به رشتهٔ تحریر درآورند که از خواندن آن‌ها لذت برده و دوستشان داشته باشید. کتاب‌هایی که در شکوفایی توانمندی‌های شما عزیزان دلبندم، جداً اثرگذار باشند.

اساتید و مؤلفانی که در کتاب‌های جدید مهروماه (دهم، یازدهم و سال آینده، دوازدهم) دست به قلم شدند، علاوه‌بر برخورداری از تمام ویژگی‌های یک مؤلف آموزشی خوب مانند سواد علمی بالا، تجربهٔ کافی در تدریس و تألیف و ...، یک ویژگی دیگر هم دارند؛ ویژگی که شاید محور زندگی اینجانب و رکن اساسی تمام فعالیت‌های آموزشی مهروماه را تشکیل می‌دهد: عشق به فرزندانمان. ما این مهر و عشق را با هیچ مبلغ و ثروتی عوض نمی‌کنیم، حتی اگر آن مبلغ در حد عدد آووگادرو باشد!
فرزندان همچون ماه من!

برای این‌که کتاب‌های مهروماه در این دورهٔ جدید، بیش‌ترین کارایی آموزشی را در جهت موفقیت شما داشته باشند، تدابیر فراوانی اندیشیدیم: شورای تألیف تشکیل دادیم، کارآمدترین مدیران آموزشی و مؤلفان برجسته را گرد هم آوردیم، کتاب‌ها براساس شیوه‌نامه‌هایی متکی بر چند دهه تجربهٔ موفق نگاشته شدند، چندین لایهٔ ویراستار (از دانشجویان فرهیخته و نابغه گرفته تا اساتید بنام کشور) به کار گرفتیم تا از غلط‌های علمی، محاسباتی، تایپی و... اثری باقی نماند.
گروه‌های تولید و هنری مهروماه نیز با هدایت مستقیم مدیر فرزانهٔ مهروماه، جناب احمد اختیاری، سنگ تمام گذاشتند تا کتاب‌هایی تولید شوند همچون ماه! کتاب‌هایی که برازندهٔ نام وزین «مهروماه»اند.
شاید مناسب باشد که تعدادی از مهم‌ترین انواع کتاب‌های کمک آموزشی مهروماه را برای شما معرفی کنم:

۱ کتاب‌های آموزش و کار: در این کتاب در مورد هر مبحثی که در مدرسه توسط دبیر محترم تدریس می‌شود یا خودتان از کتاب درسی مطالعه می‌کنید، ابتدا آموزش مختصر و مفید و البته کاملی از آن مبحث داده شده و سپس تمرین‌هایی ارائه شده که با حل آن‌ها می‌توانید تمام قسمت‌های تدریس‌شده یا مطالعه‌شده از کتاب درسی را، به خوبی فرا گرفته تا بر کتاب درسی با تمام جزئیات آن، مسلط شوید.

۲ کتاب‌های تست: در این کتاب‌ها، برای هر مبحث معین، ابتدا درس‌نامه‌ای مفید و جذاب و سپس تست‌های مربوط به آن مبحث ارائه شده است. درس‌نامه‌ها شامل مفاهیم و مطالب اصلی و بنیادی بوده و به نکات حاشیه‌ای که دور از موضوع محوری و اصلی‌اند، پرداخته نشده است. از طرفی، ضمن ارائهٔ پاسخ تشریحی تست‌ها، برخی از نکات ویژهٔ تستی در قالب «راهبردهای آموزشی» بسیار کاربردی و منحصربه‌فرد آورده شده است. همین‌طور، در برخی از کتاب‌های تست (مانند درس شیرین شیمی!) در کنار پاسخ تشریحی تعدادی از تست‌ها، ایستگاه‌های «شارژینگ» آمده است تا دانش‌آموزان در موضوعات مورد نظر، خیلی خوب شارژ شوند.
با حل تست‌های این کتاب‌ها و مطالعهٔ پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن‌ها و نیز درس‌نامه‌ها، راهبردها و شارژینگ‌ها، موفقیت در آزمون‌ها و کنکور امری طبیعی و آسان خواهد بود.

۳ کتاب‌هـای آمـوزش ۳۶۰ درجـه: ویژگی اساسـی ایـن کتاب‌ها، ارائهٔ آمـوزش کامـل درس و مفاهیم و همین‌طور، پرسش‌هایی است که دانش‌آموزان با حل آن‌ها، در امتحانات مدرسه با قطعیت به نمرهٔ ۲۰ رسیده و از طرفی، پایهٔ آموزشی لازم برای حمله به تست‌ها را پیدا خواهند کرد.
ضمنـاً، در ایـن کتاب‌ها، ضمن ارائهٔ درس در هر مبحث، پرسـش‌های جالبی از طرف سـه دانش‌آموز به ترتیب قوی، متوسط و نسبتاً ضعیف پرسیده می‌شوند که پاسخ به این پرسش‌ها، مکمل خوبی برای درس‌های ارائه شده است.

۴ کتاب‌هـای لقمـه: ابعاد ایـن کتاب‌ها، کوچک بـوده و بنابرایـن می‌توانند همانند تلفن همـراه، همه جا همراهتان باشـند. اندازه و فرم این کتاب‌ها و نیز مطالب تألیف‌شـده در آن‌ها به گونه‌ای تنظیم شـده‌اند که مطالعهٔ این کتاب‌ها همه جا میسّـر اسـت: در مترو و اتوبوس، توی هواپیما، توی رختخواب و حتی شـاید زیر دوش حمام!

۵ کتاب‌های امتحانوفن: این کتاب برای هفته‌های آخر قبل از امتحان و شب امتحان طراحی و تألیف شده اسـت. یکی از ویژگی‌های این کتاب، مجهز بودن آن به خلاصه درس‌های «کپسـولی» منحصربه‌فرد اسـت. در مجموع ده سری امتحان بارم‌بندی شدهٔ استاندارد با رعایت تمام ضوابط آموزش و پرورش در آن ارائه شده و علاوه بر پاسـخ‌های لازم برای گرفتن نمرهٔ کامل، توضیحات اضافی جهت شـیرفهم شدن دانش‌آموزان نیز در کنار پاسخ‌ها آمده است.

غیر از پنج نوع کتاب مذکور انتشارات مهروماه، کتاب‌های دیگری هم برای نظام جدید آموزشی منتشر خواهد کرد که هر کدام به جای خود، مفید و دوسـت داشتنی هسـتند؛ از جمله سـری کتاب‌های معجزهٔ کنکور، کتاب‌های آزمون، کتاب‌های جمع‌بندی و کتاب‌های جامع کنکور. اطلاعات لازم در مورد تک‌تک این کتاب‌ها را می‌توانید از طریق سایت مهروماه به آدرس mehromah.ir به‌دست آورید.

با آرزوی توفیق روزافزون همهٔ فرزندان میهنم
مدیر شورای تألیف
محمدحسین انوشه

مقدمه

درس «هندسه» در نظام جدید آموزشی متوسطهٔ دوم، با رویکرد تازه و تغییراتی اساسی، با نگارشی قانونمندتر و مبتنی بر استانداردهای روز دنیا، ارائه شـده اسـت. از این‌رو تألیف کتابی به جهت بحث و بسـط بیشـتر مطالب کتاب هندسـهٔ پایهٔ یازدهم، به‌صورت کاملاً مفهومی و تشریحی و همراه با تست‌های استاندارد و نوین، به شدت احساس می‌شد.

مؤلفان بر این عقیده‌اند که مشکل اغلب دانش‌آموزان در حل مسائل و تست‌های هندسه، عدم درک صحیح از مفاهیم و ناتوانی در رسم شکل‌های واضح و قابل قبول است. در واقع دانش‌آموزان موفق در درس هندسه باید بتوانند دید خود را از شکل‌های هر سؤال و تغییـرات مرحلـه به مرحلـه تقویت نمایند، که این موضوع اسـاس کاربرد مفاهیم موجود در روابط و قضیه‌های هندسـه، در حل مسـائل و تسـت‌های چهار گزینه‌ای می‌باشد. لذا مؤلفان با تکیه بر تجربه‌های سـال‌های تدریس و با استفاده از منابع معتبر روز دنیا، کتاب پیش رو را به رشته تحریر درآورده‌اند.

ساختار و ویژگی‌های این کتاب

۱ در این کتاب مفاهیم هر درس، به درسـنامه‌های مختلف تقسـیم‌بندی شـده اسـت و در هر درسنامه سـعی شده است مطالب به‌طور کامل بسـط و ارائه شـود. اثبات‌های مورد نیاز در چارچوب کتاب درسـی ارائه گردیده و از بیان اثبات‌های خارج کتاب درسـی اجتناب شده است.

پس از هر درسنامه، مثال‌هایی برای به‌کار بردن مفاهیم همان درسنامه ارائه شده است. در این مثال‌ها سعی شده است که علاوه بر سؤالات تألیفی، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های موجود در کتاب درسی، در جای مناسب خودشان، پوشش داده شود.

۲ به جهت تسـلط بیشـتر بر مفاهیم هر درسنامه، سؤالاتی در قالب «الگویابی کنید» آمده است، که در آنها آموخته‌های دانش‌آموز از درسنامه و مثال‌های ارائه شده شبیه‌سازی می‌شود. توصیه می‌شود این نوع سؤالات را ابتدا حل نمایید و سپس به راه‌حل‌ها توجه کنید.

۳ در قسمت «تمرین» سعی شده است تمام تمرین‌های کتاب درسی و در برخی موارد تمرین‌های مکمل، در جای مناسب خودشان به‌طور کامل تشریح شوند.

۴ در پایان هر درسنامه، تست‌های موضوعی، که فقط به مطالب همان درسنامه می‌پردازد، قرار گرفته است. هدف از این تست‌ها، تثبیت مطالب ارائه‌شده به همراه دستیابی به فنون و مهارت‌های حل تست‌های مربوط به مفاهیم گفته شده در درسنامه است.

۵ در پایان هر فصل تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای ترکیبی، متناسب با مطالب ارائه شده در کل فصل و احیاناً فصل‌های مرتبط قبلی (بعضاً از هندسـه ۱ در سـال دهم)، قرار گرفته است. هدف از ارائه این سؤال‌ها، جمع‌بندی مطالب کل فصل و تسلط بر حل مسائلی متشکل از چند مفهوم یا مهارت می‌باشد.

۶ در تمام سـؤال‌های موجود در درسنامه، سـعی شده است پاسخ و راه‌حل‌های ارائه‌شده، متناسب با مطالب کتاب درسی و با در نظر گرفتن اطلاعات یک دانش‌آموز پایهٔ یازدهم باشد. در این راستا تلاش کرده‌ایم در حد امکان، از روش‌های جدید و استاندارد جهت کمک به درک بهتر استفاده کنیم.

۷ در پاسـخ تمام تسـت‌های موجود در این کتاب سعی شـده است راه‌حل‌های ارائه شـده به‌صورت متن‌های کاملاً تشریحی (و نه فقط عبارت‌های ریاضی) و به دور از هر نکتهٔ حفظی، پوشش داده شود. برای این کار از روشی استاندارد مبتنی بر «شکل‌های مرحله به مرحله»، که پروسهٔ حل را تصویرسازی می‌نماید، استفاده شده است.

و اما قدردانی...

بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم در به ثمر رسیدن این کتاب ما را یاری کرده‌اند تشکر و قدردانی نماییم.

- سپاس ویژه تقدیم به مدیریت انتشارات مهروماه، جناب آقای احمد اختیاری، که در تمامی مراحل همواره با حمایت‌های بی‌دریغ، ما را یاری نموده‌اند.
- تشکر و قدردانی از جناب آقای مهندس عباس اشرفی، که در جهت به ثمر رسیدن این کتاب، زحمات زیادی کشیدند.
- سپاس از زحمات بی‌بدیل ویراستار محترم، سرکار خانم ندا صالح‌پور که با صبر و حوصلهٔ وافر، متن‌ها را مورد مطالعه قرار دادند و با نظرات علمی و نقادانه، در جهت بهتر شدن این کتاب، همراه ما بودند.
- تشکر ویژه از گروه تولید با مدیریت مثال‌زدنی سرکار خانم سمیه جباری که اگر نبود مددشان، به‌طور قطع چاپ این کتاب در هاله‌ای از ابهام بود و همچنین صفحه‌آرای محترم، سرکار خانم مریم تاجداری و حروف‌چین‌های عزیز سرکار خانم عباسی و آقای محسن کامران‌پور و رسّام‌های محترم ساسان اسدی، غزاله فروزان گهر و فرشته شاه‌بیک ، که همگی با سلیقه و دلسوزی کامل تلاش خود را در جهت تولید کتاب به‌کار بستند.
- قدردانی ویژه از گروه هنری با مدیریت هنرمندانه و خوش‌سلیقه جناب آقای محسن فرهادی و یاران همراهشان خانم الهام منصف زاده و خانم سمیرا مختاری که زحمت تمام زیبایی‌های تصویری و بصری کتاب را برعهده داشتند.

در آخر ...

کتاب را به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی و نیز دبیران محترم درس هندسه، پیشکش می‌کنیم و امیدواریم مطالب آن راهگشای این عزیزان باشد. از تمامی کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، صمیمانه تقاضا داریم هر نوع اشکال چاپی یا محتوایی را به مؤلفان گوشزد نمایند تا در ویراست‌های بعدی مورد توجه و اصلاح قرار گیرد.

جواد ترکمن، روح‌الله مصطفی زاده
زمستان ۹۶

فهرست

فصل اول دایــره **۹**

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۱۰

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره ۳۸

درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی ۵۴

فصل دوم تبدیل‌های هندسی و کاربردها **۱۵۱**

درس اول: تبدیل‌های هندسی ۱۵۲

درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها ۱۶۹

فصل سوم روابط طولی در مثلث **۱۹۷**

درس اول: قضیهٔ سینوس‌ها ۱۹۸

درس دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها ۲۰۲

درس سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها ۲۱۳

درس چهارم: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ۲۱۸

فصل اوّل

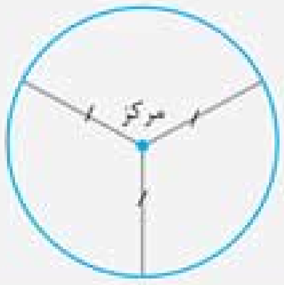
دایــره

پرکاربردترین شکل در طبیعت، معماری، صنعت و ... می‌باشد. به‌عنوان یک مسأله ریاضی می‌توان ثابت کرد، در بین تمام شکل‌های هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشــترین مساحت است و شاید همین خاصیت، از دیرباز تاکنون، مورد توجه بشر بوده است که در طراحی و ساخت محیط اطراف خود از دایره استفاده شده است. در این فصل دایره به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

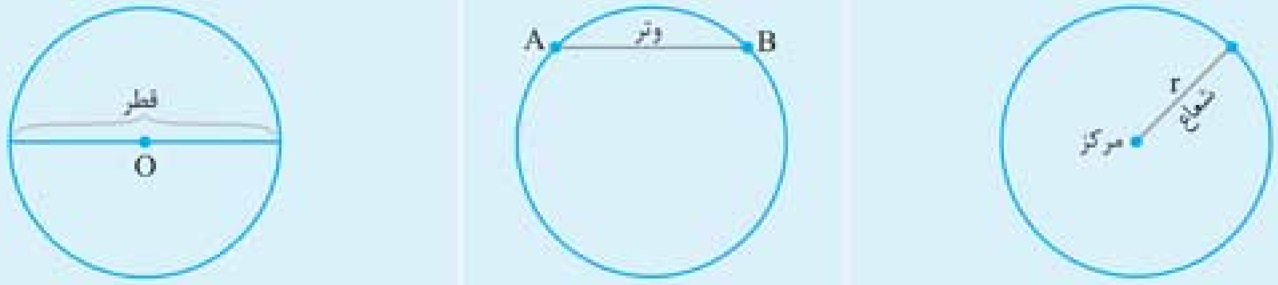
تعاریف اولیهٔ دایره

تعریف:

◀ مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت به نام مرکز به فاصلهٔ یکسان می‌باشند.



◀ **شعاع، وتر و قطر**



شعاع: فاصلهٔ مرکز دایره تا نقاط روی دایره را می‌گویند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهند.	**وتر**: پاره‌خطی که دو نقطهٔ روی دایره را به هم وصل می‌کند.	**قطر**: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد. قطر دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. (در واقع قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.)

◀ **کمان**

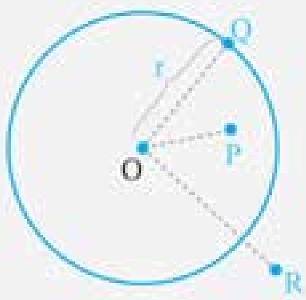
بخشی از منحنی دایره که توسط وتری از دایره جدا شده است. هر کمانِ روی دایره، منحنی دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند که اگر اندازهٔ آن از نیم‌دایره کمتر باشد، با دو سرِ کمان و اگر بزرگ‌تر باشد، معمولاً با سه حرف نشان داده می‌شود. در شکل مقابل، دو کمان $\overset{\frown}{EF}$ و $\overset{\frown}{EMF}$ دیده می‌شوند.

اندازهٔ هر کمان برحسب درجه بیان می‌شود. (می‌دانیم که منحنی یک دایره، به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و هر قسمت برابر ۱ درجه است.)

◀ **وضعیت نقطه و دایره**

هر نقطه نسبت به دایره، سه وضعیت «داخل، روی و بیرون» دایره را دارد. تشخیص این موضوع، به فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره وابسته است.

طرز تشخیص	وضعیت	نقطه
$OP < r$	درون دایره	P
$OQ = r$	روی دایره	Q
$OR > r$	بیرون دایره	R



مثال ۱: در دایره‌ای شعاع‌های OA و OB به ترتیب برابر ۳n − ۱۰ و n + ۲ هستند. قطر این دایره را بیابید.

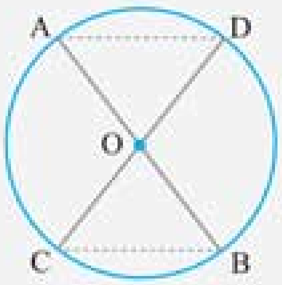
■ **پاسخ:** می‌دانیم $OA = OB$ (شعاع‌های دایره با هم برابرند). پس:

$$۳n - ۱۰ = n + ۲ \Rightarrow n = ۶ \Rightarrow r = OA = OB = ۸$$

پس قطر دایره، که دو برابر شعاع می‌باشد، برابر با $۱۶ = ۸ \times ۲$ است.

مثال ۲: در دایره‌ای به مرکز O، اگر AB و CD قطرها باشند، ثابت کنید AD = BC .

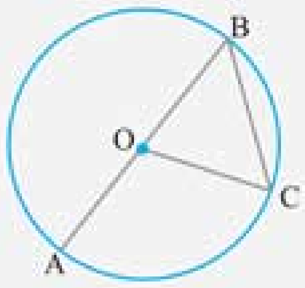
■ **پاسخ:** به اثبات زیر توجه کنید:



دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OB$	۱
شعاع‌های دایره	$OC = OD$	۲
متقابل به رأس	$A\hat{O}D = B\hat{O}C$	۳
ض‌زض	$\overset{\triangle}{AOD} \cong \overset{\triangle}{BOC}$	۴
اجزای نظیر	$AD = BC$	۵

الگویابی کنید

در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره می‌باشد. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) اگر $B\hat{O}C = ۶۰^\circ$ و $OB = ۶$، محیط مثلث OBC چقدر است؟

ب) اگر $B\hat{O}C = ۹۰^\circ$ و $BC = ۱۵$ باشد، اندازه‌های OB و OC را بیابید.

پ) اگر $B\hat{O}C = ۹۰^\circ$ و $OC = ۶$، اندازهٔ وتر BC چقدر است؟

ت) در هر یک از شرایط زیر نقطهٔ X نسبت به دایره چه وضعیتی دارد؟

۱) $OX = ۴$ و $AB = ۵$ ۲) $OX = ۵$ و $OA = ۶$ ۳) $OX = ۷$ و $AB = ۱۴$

■ **پاسخ:**

الف: می‌دانیم $OA = OB = r$، پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و از آن‌جایی که زاویهٔ رأس آن برابر ۶۰° است، پس مثلث OBC متساوی‌الاضلاع می‌باشد و در نتیجه محیط آن $۱۸ = ۶ \times ۳$ است.

ب: در این حالت، مثلث BOC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر ۱۵ می‌باشد و در نتیجه هر یک از اضلاع قائمهٔ آن برابر $OB = OC = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۵ = ۷/۵\sqrt{۲}$ است.

پ: مثلث BOC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به ضلع قائمهٔ ۶ می‌باشد و در نتیجه وتر این مثلث برابر با $BC = ۶\sqrt{۲}$ است.

ت:

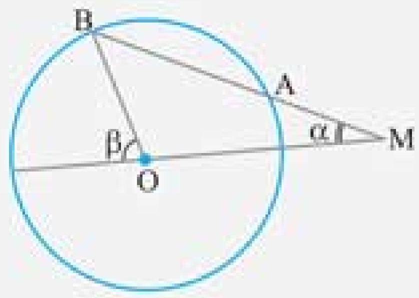
۱ قطر دایره $AB = ۵$ است و لذا شعاع دایره، $r = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$ می‌باشد. از آن‌جایی که $OX > r$، پس نقطهٔ X خارج دایره است.

۲ در این حالت $r = OA = ۶$ و لذا $OX < r$ می‌باشد، پس نقطهٔ X داخل دایره است.

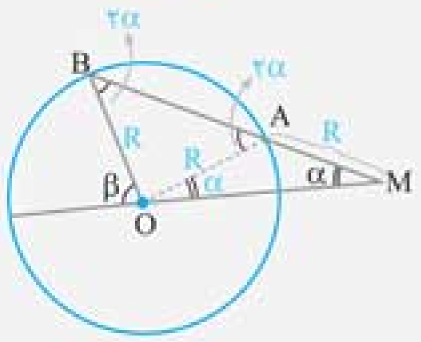
۳ قطر دایره $AB = ۱۴$ و در نتیجه شعاع آن، $r = ۷$ است و چون $OX = r$، پس نقطهٔ X روی دایره است.

تمرین

دایرهٔ $C(O, R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره، خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = ۳\alpha$.

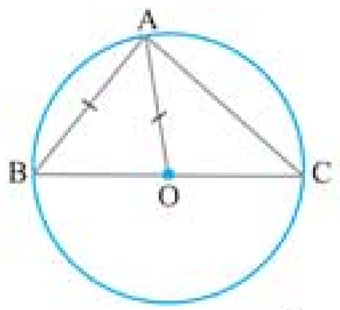


■ **پاسخ:** از A به O وصل می‌کنیم. داریم:



مرحله		دلیل
۱	$OA = MA = R$	طبق فرض مسئله
۲	متساوی‌الساقین: $\overset{\triangle}{OAB}$	طبق مرحلهٔ ۱
۳	$A\hat{O}M = A\hat{O}M = \alpha$	طبق مرحلهٔ ۲
۴	$O\hat{A}B = ۲\alpha$	زاویهٔ خارجی برای $\overset{\triangle}{AOM}$
۵	$OA = OB = R$	شعاع‌های دایره
۶	$\hat{B} = \hat{A} = ۲\alpha$	$\overset{\triangle}{OAB}$ متساوی‌الساقین است.
۷	$\beta = \hat{B} + \hat{M} = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$	β زاویهٔ خارجی برای $\overset{\triangle}{OBM}$ است.

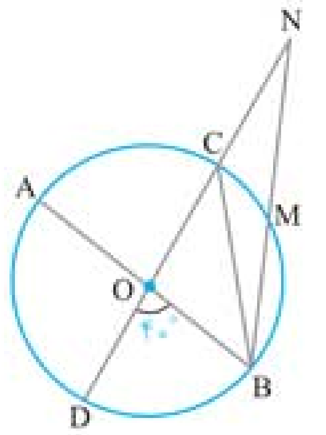
تست‌های موضوعی



۱. در شکل مقابل، اگر O مرکز دایره باشد، زاویهٔ ACO چند درجه است؟

۱) ۶۰° ۲) ۴۵°

۳) ۳۰° ۴) ۷۵°



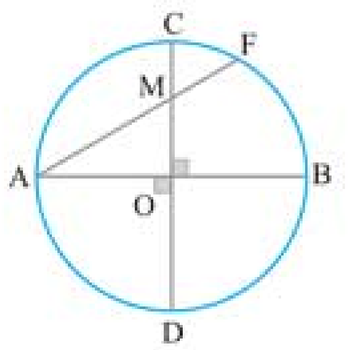
۲. در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره است. اگر $BC = CN$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ MAB کدام است؟

۱) ۳۰°

۲) ۵۰°

۳) ۴۰°

۴) ۶۰°



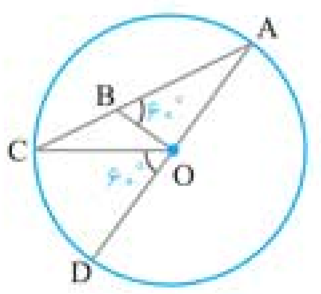
۳. در شکل مقابل، اگر O مرکز دایره و $OM = MF$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ FAO کدام است؟

۱) ۷۵°

۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۳۰°



۴. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است. اگر $BO = ۵$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟

۱) ۳

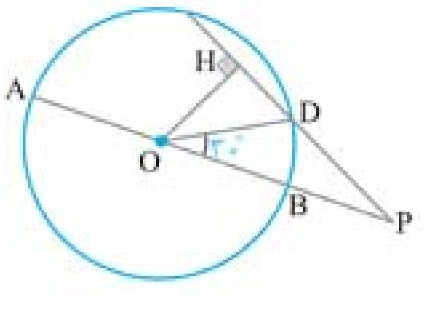
۲) $۳+\sqrt{۳}$

۳) ۵

۴) $۵-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵. در دایره‌ای به شعاع R، دو قطر عمود بر هم مفروض‌اند. از نقطهٔ A روی دایره، عمودهایی بر این دو قطر رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بین پای عمودها کدام است؟

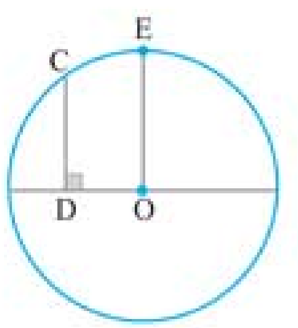
۱) $\frac{R}{۲}$ ۲) R ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}R$



۶. در شکل مقابل، AB قطر دایره، زاویهٔ $D\hat{O}B = ۳۰^\circ$ و طول PD برابر شعاع دایره است. اندازهٔ OH چه مضربی از شعاع دایره است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



۷. در شکل مقابل، نسبت مجموع مربعات CD و ED به مربع شعاع دایره کدام است؟ (نقطهٔ E وسط نیم‌دایره است.)

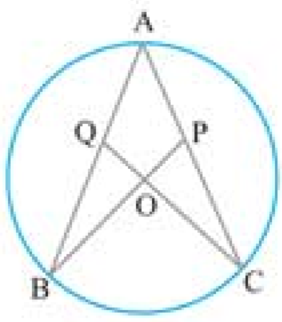
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $B\hat{P}C + B\hat{Q}C = ۶۰^\circ$ باشد، زاویهٔ BAC کدام است؟



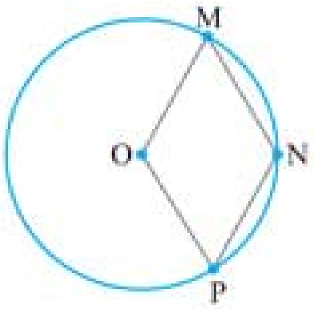
۱) ۵°

۲) ۱۰°

۳) ۱۵°

۴) ۲۰°

۹. چهارضلعی OMNP متوازی‌الاضلاع است. اختلاف زاویهٔ حاده و منفرجهٔ آن کدام است؟



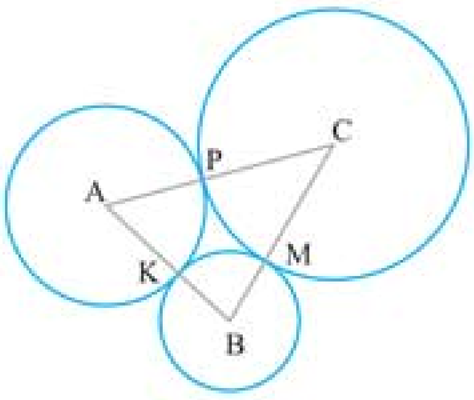
۱) ۶۰°

۲) ۳۰°

۳) ۷۵°

۴) ۴۵°

۱۰. در شکل مقابل سه دایره به مراکز A و B و C مماس خارجی‌اند. اگر $A\hat{B}C = ۹۰^\circ$ و نقاط K و P و M نقاط مماس باشند، $K\hat{P}M$ کدام است؟



۱) ۹۰°

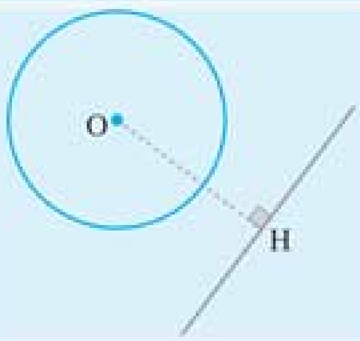
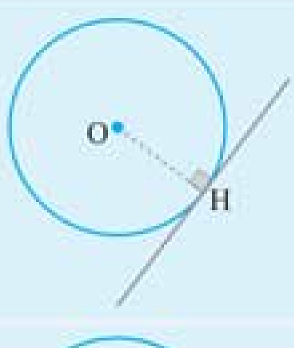
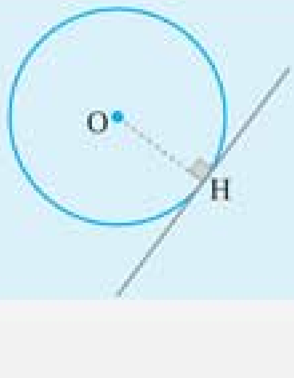
۲) ۶۰°

۳) ۴۵°

۴) $۲۲/۵^\circ$

اوضاع نسبی خط و دایره

◄ یک خط با یک دایره سه وضعیتِ «متخارج، مماس و متقاطع» را دارد، که از روی فاصلهٔ مرکز دایره تا خط (طول عمودی که از مرکز دایره بر خط رسم می‌شود) قابل تشخیص است. برای تشخیص وضعیت خط Δ و دایرهٔ $C(O, r)$ به جدول زیر توجه کنید:

وضعیت	طرز تشخیص	تعداد نقاط اشتراک خط و دایره	شکل
متخارج	$OH > r$	صفر	
مماس	$OH = r$	یک	
متقاطع	$OH < r$	دو	

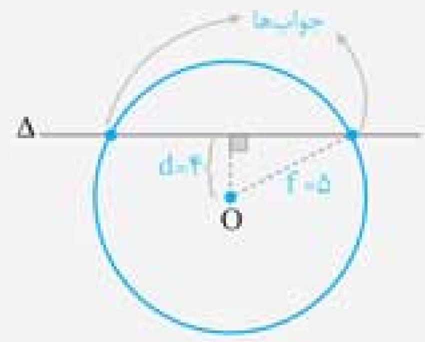
◄ شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.

◄ خط متقاطع با دایره را، **قاطع** می‌نامیم که وتری از دایره جدا می‌کند.

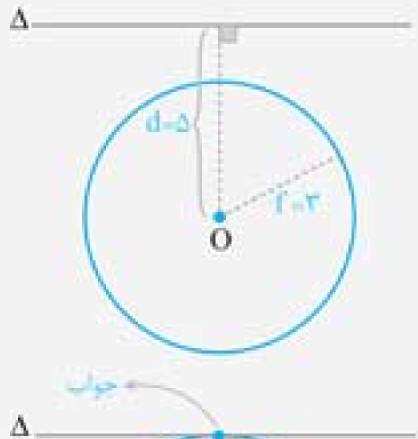
مثال: نقطهٔ O و خط Δ در صفحه مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط Δ برابر d فرض شود، در هر یک از حالت‌های زیر چند نقطه روی خط Δ به فاصلهٔ f از نقطهٔ O وجود دارد؟

الف) $d = ۴$ و $f = ۵$ ب) $d = ۵$ و $f = ۳$ پ) $d = ۲$ و $f = ۲$

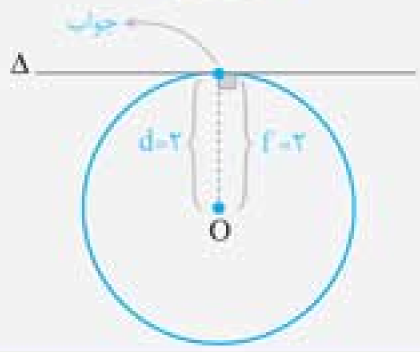
پاسخ: می‌دانیم مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معلوم f می‌باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع f است. پس در هر حالت این دایره را رسم می‌کنیم و وضعیت خط Δ و دایرهٔ رسم‌شده را بررسی می‌نماییم. تعداد نقاط اشتراک خط و دایره، جواب مسئله است.



الف: خط و دایره متقاطع‌اند (۲ جواب)



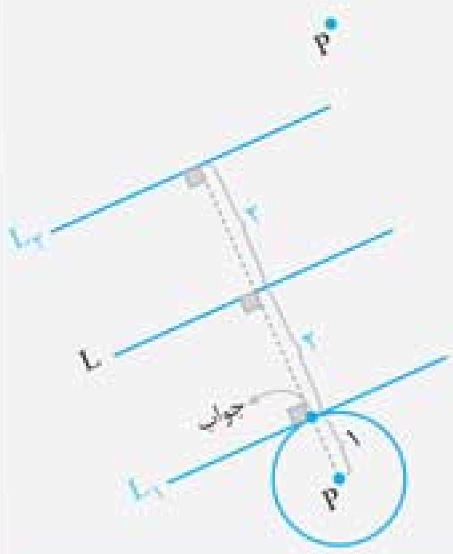
ب: خط و دایره متخارج‌اند (صفر جواب)



پ: خط و دایره مماس‌اند (یک جواب)

الگویابی‌کنید

در شکل مقابل، نقطهٔ P به فاصلهٔ ۳ واحد از خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط L و نقطهٔ P به ترتیب به فاصلهٔ ۲ و ۱ واحد باشد؟



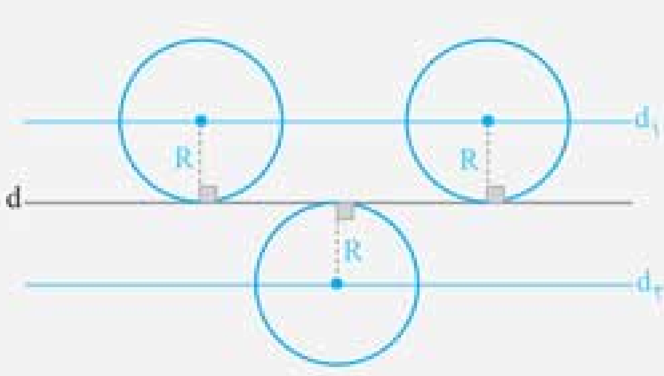
پاسخ: مجموعه نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ۲ واحد می‌باشند، دو خط L_1 و L_2 موازی با خط L و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط L هستند.

از طرفی مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ واحد می‌باشند، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۱ است.

از آن‌جایی که ۳ = ۱+۲، پس دایرهٔ مذکور فقط بر یکی از خطوط L_1 یا L_2 (در شکل روبه‌رو خط L_1)، در یک نقطه مماس است که همین نقطهٔ تماس، جواب مسئله است.

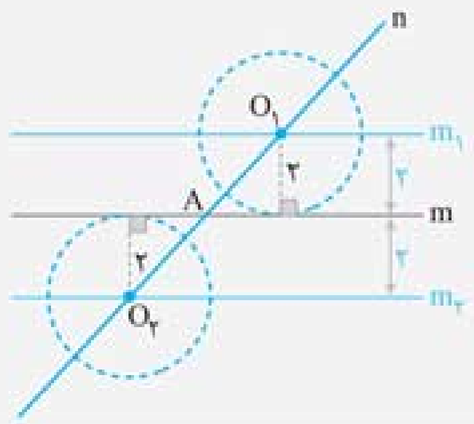
تمرین

۱ خط d مفروض است. مرکز همهٔ دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعیتی نسبت به خط d دارد؟



پاسخ: مرکز هر دایره‌ای به شعاع ثابت R، که بر خط d مماس است، نقطه‌ای به فاصلهٔ ثابت R از خط d می‌باشد. از طرفی می‌دانیم مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابت R از خط d هستند، دو خط d_1 و d_2 موازی با خط d و به فاصلهٔ R از خط d می‌باشند. پس مرکز همهٔ دایره‌های به شعاع ثابت R و مماس بر خط d، روی دو خط d_1 و d_2 قرار دارد که هر دو با خط d موازی‌اند.

۲) دو خط m و n در نقطهٔ A متقاطع‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی خط n و شعاع آن ۲ واحد بوده و بر خط m مماس باشد. (از نتیجهٔ تمرین قبل استفاده کنید.)



پاسخ: با توجه به تمرین قبل، مرکز دایره‌ای به شعاع ۲ واحد و مماس بر خط m، بر روی دو خط m_1 و m_2 قرار دارد که هر دو با خط m موازی و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن رسم می‌شوند. اما چون باید مرکز دایرهٔ مورد نظر روی خط n نیز باشد، پس نقطهٔ تلاقی خطوط m_1 و m_2 با خط n، مرکز دایرهٔ مورد نظر می‌باشند و مسئله دو جواب دارد.

تست‌های موضوعی

۱۱. کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطه‌ای از دایره‌ای به ترتیب a و b است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{2}$ ۲) $\frac{b-a}{4}$ ۳) $\frac{b+a}{2}$ ۴) $\frac{b+a}{4}$

۱۲. دایرهٔ C و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. چند نقطه روی دایرهٔ C می‌توان پیدا کرد، از خط Δ به فاصلهٔ معلوم L باشند؟

۱) فقط دو نقطه ۲) حداکثر دو نقطه ۳) فقط چهار نقطه ۴) حداکثر چهار نقطه

۱۳. نقطهٔ P در صفحهٔ دایرهٔ C و در خارج آن واقع است. حداکثر تعداد نقطه‌های دایرهٔ C، به فاصلهٔ ۳ واحد از P کدام است؟

۱) فقط در نقطه ۲) حداکثر دو نقطه ۳) فقط چهار نقطه ۴) حداکثر چهار نقطه

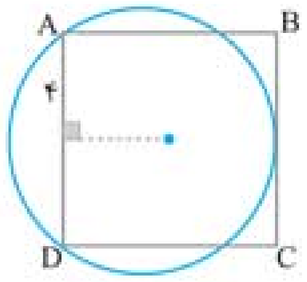
۱۴. تعداد نقطه‌هایی که از یک دایره و از دو خط موازی مماس بر آن دایره به یک فاصله‌اند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۵. در دایره‌ای، دو وتر موازی و مساوی، به فاصله‌ای برابر با شعاع دایره رسم شده‌اند. زاویهٔ بین خطوط واصل انتهای دو وتر کدام است؟

۱) ۱۲۰° ۲) ۳۰° ۳) ۹۰° ۴) ۴۵°

۱۶. در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربعی به ضلع ۸ می‌باشد. دایره‌ای از رأس‌های A و D گذشته و بر ضلع BC مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۷. اگر دو دایرهٔ متمایز و سه خط متمایز، یکدیگر را قطع کنند، بیشترین تعداد نقاط تقاطع کدام است؟

۱) ۱۱ نقطه ۲) ۱۰ نقطه ۳) ۱۸ نقطه ۴) ۱۷ نقطه

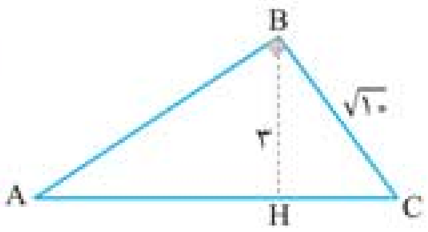
۱۸. دایره‌ای به شعاع ۴ درون یک مربع رسم شده است، به‌طوری که مرکز دایره، نقطهٔ تلاقی دو قطر مربع می‌باشد. اگر فاصلهٔ هر رأس مربع از محیط دایره برابر ۲ باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۴

۱۹. خطوط موازی L_1 و L_2 از دایرهٔ $C(O,2)$ به فاصلهٔ ۳ و ۵ مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ خطوط L_1 و L_2 برابر ۱۱ باشد، چند نقطه روی یک دایره قرار دارد که از هر دو خط به یک فاصله باشد؟

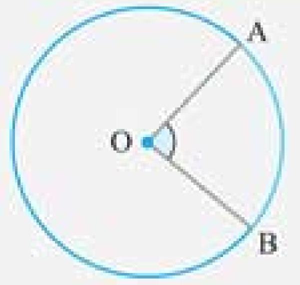
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۲۰. درشکل مقابل چند نقطه می‌توان یافت که از A و C به یک فاصله باشد از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۵ باشد؟



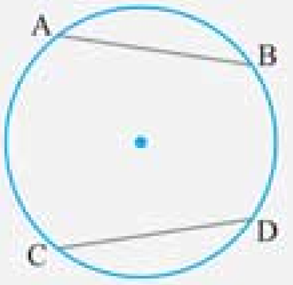
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

زاویهٔ مرکزی و نتایج آن



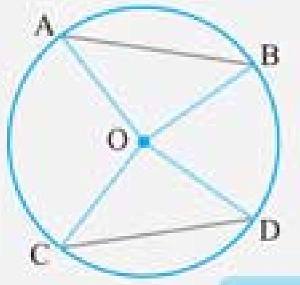
تعریف: زاویهٔ مرکزی، زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و دو ضلع آن شعاع‌های دایره می‌باشند و اندازهٔ این زاویه برابر با کمان روبه‌روی آن است.

$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$ مرکزی



◂ کمان‌های روبه‌رو به وترهای مساوی، با هم برابرند و برعکس وترهای روبه‌رو به کمان‌های مساوی با هم برابرند.

$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



اثبات: فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$، نشان می‌دهیم $AB = CD$. برای این منظور از مرکز دایره به چهار نقطهٔ A، B، C و D وصل می‌کنیم. داریم:

دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OD$	۱
شعاع‌های دایره	$OC = OB$	۲
زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های برابرند	$A\hat{O}B = C\hat{O}D$	۳
(ض‌زض)	$O\overset{\triangle}{A}B \cong O\overset{\triangle}{C}D$	۴
اجزای نظیر	$AB = CD$	۵

(اثبات حالت عکس به همین ترتیب می‌باشد.)

مثال: وتر AB و قطر CD از دایره‌ای مفروض‌اند. نشان دهید:

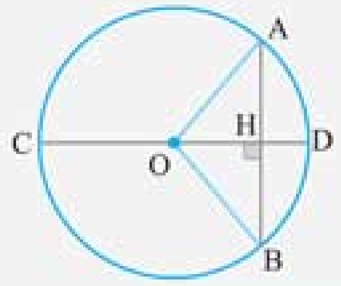
الف) اگر قطر CD بر وتر AB عمود باشد، آن‌گاه قطر CD، وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

ب) اگر قطر CD، وتر AB را نصف کرده باشد، آن‌گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

پ) اگر قطر CD، کمان AB را نصف کرده باشد، آن‌گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

▪ پاسخ:

الف: طبق فرض قطر CD بر وتر AB عمود است. داریم:



دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OB$	۱
ضلع مشترک	$OH = OH$	۲
وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه	$O\overset{\triangle}{H}A \cong O\overset{\triangle}{H}B$	۳
اجزای نظیر	$AH = BH$	۴
اجزای نظیر	$A\hat{O}H = B\hat{O}H$	۵
کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابر، مساوی‌اند	$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$	۶

پس چون ثابت کردیم $AH = BH$، پس قطر CD، وتر AB را نصف کرده است و چون نشان دادیم که $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$، یعنی قطر CD، کمان AB را نیز نصف کرده است.

ب: مطابق فرض، قطر CD، وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$. داریم:

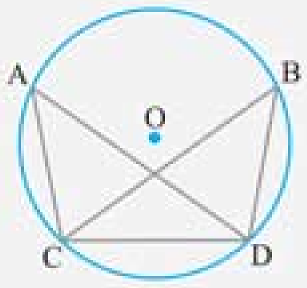
مرحله		دلیل
۱	$OA = OB$	شعاع‌های دایره
۲	$OH = OH$	ضلع مشترک
۳	$AH = BH$	فرض مسئله
۴	$\overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OHB}$	(ض‌ض‌ض)
۵	$O\hat{H}A = O\hat{H}B = ۹۰^\circ$	اجزای نظیر
۶	$A\hat{O}H = B\hat{O}H$	اجزای نظیر
۷	$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$	کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابر، مساوی‌اند

چون ثابت کردیم $O\hat{H}A = O\hat{H}B = ۹۰^\circ$، پس نشان داده‌ایم که قطر CD بر وتر AB عمود است و نیز همانند قسمت (الف) ثابت شده است که کمان AB توسط قطر CD نصف شده است.

پ: همانند قسمت‌های (الف) و (ب) عمل کنید.

الگویابی کنید

۱ در شکل مقابل، اگر $AC = BD$ باشد، ثابت کنید $C\hat{A}D = C\hat{B}D$.



■ پاسخ: با توجه به فرض، چون $AC = BD$، پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. اکنون به دو طرف این تساوی، $\overset{\frown}{CD}$ را اضافه می‌کنیم. داریم:

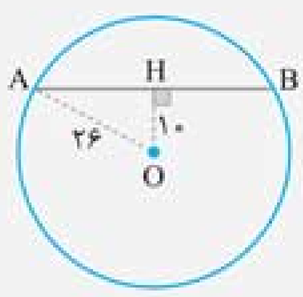
$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{BDC} \Rightarrow AD = BC$$

(وترهای روبه‌رو به کمان‌های برابر، مساوی‌اند.)

اکنون داریم:

مرحله		دلیل
۱	$AC = BD$	فرض مسئله
۲	$AD = BC$	در بالا ثابت کردیم
۳	$CD = CD$	ضلع مشترک
۴	$\overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{BCD}$	(ض‌ض‌ض)
۵	$C\hat{A}D = C\hat{B}D$	اجزای نظیر

۲ دایرهٔ $C(O, ۲۶)$ و وتر AB به فاصلهٔ ۱۰ از مرکز دایره مفروض‌اند. طول وتر AB را به دست آورید.

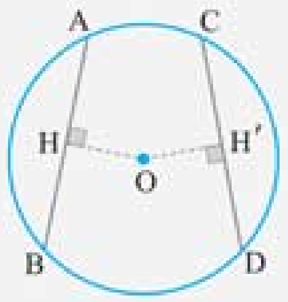


■ پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۲۶^۲ - ۱۰^۲ = ۵۷۶ \xrightarrow{\text{جذر}} AH = ۲۴$$

از طرفی می‌دانیم قطرِ عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $AH = BH = ۲۴$ و در نتیجه:

$$AB = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

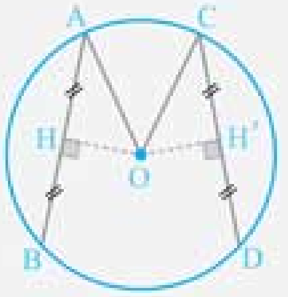


۳ ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$

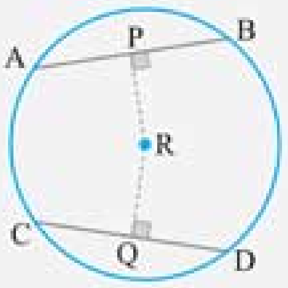
■ پاسخ: فرض می‌کنیم $AB = CD$، نشان می‌دهیم $OH = OH'$. برای این منظور از A و C به O وصل می‌کنیم. در ضمن چون قطرِ عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $AH = BH$ و $CH' = DH'$ می‌باشند و چون $AB = CD$ می‌باشد، پس $AH = BH = CH' = DH'$.

حال داریم:



دلیل		مرحله
مطابق مطلب بالا	$AH = CH'$	۱
شعاع‌های دایره	$OA = OC$	۲
وتر و یک ضلع	$\overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OH'C}$	۳
اجزای نظیر	$OH = OH'$	۴

اثبات حالت عکس را به همین ترتیب انجام دهید.



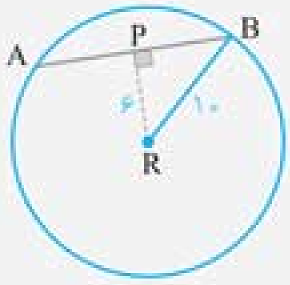
۴ با توجه به شکل مقابل،

(R مرکز دایره)

الف) اگر طول شعاع دایره ۱۰ و $PR = ۶$، آن‌گاه طول پاره‌خط‌های AP و AB را بیابید.

ب) اگر $RC = \sqrt{۲}$ و $CQ = RQ$، آن‌گاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را بیابید.

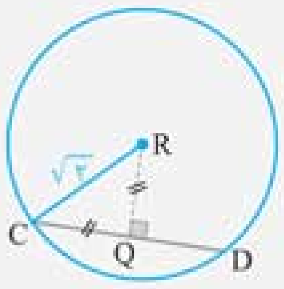
■ پاسخ:



الف: در مثلث قائم‌الزاویهٔ PRB، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

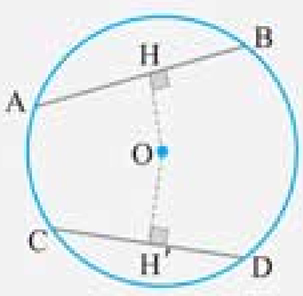
$$PB^۲ = RB^۲ - RP^۲ = (۱۰)^۲ - ۶^۲ = ۶۴ \xrightarrow{\text{جذر}} PB = ۸$$

از طرفی می‌دانیم $AP = PB = ۸$ (چرا؟) و در نتیجه $AB = ۱۶$.



ب: در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین RCQ، طبق رابطهٔ فیثاغورس $CQ = RQ = ۱$ به دست می‌آید و چون قطر عمودِ بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $CQ = DQ = ۱$ و در نتیجه $CD = ۲$.

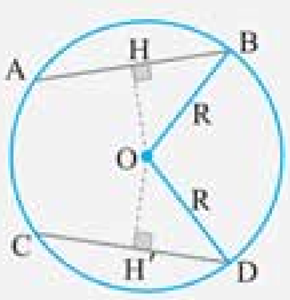
تمرین



۱ در دایرهٔ $C(O, R)$، نشان دهید $AB > CD$، اگر و تنها اگر $OH < OH'$. (OH و OH' به ترتیب فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.) به عبارت دیگر از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$

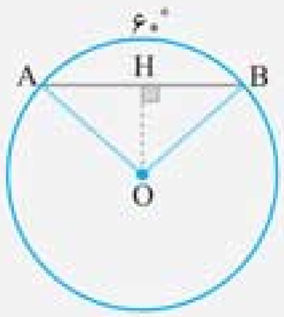
■ پاسخ: فرض می‌کنیم $AB > CD$ و نشان می‌دهیم $OH < OH'$. از B و D به O وصل می‌کنیم و واضح است که $OB = OD = R$. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB و $OH'D$، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$\begin{cases} OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ = OH^۲ + (\frac{AB}{۲})^۲ = OH^۲ + \frac{AB^۲}{۴} \\ OD^۲ = OH'^۲ + DH'^۲ = OH'^۲ + (\frac{CD}{۲})^۲ = OH'^۲ + \frac{CD^۲}{۴} \end{cases}$$

پس: $OH'^2+\frac{CD^2}{4}=OH^2+\frac{AB^2}{4}$ و در نتیجه: $\frac{AB^2}{4}-\frac{CD^2}{4}=OH'^2-OH^2$. اما چون $AB>CD$، پس $AB^2>CD^2$
و لذا $\frac{AB^2}{4}>\frac{CD^2}{4}$ و در نتیجه $\frac{AB^2}{4}-\frac{CD^2}{4}>0$ پس $OH'^2-OH^2>0$ و می‌توان نتیجه گرفت $OH'^2>OH^2$ و یا $OH'>OH$. اثبات حالت عکس به عهده شما.

۲ در دایرهٔ $C(O,R)$، $\widehat{AB}=60^\circ$ و $AB=10$. فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل روبه‌رو، $OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است.
از طرفی چون $\widehat{AB}=60^\circ$، طبق آن‌چه که در مورد زاویهٔ مرکزی می‌دانیم، $A\hat{O}B=60^\circ$ و لذا مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است. پس $AB=OA=OB=10$. از طرفی OH ارتفاع این مثلث است که عبارت است از:
$$OH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}$$

تست‌های موضوعی

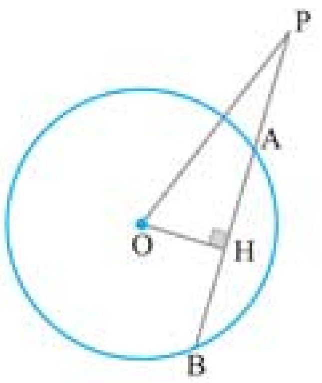
۲۱. نقاط وسط وترهای به طول ۴ درون دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶، بر کدام شکل واقع‌اند؟

۱) خطوطی به فاصلهٔ ۲ از مرکز دایره
۲) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $4\sqrt{2}$
۳) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۴
۴) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲

۲۲. نقاط A و B مفروض هستند. مجموعهٔ نقاطی که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خطوط گذرنده از نقطهٔ B می‌باشند، کدام است؟

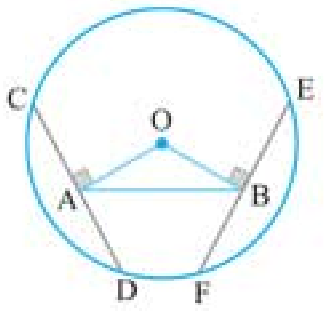
۱) دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BA
۲) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع BA
۳) خطی عمود بر AB
۴) خطی موازی AB

۲۳. در شکل مقابل، $PA=\frac{AB}{2}=3$، $OH=1$ و $O\hat{H}A=90^\circ$. شعاع دایره چقدر است؟



۱) $\sqrt{13}$
۲) $\sqrt{12}$
۳) $\sqrt{11}$
۴) $\sqrt{10}$

۲۴. در شکل مقابل، اگر $CD=EF$ و $A\hat{O}B=100^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OAB چقدر است؟

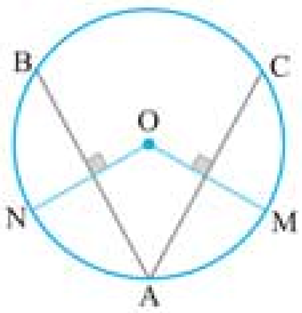


۱) 40°
۲) 50°
۳) 35°
۴) 60°

۲۵. فرض می‌کنیم C نقطهٔ متغیری از دایره به شعاع R و AB وتر ثابتی از آن به فاصلهٔ $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره باشد. اگر مساحت مثلث ABC ماکزیمم باشد، آن‌گاه زاویهٔ B کدام است؟

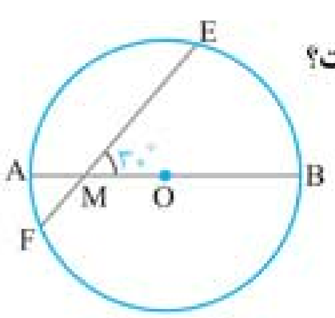
۱) $\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۶. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\widehat{MC}=27^\circ$ و $\widehat{BN}=23^\circ$ است. اندازهٔ $M\hat{O}N$ کدام است؟



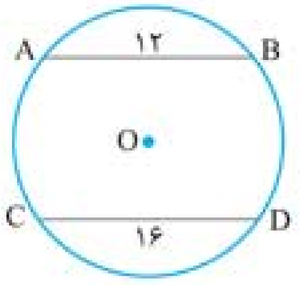
۱) 50°
۲) 45°
۳) 30°
۴) 25°

۲۷. در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $AM=2$ و $MB=6$ باشند، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر EF کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

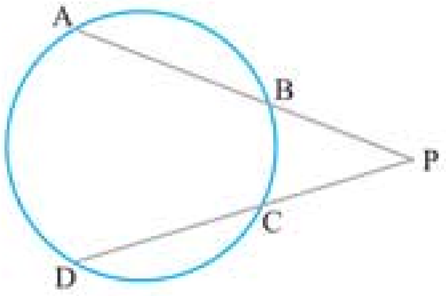
۲۸. در دایرهٔ مقابل، وترهای AB و CD با هم موازی هستند. اگر فاصلهٔ آن‌ها برابر ۱۴ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۶   ۲) ۱۰

۳) ۸   ۴) ۱۵

۲۹. در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم برابرند. اگر $A\hat{P}D = ۴۰^\circ$ باشد، زاویهٔ ABC کدام است؟



۱) ۵۵°

۲) ۷۰°

۳) ۱۱۰°

۴) ۸۰°

۳۰. اگر فاصلهٔ O (مرکز دایره) از وتر AB برابر نصف AB باشد، زاویهٔ بین شعاع‌های OA و OB کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

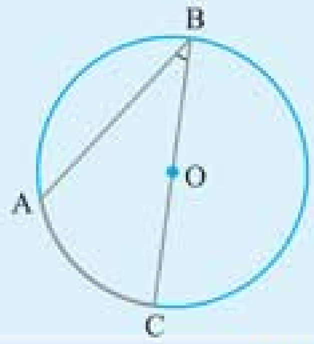
زاویهٔ محاطی

تعریف: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره است.

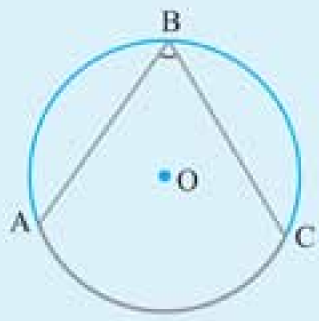
قضیه: اندازهٔ زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه است.

$$\boxed{\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}}$$

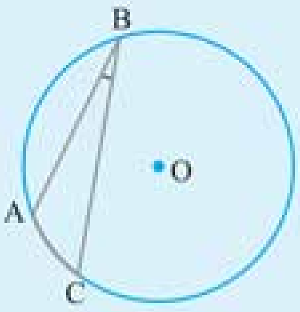
زاویهٔ محاطی در سه حالت زیر بررسی می‌گردد و ثابت می‌شود که در هر سه حالت همواره داریم:



حالت اول: یک ضلع زاویهٔ محاطی از مرکز دایره می‌گذرد.

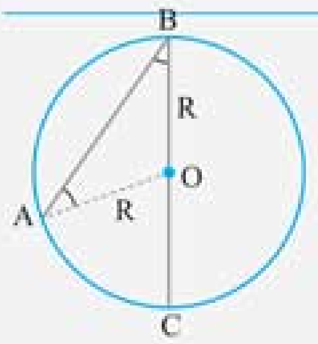


حالت دوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در دو طرف مرکز دایره‌اند.



حالت سوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع‌اند.

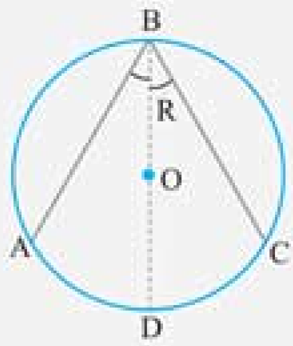
اثبات



حالت اول: از O به A وصل می‌کنیم. در این صورت $A\hat{O}C$ زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی‌الساقین AOB است. (توجه کنید که $OA = OB = R$). پس:

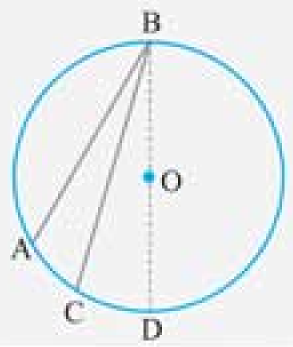
$$A\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} A\hat{O}C = ۲\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \frac{A\hat{O}C}{۲}$$

از طرفی $A\hat{O}C$، یک زاویهٔ مرکزی است و با کمان روبه‌رویش، یعنی $\overset{\frown}{AC}$ برابر است. پس: $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$



حالت دوم: قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول، در مورد دو زاویهٔ ABD و DBC داریم:

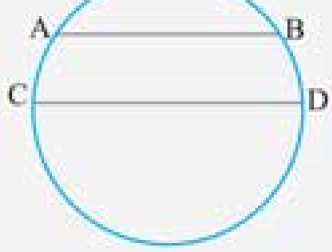
$$\hat{B} = A\hat{B}D + D\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$



حالت سوم: قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول، داریم:

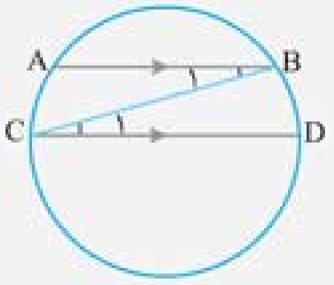
$$\hat{B} = A\hat{B}D - C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

مثال: ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند و برعکس.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$$

پاسخ: فرض می‌کنیم $AB \parallel CD$، نشان می‌دهیم $\widehat{AC}=\widehat{BD}$. برای این منظور از B به C وصل می‌کنیم. با توجه به توازی $AB \parallel CD$ و مورب بودن BC، نتیجه می‌گیریم $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$. از طرفی زاویه‌های $B_۱$ و $C_۱$ محاطی‌اند و هر کدام برابر با نصف کمان روبه‌رو می‌باشند. پس:



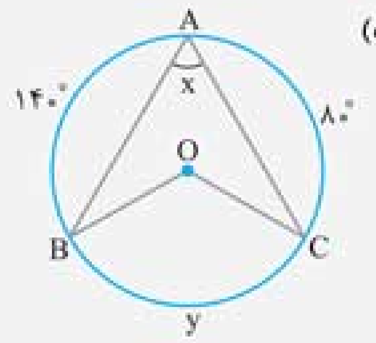
$$\hat{B}_۱=\hat{C}_۱ \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{\widehat{BD}}{۲} \xrightarrow{\times ۲} \widehat{AC}=\widehat{BD}$$

اثبات حالت عکس به عهدهٔ خودتان است. کافی است مراحل بالا را برعکس انجام دهید.

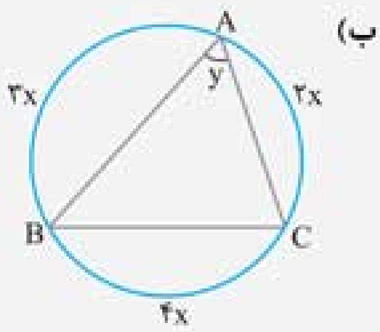
الگویابی کنید

۱ در هر یک از موارد زیر x و y را بیابید. (نقطهٔ O مرکز دایره است.)

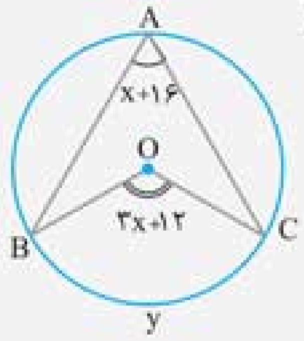
الف)



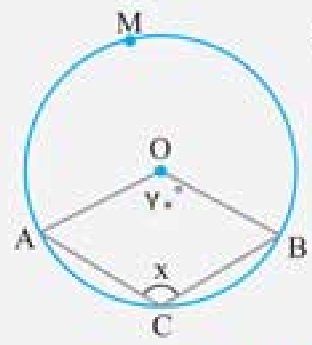
ب)



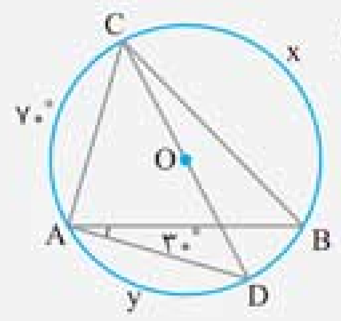
پ)



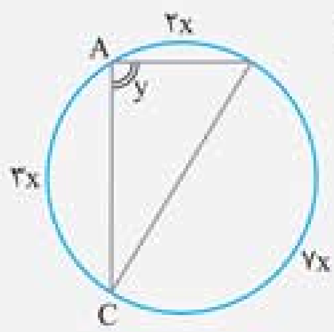
ت)



ث)



ج)



پاسخ:

الف: می‌دانیم $۳۶۰^\circ = y + ۸۰^\circ + ۱۴۰^\circ$، پس $\hat{y}=۱۴۰^\circ$ است. اما چون $\widehat{BAC}$ محاطی است، پس داریم:

$$x=\widehat{BAC}=\frac{\widehat{BC}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$

ب: می‌دانیم $۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ$، پس $۹x=۳۶۰^\circ$ و لذا $x=۴۰^\circ$. از طرفی y یک زاویهٔ محاطی است و روبه‌رو به کمان ۴x است، پس $y=۲x=۸۰^\circ$.

پ: می‌دانیم $\widehat{BOC}$ و $\widehat{BAC}$ به ترتیب زاویه‌های مرکزی و محاطی‌اند. پس $\widehat{BOC}=y$ و $\widehat{BAC}=\frac{y}{۲}$. بنابراین $\widehat{BOC}=۲\widehat{BAC}$. اکنون داریم:

$$۳x+۱۲=۲(x+۱۶) \Rightarrow x=۲۰^\circ \Rightarrow y=۳x+۱۲=۳(۲۰)+۱۲=۷۲^\circ$$

ت: می‌دانیم $\widehat{AOB}$ یک زاویهٔ مرکزی است، پس $\widehat{ACB}=۷۰^\circ$ و لذا:

$$\widehat{AMB}=۳۶۰^\circ-۷۰^\circ=۲۹۰^\circ$$

از طرفی $\widehat{ACB}$ محاطی است و برابر با نصف $\widehat{AMB}$ است. یعنی:

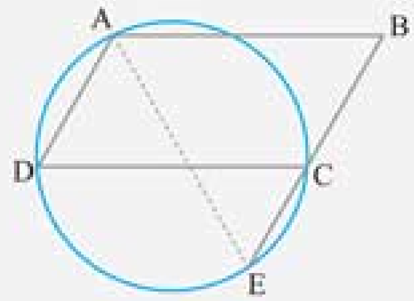
$$x=\frac{۲۹۰^\circ}{۲}=۱۴۵^\circ$$

ث: می‌دانیم $\widehat{BAD}$ زاویهٔ محاطی است و نصف کمان روبه‌رویش است. پس $\frac{\widehat{DB}}{۲}=۳۰^\circ$ و در نتیجه $\widehat{DB}=۶۰^\circ$. از طرفی CD قطر است، پس:

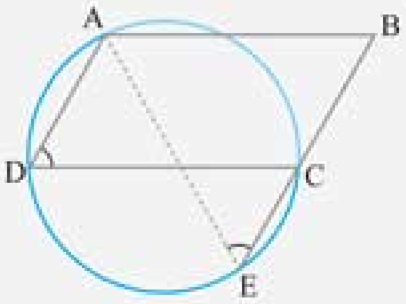
$$\widehat{CB}+\widehat{BD}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۲۰^\circ \Rightarrow y=۳۶۰^\circ-(۷۰^\circ+۱۲۰^\circ+۶۰^\circ)=۱۱۰^\circ$$

ج:

$$۲x+۳x+۷x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲}=۳۰^\circ \xrightarrow{\text{محاطی}} y=\frac{۷x}{۲}=\frac{۲۱۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$$



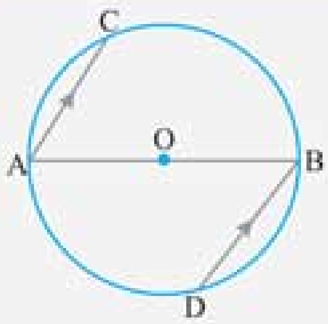
۲ در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. نوع مثلث ABE را تعیین کنید.



■ **پاسخ:** واضح است که دو زاویهٔ D و E محاطی روبه‌رو به کمان AC می‌باشند، پس با هم برابرند. یعنی:

$$\hat{D}=\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\xrightarrow[\text{(خاصیت متوازی‌الاضلاع)}]{\hat{D}=\hat{B}}\hat{B}=\hat{E}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABE}:\text{متساوی‌الساقین}$$

تمرین



۱ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید AC = BD .

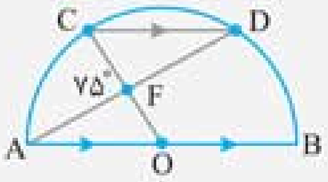
■ **پاسخ:** می‌دانیم در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساویند. پس:

$$AC\parallel BD\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}\quad (*)$$

از طرفی، AB قطر دایره است، پس:

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{(*)}\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}\Rightarrow AC=DB$$

(وترهای مقابل به کمان‌های برابر، مساوی‌اند.)



۲ در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و CD∥AB است. اندازهٔ کمان CD را به دست آورید.

■ **پاسخ:** چون $AB\parallel CD$، پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. از طرفی $A\hat{F}C=۷۵^\circ$، که برای مثلث AOF یک زاویهٔ خارجی است و لذا:

$$A\hat{F}C=F\hat{O}A+F\hat{A}O$$

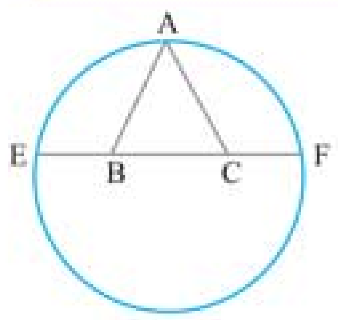
اما دو زاویهٔ $F\hat{O}A$ و $F\hat{A}O$ به ترتیب مرکزی و محاطی می‌باشند. در صورتی که $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=x$ فرض شود، داریم:

$$A\hat{F}C=\overset{\frown}{AC}+\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=x+\frac{x}{۲}=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow ۷۵^\circ=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow x=۵۰^\circ$$

اکنون با توجه به این‌که AB قطر است، پس:

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x+\overset{\frown}{CD}+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ-۲x=۱۸۰^\circ-۲(۵۰^\circ)=۸۰^\circ$$

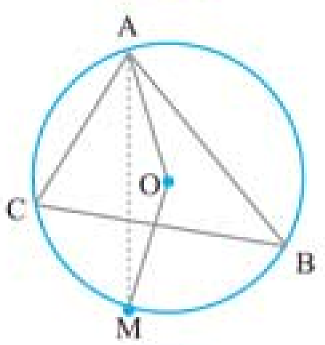
تست‌های موضوعی



۳۱. در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر رأس‌های B و C از این مثلث، وتر EF را به سه قسمت برابر تقسیم کرده باشند، اندازهٔ کمان EAF کدام است؟

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۵۰°

۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°



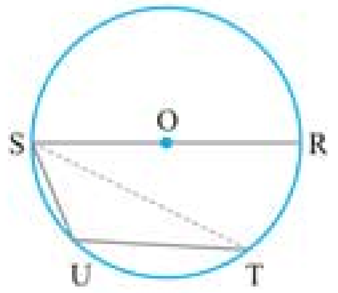
۳۲. در شکل مقابل، نقطهٔ M وسط کمان BC است. اگر زاویهٔ B به اندازهٔ ۲۰° کمتر از زاویهٔ C باشد، زاویهٔ OMA کدام است؟

۱) ۶۰°

۲) ۴۰°

۳) ۲۰°

۴) ۱۰°



۳۳. در شکل زیر، $U\hat{S}T=۲۵^\circ$ است. اگر UT = TR باشد، کمان UTR کدام است؟

۱) ۷۵° ۲) ۲۵°

۳) ۵۰° ۴) ۱۰۰°

پاسخ‌نامۀ کلیدی

۱.	۳	۲۸.	۲	۵۵.	۱	۸۲.	۳	۱۰۹.	۱
۲.	۴	۲۹.	۳	۵۶.	۳	۸۳.	۳	۱۱۰.	۲
۳.	۴	۳۰.	۴	۵۷.	۳	۸۴.	۲	۱۱۱.	۱
۴.	۳	۳۱.	۱	۵۸.	۳	۸۵.	۲	۱۱۲.	۱
۵.	۲	۳۲.	۴	۵۹.	۴	۸۶.	۴	۱۱۳.	۳
۶.	۲	۳۳.	۴	۶۰.	۳	۸۷.	۱	۱۱۴.	۳
۷.	۲	۳۴.	۲	۶۱.	۴	۸۸.	۴	۱۱۵.	۱
۸.	۴	۳۵.	۳	۶۲.	۱	۸۹.	۲	۱۱۶.	۴
۹.	۱	۳۶.	۴	۶۳.	۲	۹۰.	۳	۱۱۷.	۳
۱۰.	۳	۳۷.	۱	۶۴.	۳	۹۱.	۱	۱۱۸.	۲
۱۱.	۱	۳۸.	۴	۶۵.	۱	۹۲.	۱	۱۱۹.	۱
۱۲.	۱	۳۹.	۱	۶۶.	۲	۹۳.	۱	۱۲۰.	۱
۱۳.	۲	۴۰.	۳	۶۷.	۳	۹۴.	۲	۱۲۱.	۳
۱۴.	۲	۴۱.	۱	۶۸.	۲	۹۵.	۱	۱۲۲.	۴
۱۵.	۱	۴۲.	۲	۶۹.	۴	۹۶.	۴	۱۲۳.	۱
۱۶.	۴	۴۳.	۳	۷۰.	۳	۹۷.	۲	۱۲۴.	۱
۱۷.	۴	۴۴.	۴	۷۱.	۴	۹۸.	۲	۱۲۵.	۲
۱۸.	۲	۴۵.	۴	۷۲.	۳	۹۹.	۳	۱۲۶.	۲
۱۹.	۳	۴۶.	۲	۷۳.	۴	۱۰۰.	۴	۱۲۷.	۱
۲۰.	۲	۴۷.	۱	۷۴.	۳	۱۰۱.	۳	۱۲۸.	۳
۲۱.	۲	۴۸.	۳	۷۵.	۳	۱۰۲.	۴	۱۲۹.	۴
۲۲.	۱	۴۹.	۲	۷۶.	۱	۱۰۳.	۳	۱۳۰.	۲
۲۳.	۴	۵۰.	۳	۷۷.	۳	۱۰۴.	۴	۱۳۱.	۴
۲۴.	۱	۵۱.	۲	۷۸.	۴	۱۰۵.	۱	۱۳۲.	۳
۲۵.	۳	۵۲.	۳	۷۹.	۲	۱۰۶.	۴	۱۳۳.	۳
۲۶.	۱	۵۳.	۲	۸۰.	۱	۱۰۷.	۳	۱۳۴.	۴
۲۷.	۳	۵۴.	۴	۸۱.	۳	۱۰۸.	۴	۱۳۵.	۲