

درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

علیرضا علی‌پور، امیرمحمد هویدی



انتشارات
انتگرالگو

به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب ریاضیات گسسته را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب آمار و احتمال را مرور کنید. این کتاب ۸ فصل دارد. هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل نهم ویژه «آزمون‌های جامع» است. هر درس از سه قسمت تشکیل شده است:

- ۱- **درس‌نامه:** در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم.
- ۲- **دست‌گرمی:** پس از درس‌نامه چندین پرسش چهارگزینه‌ای با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید.
- ۳- **آزمون‌ها:** در نهایت سعی کرده‌ایم در آزمون‌های طبقه‌بندی شده مطالب آن درس را قرار دهیم. در انتهای هر فصل، برگزیده‌ای از سؤالات کنکورهای سال‌های قبل را قرار داده‌ایم. با نگاهی به کنکورهای دو سال اخیر مشخص می‌شود که برگزارکنندگان اهمیت ویژه‌ای برای درس‌های ریاضیات گسسته و آمار و احتمال در نظر گرفته‌اند. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز با تست‌های گوناگون در این دو درس آشنا شوید. وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی و دکتر آریس آفانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

◆ فصل اول: شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش ۲	درس سوم / بخش اول: هم‌نهشتی، مفاهیم اولیه و ویژگی‌ها ۶۲
آزمون ۱: اصل جمع و اصل ضرب ۸	آزمون ۱۷: مفهوم هم‌نهشتی و ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی ۷۳
آزمون ۲: آزمون جامع شمارش ۹	آزمون ۱۸: باقی‌مانده تقسیم اعداد توان‌دار بر اعداد طبیعی ۷۴
درس دوم: جایگشت ۱۰	آزمون ۱۹: آزمون جامع هم‌نهشتی، مفاهیم اولیه و ویژگی‌ها (۱) ۷۵
آزمون ۳: جایگشت ۱۳	آزمون ۲۰: آزمون جامع هم‌نهشتی، مفاهیم اولیه و ویژگی‌ها (۲) ۷۶
درس سوم: ترکیب ۱۴	درس سوم / بخش دوم: قاعده‌های بخش‌پذیری و تقویم‌نگاری ۷۷
آزمون ۴: ترکیب ۱۹	آزمون ۲۱: قاعده‌های بخش‌پذیری ۸۲
آزمون ۵: آزمون جامع فصل اول (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۱	آزمون ۲۲: آزمون جامع قاعده‌های بخش‌پذیری و تقویم‌نگاری ۸۳

◆ فصل دوم: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس اول: استدلال ریاضی ۲۴	درس سوم / بخش سوم: معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی ۸۴
آزمون ۶: استدلال ریاضی ۳۰	آزمون ۲۳: معادله هم‌نهشتی ۸۹
درس دوم / بخش اول: بخش‌پذیری و اعداد اول ۳۲	آزمون ۲۴: معادله سیاله خطی ۹۰
آزمون ۷: بخش‌پذیری (۱) ۴۰	آزمون ۲۵: آزمون جامع معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی ۹۱
آزمون ۸: بخش‌پذیری (۲) ۴۱	آزمون ۲۶: آزمون جامع فصل دوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۹۲

◆ فصل سوم: گراف و مدل‌سازی

درس اول / بخش اول: معرفی گراف و مفاهیم اولیه ۹۶	درس اول / بخش دوم: انواع گراف، مکمل گراف و زیرگراف ۱۱۰
آزمون ۲۷: تا ابتدای حداکثر تعداد یال‌های گراف ۱۰۷	آزمون ۲۹: گراف منتظم و گراف کامل ۱۱۵
آزمون ۲۸: آزمون جامع معرفی گراف و مفاهیم اولیه ۱۰۹	آزمون ۳۰: آزمون جامع انواع گراف، مکمل گراف و زیرگراف ۱۱۶
درس دوم / بخش دوم: مسیر، دور و همبندی ۱۱۷	درس اول / بخش سوم: مسیر، دور و همبندی ۱۱۷
آزمون ۳۱: مسیر ۱۲۶	آزمون ۳۲: دور ۱۲۷
آزمون ۳۳: آزمون جامع مسیر، دور و همبندی ۱۲۹	آزمون ۳۳: آزمون جامع مسیر، دور و همبندی ۱۲۹

آزمون ۲۴: استدلال ریاضی ۲۴	درس دوم / بخش دوم: قضیه تقسیم و کاربردها ۵۴
آزمون ۶: استدلال ریاضی ۳۰	آزمون ۱۴: قضیه تقسیم ۵۹
درس دوم / بخش اول: بخش‌پذیری و اعداد اول ۳۲	آزمون ۱۵: کاربردهای قضیه تقسیم ۶۰
آزمون ۷: بخش‌پذیری (۱) ۴۰	آزمون ۱۶: آزمون جامع قضیه تقسیم و کاربردها ۶۱
آزمون ۸: بخش‌پذیری (۲) ۴۱	
آزمون ۹: اعداد اول ۴۲	
آزمون ۱۰: آزمون جامع بخش‌پذیری و اعداد اول ۴۳	
درس دوم / بخش دوم: م.م.م. و ک.م.م. ۴۴	
آزمون ۱۱: م.م.م. ۵۱	
آزمون ۱۲: ک.م.م. ۵۲	
آزمون ۱۳: آزمون جامع م.م.م. و ک.م.م. ۵۳	

◆ فصل پنجم: آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس اول: آشنایی با منطق ریاضی ۲۱۴
- آزمون ۵۶: آشنایی با منطق ریاضی (۱) ۲۲۴
- آزمون ۵۷: آشنایی با منطق ریاضی (۲) ۲۲۶
- آزمون ۵۸: آشنایی با منطق ریاضی (۳) ۲۲۷
- درس‌های دوم و سوم: مجموعه، زیرمجموعه و جبر مجموعه‌ها ۲۲۹
- آزمون ۵۹: مجموعه و زیرمجموعه تا ابتدای افراز یک مجموعه ۲۴۰
- آزمون ۶۰: افراز مجموعه‌ها ۲۴۲
- آزمون ۶۱: جبر مجموعه‌ها تا ابتدای ضرب دکارتی ۲۴۳
- آزمون ۶۲: ضرب دکارتی ۲۴۴
- آزمون ۶۳: آزمون جامع مجموعه، زیرمجموعه و جبر مجموعه‌ها ۲۴۵
- آزمون ۶۴: آزمون جامع فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۴۶

◆ فصل ششم: احتمال

- درس اول: مبانی احتمال ۲۵۰
- آزمون ۶۵: پیشامدهای تصادفی ۲۵۸
- آزمون ۶۶: اصول احتمال ۲۶۰
- آزمون ۶۷: ویژگی‌های تابع احتمال ۲۶۲
- آزمون ۶۸: آزمون جامع مبانی احتمال ۲۶۴
- درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس ۲۶۶
- آزمون ۶۹: احتمال غیرهم‌شانس ۲۶۹
- درس سوم: احتمال شرطی ۲۷۱
- آزمون ۷۰: تعریف احتمال شرطی و کاهش فضای نمونه‌ای ۲۷۸
- آزمون ۷۱: قانون ضرب احتمال ۲۸۰
- آزمون ۷۲: قانون احتمال کل ۲۸۲
- آزمون ۷۳: قانون بیز ۲۸۴
- آزمون ۷۴: آزمون جامع احتمال شرطی (۱) ۲۸۶
- آزمون ۷۵: آزمون جامع احتمال شرطی (۲) ۲۸۸
- درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۲۹۰
- آزمون ۷۶: پیشامدهای مستقل و وابسته ۲۹۴
- آزمون ۷۷: آزمون جامع فصل ششم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۹۶

- درس دوم: مدل‌سازی با گراف ۱۳۱
- آزمون ۳۴: تعریف و مفهوم احاطه‌گری ۱۴۱
- آزمون ۳۵: مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و عدد احاطه‌گری (۱) ۱۴۳
- آزمون ۳۶: مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و عدد احاطه‌گری (۲) ۱۴۵
- آزمون ۳۷: مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۱۴۷
- آزمون ۳۸: یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری - عدد احاطه‌گری گراف‌های C_n و P_n ۱۴۹
- آزمون ۳۹: آزمون جامع مدل‌سازی با گراف ۱۵۱
- آزمون ۴۰: آزمون جامع فصل سوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۳

◆ فصل چهارم: ترکیبیات (شمارش)

- درس اول / بخش اول: یادآوری ۱۵۶
- آزمون ۴۱: یادآوری (۱) ۱۶۱
- آزمون ۴۲: یادآوری (۲) ۱۶۲
- درس اول / بخش دوم: جایگشت با تکرار و معادلهٔ خطی با ضرایب واحد ۱۶۳
- آزمون ۴۳: جایگشت با تکرار ۱۶۸
- آزمون ۴۴: معادلهٔ خطی با ضرایب واحد ۱۶۹
- آزمون ۴۵: آزمون جامع جایگشت با تکرار و معادلهٔ خطی با ضرایب واحد ۱۷۰
- درس اول / بخش سوم: مربع لاتین ۱۷۱
- آزمون ۴۶: تا ابتدای مربع لاتین چرخشی ۱۸۰
- آزمون ۴۷: آزمون جامع مربع لاتین ۱۸۲
- درس دوم / بخش اول: اصل شمول و عدم شمول ۱۸۴
- آزمون ۴۸: اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه ۱۹۵
- آزمون ۴۹: اصل شمول و عدم شمول در حالت کلی ۱۹۶
- آزمون ۵۰: شمارش تعداد توابع ۱۹۷
- آزمون ۵۱: آزمون جامع اصل شمول و عدم شمول ۱۹۸
- درس دوم / بخش دوم: اصل لانه کبوتری و تعمیم آن ۱۹۹
- آزمون ۵۲: اصل لانه کبوتری ۲۰۶
- آزمون ۵۳: تعمیم اصل لانه کبوتری ۲۰۷
- آزمون ۵۴: آزمون جامع اصل لانه کبوتری و تعمیم آن ۲۰۸
- آزمون ۵۵: آزمون جامع فصل چهارم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۱۰

◆ فصل هفتم: آمار توصیفی

- درس اول: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن ... ۳۰۲
- آزمون ۷۸: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن ... ۳۰۵
- درس دوم: توصیف و نمایش داده‌ها ۳۰۷
- آزمون ۷۹: توصیف و نمایش داده‌ها ۳۱۴
- درس سوم: معیارهای گرایش به مرکز ۳۱۶
- آزمون ۸۰: میانگین ۳۲۴
- آزمون ۸۱: آزمون جامع معیارهای گرایش به مرکز ۳۲۶
- درس چهارم: معیارهای پراکندگی ۳۲۸
- آزمون ۸۲: واریانس و انحراف معیار ۳۳۴
- آزمون ۸۳: ضریب تغییرات و نمودار جعبه‌ای ۳۳۵
- آزمون ۸۴: آزمون جامع معیارهای پراکندگی ۳۳۷
- آزمون ۸۵: آزمون جامع فصل هفتم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ... ۳۳۹

◆ فصل هشتم: آمار استنباطی

- درس اول: گردآوری داده‌ها ۳۴۴
- آزمون ۸۶: گردآوری داده‌ها ۳۵۲
- درس دوم: برآورد ۳۵۴
- آزمون ۸۷: برآورد ۳۶۰

◆ فصل نهم: آزمون‌های جامع

- آزمون ۸۸: آزمون جامع (۱) ۳۶۲
- آزمون ۸۹: آزمون جامع (۲) ۳۶۳
- آزمون ۹۰: آزمون جامع (۳) ۳۶۴
- آزمون ۹۱: آزمون جامع (۴) ۳۶۶

◆ فصل دهم: پاسخ تشریحی تست‌های دست‌گرمی

- پاسخ تشریحی تست‌های دست‌گرمی ۳۶۸

◆ فصل یازدهم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

- پاسخ تشریحی آزمون‌ها ۴۰۸

◆ فصل دوازدهم: پاسخنامهٔ کلیدی

- دست‌گرمی ۵۳۴
- آزمون‌ها ۵۳۶

به جدولی $n \times n$ که خانه‌های آن با عددهای طبیعی 1 تا n طوری پر شده‌اند که در هیچ سطر و هیچ ستون آن عددی تکراری وجود نداشته باشد، یک **مربع لاتین از مرتبه n** یا **یک مربع لاتین $n \times n$** می‌گوییم. به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک **درايه** می‌گوییم.

با توجه به تعریف، واضح است که فقط یک مربع لاتین 1×1 وجود دارد.

تذکر

تست

کدام جدول مربعی لاتین از مرتبه ۴ است؟

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۱	۳

(۴)

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱

(۳)

۳	۱	۲	۴
۴	۲	۳	۱
۱	۳	۴	۲
۲	۴	۱	۳

(۲)

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲

(۱)

در جدول گزینه (۱) عدد ۴ در ستون چهارم تکرار شده است، در جدول گزینه (۳) عدد ۱ در ستون چهارم تکرار شده است و در جدول گزینه (۴) عدد ۱ در سطر چهارم تکرار شده است، پس هیچ‌یک از این سه جدول مربع لاتین نیستند. اکنون به‌سادگی می‌توان دید که جدول گزینه (۲) مربعی لاتین از مرتبه ۴ است.

راه‌حل

تست

چند مربع لاتین از مرتبه ۲ وجود دارد؟

۱۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

جدولی 2×2 در نظر می‌گیریم. باید خانه‌های این جدول را با اعداد ۱ و ۲ طوری پر کنیم که در هر سطر و هر ستون هر دو عدد ۱ و ۲ ظاهر شوند. دو خانه سطر اول را به یکی از دو طریق مقابل می‌توانیم پر کنیم: در هریک از این دو حالت خانه‌های سطر دوم به‌صورت یکتا پر می‌شوند چون در هر ستون باید هر دو عدد ۱ و ۲ را داشته باشیم. در نتیجه فقط دو مربع لاتین از مرتبه ۲ وجود دارد.

راه‌حل

نکته

اگر A مربعی لاتین از مرتبه n باشد، هریک از عددهای طبیعی 1 تا n در هر سطر و هر ستون A دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. بنابراین هر کدام از این اعداد دقیقاً در n خانه از A نوشته شده است.

تست

مجموع درایه‌های سطر چهارم یک مربع لاتین از مرتبه n کدام می‌تواند باشد؟

۱۵۳ (۴)

۱۸۹ (۳)

۱۷۲ (۲)

۱۳۵ (۱)

چون در هر سطر و هر ستون یک مربع لاتین از مرتبه n ، هریک از عددهای طبیعی 1 تا n درست یک بار ظاهر می‌شوند، پس مجموع درایه‌های هر سطر یا هر ستون دلخواه یک مربع لاتین از مرتبه n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است. در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۱۵۳ به این صورت است که به‌ازای $n=17$ به‌دست می‌آید.

راه‌حل

تست

کدام جدول را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱			
		۱	
	۲		
			۱

(۴)

۱			
			۱
	۲		
		۳	

(۳)

۱			
	۲	۳	
			۱

(۲)

۲			
		۳	۱
۴			

(۱)

راه حل

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) درایه a نمی‌تواند برابر هیچ یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۲			
a		۳	۱
۴			

گزینه (۲) هیچ یک از درایه‌های a و b نمی‌توانند برابر عدد ۱ باشند. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱			
a	۲	۳	b
			۱

گزینه (۳) این جدول را به صورت مقابل می‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱	۴	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۳	۲

گزینه (۴) عدد ۱ نمی‌تواند در هیچ یک از خانه‌های خالی سطر سوم قرار گیرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱			
		۱	
x	۲	x	x
			۱

تست

فرض کنید A مربعی لاتین از مرتبه ۴ باشد. برخی از درایه‌های A مشخص شده‌اند. مقدار x برابر چندتا از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد؟

$A =$

۴	۳		
			۲
۱		x	

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

راه حل

ابتدا توجه کنید که اگر درایه‌های مربع لاتین A را به صورت روبه‌رو نام‌گذاری کنیم، چون در هیچ سطر و هیچ ستونی نباید عدد تکراری وجود داشته باشد، پس

c			
۴	۳	a	b
d			۲
۱		x	

$$b \neq 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1, \quad d \neq 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow d = 3$$

تا اینجای کار مربع لاتین A به صورت مقابل درمی‌آید:

۲			
۴	۳	۲	۱
۳			۲
۱		x	

$$x \neq 1, x \neq 2$$

اکنون نشان می‌دهیم x می‌تواند هر دو مقدار ۳ و ۴ را داشته باشد:

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	$x=3$	۴

۲	۱	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	$x=4$	۳

تست

در یک مربع لاتین از مرتبه ۴ که به صورت مقابل مشخص شده است، مجموع درایه‌های خانه‌های سایه‌دار حداکثر کدام است؟

- ۲۷ (۲)
- ۳۲ (۴)

- ۱۸ (۱)
- ۳۰ (۳)

راه حل

واضح است که مجموع درایه‌های ستون‌های دوم و چهارم از مربع لاتین روبه‌رو برابر $10+10=20$ است. بنابراین فقط x و y باقی می‌مانند. چون می‌خواهیم مجموع درایه‌های خانه‌های سایه‌دار ماکزیمم باشد، پس قرار می‌دهیم $x=3$ و $y=4$. توجه کنید که ستون‌های دوم و چهارم مربع لاتین را می‌توان طوری پر کرد که درایه‌های سطر سوم آن‌ها برابر ۱ و ۲ باشند. در نتیجه بیشترین مقدار مجموع این درایه‌ها برابر است با $20+3+4=27$.

x		y	

تست ۷

به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۷ را انتخاب کرد که درایه‌های آن‌ها با هم برابر باشند؟
 ۱۴۷ (۴) ۱۲۶ (۳) ۱۰۵ (۲) ۸۴ (۱)

راه‌حل

در مربع لاتین از مرتبه ۷ هر یک از اعداد ۱ تا ۷ دقیقاً در ۷ خانه ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، ابتدا یکی از اعداد ۱

تا ۷ و سپس دو خانه شامل این عدد را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، پاسخ برابر است با $7 \times \binom{7}{2} = 7 \times 21 = 147$.

ساخت مربع لاتین جدید با تعویض جای دو سطر یا دو ستون

اگر در یک مربع لاتین جای دو سطر یا دو ستون را با هم عوض کنیم، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین است. چون مثلاً اگر جای دو سطر از یک مربع لاتین را عوض کنیم، ترتیب قرارگیری درایه‌های آن دو سطر تغییر نمی‌کند و فقط دو درایه در دو ستون جابه‌جا می‌شوند. پس باز هم در هیچ سطر و هیچ ستونی درایه تکراری نداریم.

تست ۸

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲

تعدادی عمل «جابه‌جایی دو سطر» و «جابه‌جایی دو ستون» روی جدول مقابل انجام داده‌ایم. جدول حاصل کدام می‌تواند باشد؟

۱	۲	۴	۳
۲	۴	۳	۲
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲

 (۴)

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۴
۲	۴	۱	۳

 (۳)

۴	۳	۱	۲
۳	۲	۴	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۴	۲	۳

 (۲)

۱	۳	۴	۲
۳	۲	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴

 (۱)

راه‌حل

جدول داده شده یک مربع لاتین است. اگر در یک مربع لاتین جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین خواهد بود. پس اگر تعدادی عمل از این نوع انجام دهیم، باز هم یک مربع لاتین خواهیم داشت. در بین ۴ جدول داده شده، فقط جدول گزینه (۲) یک مربع لاتین است. در ستون سوم جدول گزینه (۱) عدد ۴ تکرار شده است، در ستون چهارم جدول گزینه (۳) عدد ۴ تکرار شده است و در سطر دوم جدول گزینه (۴) عدد ۲ تکرار شده است. توجه کنید که به کمک عمل‌های زیر می‌توانیم به مربع لاتین گزینه (۲) برسیم.

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲

جابه‌جایی سطرهای دوم و سوم

۲	۳	۱	۴
۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۳	۲

جابه‌جایی سطرهای سوم و چهارم

۲	۳	۱	۴
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲
۳	۴	۲	۱

جابه‌جایی ستون‌های اول و چهارم

۴	۳	۱	۲
۳	۲	۴	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۴	۲	۳

ساخت مربع لاتین جدید با اعمال جایگشت

اگر A مربعی لاتین از مرتبه n و a_1, a_2, \dots, a_n جایگشتی از اعداد طبیعی ۱ تا n باشد، با اعمال این جایگشت روی درایه‌های A ، یعنی قرار دادن a_1 به جای ۱، قرار دادن a_2 به جای ۲، ... و قرار دادن a_n به جای n ، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین است چون در هر سطر و هر ستون A همه اعداد طبیعی ۱ تا n درست یک بار ظاهر شده‌اند. در نتیجه پس از اعمال جایگشت روی درایه‌های A در هر سطر و هر ستون جدول حاصل، همه اعداد a_1, a_2, \dots, a_n که شامل اعداد طبیعی ۱ تا n هستند، درست یک بار ظاهر می‌شوند. پس جدول جدید نیز یک مربع لاتین است.

تذکر

اگر مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آید، مربع لاتین A نیز از اعمال جایگشتی (عکس جایگشت قبلی) روی درایه‌های B به دست خواهد آمد.

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳

کدام مربع لاتین با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین مقابل به دست نمی‌آید؟

۳	۲	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۲	۳	۱	۴

 (۴)

۲	۱	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۴	۳

 (۳)

۳	۴	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲

 (۲)

۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴

 (۱)

با مقایسه سطر اول مربع لاتین داده شده و مربع لاتین گزینه (۱) جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ به دست می‌آید. اما با دیدن درایه سطر دوم

راه حل

و ستون اول در این دو مربع لاتین متوجه می‌شویم عمل تبدیل ۳ به ۴ انجام نشده است. پس مربع لاتین گزینه (۱) نمی‌تواند با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین داده شده به دست آمده باشد. توجه کنید که جایگشت‌های اعمال شده روی درایه‌های مربع لاتین داده شده برای ساخت مربع‌های لاتین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) به صورت زیر هستند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

گزینه (۴)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

گزینه (۳)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

گزینه (۲)

A =

۱			
	۲		
		۳	
			۴

B =

		۴	
۱			
			۲

مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات مقابل داده شده است. کدام جایگشت A را به B تبدیل می‌کند؟

تست
شماره ۱۰

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (۴) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (۳) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (۲) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

فرض کنید جایگشتی که A را به B تبدیل می‌کند، به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت

راه حل

A =

۱			
	۲		
		۳	
			۴

B =

a			
	b		
		c	
			d

از طرف دیگر، طبق فرض $B = \begin{pmatrix} & & 4 & \\ 1 & & & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ پس $d=2$ و B به صورت مقابل درمی‌آید:

B =

a			
	b	۴	
۱		c	
			۲

چون abcd جایگشتی از اعداد ۱ تا ۴ است. پس هیچ دو تا از a, b, c و d برابر نیستند. اکنون از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستونی از B عدد تکراری وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم

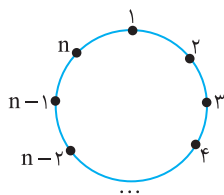
$$c \neq 1, c \neq 4, c \neq d = 2 \Rightarrow c = 3, \quad b \neq 4, b \neq c = 3, b \neq d = 2 \Rightarrow b = 1, \quad a \neq 1, a \neq c = 3, a \neq d = 2 \Rightarrow a = 4$$

پس جایگشت مورد نظر به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ است.

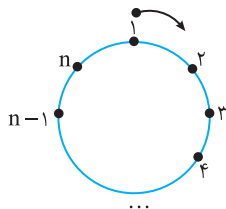
تعریف مربع لاتین چرخشی

به مربع لاتین زیر مربع لاتین چرخشی می‌گوییم.

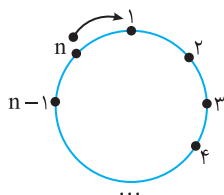
۱	۲	۳	$n-1$	n
n	۱	۲	۳	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	n	۱



مربع لاتین چرخشی را می‌توان این‌گونه به‌دست آورد. اعداد طبیعی ۱ تا n را به‌ترتیب در جهت ساعتگرد دور یک دایره می‌نویسیم. سطر اول مربع لاتین از نوشتن این اعداد با شروع از عدد ۱ و چرخش کامل دور دایره در جهت ساعتگرد به‌دست می‌آید.



سطر دوم مربع لاتین نیز به همین صورت به‌دست می‌آید، با این تفاوت که شروع حرکت از عدد n است، یعنی در شروع هر سطر یک واحد به عقب می‌رویم.



به همین ترتیب، بقیه سطرها را می‌توان به‌دست می‌آیند.

نکته

در هر مربع لاتین چرخشی، درایه‌های قطر اصلی برابر ۱ هستند و هر ستون با عدد شماره آن ستون شروع می‌شود.

تست

در مربع لاتین چرخشی A از مرتبه ۴، اگر a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام باشد، مقدار $a_{12} + a_{21} + a_{31} + a_{44}$ کدام است؟

- ۱۰ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

$$a_{12} + a_{21} + a_{31} + a_{44} = 2 + 4 + 3 + 1 = 10$$

مربع لاتین چرخشی A از مرتبه ۴ به‌صورت مقابل است:

راه‌حل

تعریف دو مربع لاتین متعامد

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر آن‌ها، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است و رقم‌های سمت چپ مربوط به A و رقم‌های سمت راست مربوط به B (یا برعکس) هستند. اگر هیچ دو تا از این عددهای دورقمی با هم برابر نباشند، می‌گوییم دو مربع لاتین A و B متعامد هستند.

تذکر

- ۱- دقت کنید که وقتی دو مربع لاتین را کنار هم قرار می‌دهیم، می‌توانیم به جای عدد دورقمی از زوج مرتب استفاده کنیم.
- ۲- طبق تعریف، مربع‌های لاتین A و B متعامدند اگر و فقط اگر برای هر دو درایه برابر در A درایه‌های نظیر آنها در B متمایز باشند. این محک معمولاً زمانی به کار می‌رود که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند. در واقع برای اینکه نشان دهیم مربع‌های لاتین A و B متعامد نیستند، کافی است دو درایه برابر در A پیدا کنیم که درایه‌های نظیر این دو نیز در B با هم برابرند.

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ a & & & \\ & & a & \\ & & & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} & & & \\ b & & & \\ & & b & \\ & & & \end{bmatrix}$$

(a,b)			
		(a,b)	

علت این امر این است که در مربع حاصل از کنار هم قرار دادن A و B زوج مرتب (عدد دورقمی) تکراری خواهیم داشت.

- ۳- اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد و از مرتبه n باشند، در مربع حاصل از کنار هم قرار دادن A و B هر یک از زوج‌های مرتب مجموعه $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.
- ۴- اگر $n=1, 2, 6$ ، آن‌گاه هیچ دو مربع لاتین از مرتبه n متعامد نیستند، یعنی مربع‌های لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد. اما برای هر $n \neq 1, 2, 6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارند.

تست ۱۲

چند جفت از مربع‌های لاتین زیر متعامدند؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

راه‌حل

درایه‌های نظیر هر دو جفت از مربع‌های لاتین A، B و C را کنار یکدیگر قرار می‌دهیم.

$$A, B: \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 23 & 34 & 41 & 12 \\ 34 & 41 & 12 & 23 \\ 42 & 13 & 24 & 31 \end{bmatrix} \quad A, C: \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 24 & 33 & 42 & 11 \\ 32 & 44 & 11 & 23 \\ 43 & 11 & 24 & 32 \end{bmatrix} \quad B, C: \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 34 & 43 & 12 & 21 \\ 42 & 14 & 21 & 33 \\ 23 & 31 & 44 & 12 \end{bmatrix}$$

چون در هر سه مربع بالا عدد دورقمی تکراری (مانند اعدادی که با دایره مشخص شده‌اند) وجود دارد، پس هیچ جفت از مربع‌های لاتین داده شده متعامد نیستند.

تست ۱۳

مربع لاتین A به صورت مقابل مفروض است:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

چند مربع لاتین B وجود دارد که با A متعامد است؟

$$B = \begin{bmatrix} & & 2 & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

- ۱ (۲)
- ۲۳ (۴)

- ۱ (۳)
- ۱۲ (۳)

راه‌حل

چون B یک مربع لاتین است، پس می‌توان ستون‌های سوم و چهارم آن را به صورت مقابل کامل کرد:

$$B = \begin{bmatrix} & & 2 & 1 \\ & & 4 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

با کنار هم قرار دادن ستون‌های سوم و چهارم دو مربع لاتین A و B به سادگی مشاهده می‌شود که این دو مربع در هیچ شرایطی نمی‌توانند متعامد باشند. چون در مربع جدید عدد دورقمی تکراری وجود دارد. در نتیجه هیچ مربع لاتین B وجود ندارد که با A متعامد باشد.

$$\begin{bmatrix} & & 12 & 31 \\ & & 24 & 42 \\ & & 43 & 14 \\ & & 31 & 23 \end{bmatrix} \rightarrow \text{تکراری است } 31$$

تست ۱۴

یک مربع لاتین از مرتبه ۴ است. اگر مربع لاتین B با A متعامد باشد و درایه‌های قطر فرعی A با هم برابر باشند، مجموع درایه‌های قطر فرعی B کدام است؟

- ۴ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) بستگی به درایه‌های قطر اصلی A دارد

راه‌حل

چون درایه‌های قطر فرعی مربع لاتین A با هم برابرند و A با B متعامد است، پس تمام درایه‌های قطر فرعی مربع لاتین B باید متمایز باشند و مجموع آنها برابر است با $1+2+3+4=10$.

قضیه ۱

فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و مربع لاتین B' از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست آمده باشد. در این صورت A و B' نیز متعامدند.

تست ۱۵

تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین چرخشی کدام است؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

راه‌حل

راه‌حل اول فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ مربع لاتین داده شده و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ مربع لاتین حاصل از تعویض سطرهاي دوم و سوم A باشد. در

این صورت A و B متعامدند (بررسی کنید). برای هر ۳! جایگشت اعداد ۱، ۲ و ۳، اگر این جایگشت را روی درایه‌های B اعمال کنیم، مربع لاتین

حاصل همچنان با A متعامد است (مثلاً اگر جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ را روی درایه‌های B اعمال کنیم، مربع لاتین $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ به دست می‌آید

که با A متعامد است). در نتیجه حداقل $3! = 6$ مربع لاتین متعامد با A وجود دارد و با توجه به گزینه‌ها نتیجه می‌گیریم گزینه (۴) درست است.

راه‌حل دوم چون مربع‌های لاتین A و B متعامد و درایه‌های قطر اصلی A یکسانند، پس درایه‌های قطر اصلی B متمایز خواهند بود، یعنی این درایه‌ها $3! = 6$ جایگشت دارند.

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

توجه کنید که هر یک از جدول‌های بالا به‌طور یکتا به یک مربع لاتین گسترش داده می‌شود. بنابراین تعداد مربع‌های لاتین متعامد با A برابر ۶ است.

تست ۱۶

مربع‌های لاتین A و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ متعامدند. به‌ازای کدام مربع لاتین C ممکن است A و C متعامد نباشند؟

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲

 (۴)

۱	۲	۴	۳
۲	۱	۳	۴
۴	۳	۱	۲
۳	۴	۲	۱

 (۳)

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

 (۲)

۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲

 (۱)

راه‌حل

اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین C از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست آید، آن‌گاه A و C نیز متعامدند. چون درایه‌های قطر اصلی B با هم برابرند، پس درایه‌های قطر اصلی هر مربع لاتینی که از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست آید، برابرند. بنابراین مربع لاتین گزینه (۴) نمی‌تواند از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست آمده باشد، یعنی این مربع لاتین ممکن است با A متعامد نباشد. توجه کنید که جایگشت‌های اعمال شده روی درایه‌های مربع لاتین B برای ساخت مربع‌های لاتین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) که تعامد آنها را با A تضمین می‌کنند، به‌صورت زیر هستند:

۱	۲	۳	۴
↓	↓	↓	↓
۱	۲	۴	۳

۱	۲	۳	۴
↓	↓	↓	↓
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
↓	↓	↓	↓
۲	۱	۴	۳

گزینه (۳)

گزینه (۲)

گزینه (۱)

دست گرمی

۲۴۱- دانش‌آموزان کلاس دوازدهم یک مدرسه در چهار کلاس «الف»، «ب»، «پ» و «ت» تقسیم شده‌اند. روز شنبه این دانش‌آموزان چهار جلسه با ۴ دبیر به نام‌های A, B, C و D کلاس دارند و قرار است با هر دبیر یک جلسه کلاس داشته باشند. کدام جدول برنامه‌ریزی مناسبی برای انجام این کار است؟

A=

		۲	
	۲		
۲			

 B=

		۱	
۳			

 C=

			x
		۲	

جلسه	۱	۲	۳	۴	کلاس
الف	B	D	A	C	D
ب	C	A	B	D	C
پ	A	D	B	C	A
ت	C	D	A	B	C

(۱)

جلسه	۱	۲	۳	۴	کلاس
الف	B	D	A	C	C
ب	C	A	B	D	A
پ	A	D	B	C	B
ت	C	D	A	B	C

(۲)

جلسه	۱	۲	۳	۴	کلاس
الف	B	D	A	C	B
ب	C	A	B	D	A
پ	A	D	B	C	C
ت	C	D	A	B	B

(۳)

جلسه	۱	۲	۳	۴	کلاس
الف	B	D	A	C	A
ب	C	A	B	D	B
پ	A	D	B	C	C
ت	C	D	A	B	A

۲۴۲- کدام جدول را نمی‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

	۴		
۳		۲	

(۴)

۳		۲	
	۴	۱	

(۳)

			۱
			۲
		۴	۳

(۲)

	۲		
			۱
۳			
			۴

(۱)

۲۴۳- به چند طریق می‌توان جدول مقابل را با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱			
	۱		
		۳	
			۳

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۲۴۴- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به صورت مقابل مشخص شده‌اند. مقدار x کدام است؟

A=

۱		۲	
	۳		x
			۱

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۲۴۵- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به صورت مقابل مشخص شده‌اند. عدد x برابر چند تا از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند باشد؟

A=

			۱
۲		x	
	۱		
			۱

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۲۴۶- در نوشتن یک مربع لاتین از مرتبه ۵، برای خانه‌های شامل عدد ۲ چند انتخاب وجود دارد؟

- ۲۵ (۱)
- ۱۰۰ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۲۴۰ (۴)

۲۴۷- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۱۶ را انتخاب کرد که درایه‌های آن‌ها با هم برابر باشند؟

- ۷۳۶۰ (۱)
- ۵۶۰ (۲)
- ۸۹۶۰ (۳)
- ۱۹۲۰ (۴)

۲۴۸- فرض کنید A یک مربع لاتین از مرتبه ۵ باشد. به چند طریق می‌توان دو خانه از A را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون قرار نداشته باشند و درایه‌های این دو خانه با هم برابر نباشند؟

- ۱۵۰ (۱)
- ۱۸۰ (۲)
- ۲۰۰ (۳)
- ۲۲۵ (۴)

۲۴۹- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۶ را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون باشند و مجموع درایه‌های این سه خانه برابر ۸ باشد؟

- ۱۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۶ (۳)
- ۴۸ (۴)

۲۵۰- مربع لاتین B از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات

$$A = \begin{pmatrix} & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & & x \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & 3 & & \end{pmatrix}$$

مقابل را داریم. مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ 4 & & & \\ & & & \\ & & 4 & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & x \end{pmatrix}$$

۲۵۱- مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است.

در مورد A و B اطلاعات روبه‌رو به ما داده شده است. مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ & & & \\ & 4 & & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & & & 3 \\ & & & \\ & x & & 1 \\ & & 2 & \end{pmatrix}$$

۲۵۲- مربع‌های لاتین A و B متعامند. تعدادی از درایه‌های A و B به صورت مقابل

داده شده‌اند. مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۲۵۳- چهار نفر در مجموع چهار پیراهن و چهار شلوار دارند. آن‌ها می‌خواهند در چهار مراسم از این لباس‌ها استفاده کنند به گونه‌ای که هر کس هریک از پیراهن‌ها و هریک از شلوارها را دقیقاً در یکی از چهار مراسم استفاده کند و هر پیراهن با هر شلوار نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار گیرد. کدام جدول به این چهار نفر کمک می‌کند که در هر مراسم کدام پیراهن و کدام شلوار را بپوشند؟

$$\begin{pmatrix} 41 & 12 & 34 & 21 \\ 33 & 42 & 22 & 11 \\ 13 & 23 & 32 & 43 \\ 24 & 31 & 14 & 44 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 31 & 43 & 12 \\ 22 & 33 & 11 & 24 \\ 21 & 32 & 23 & 34 \\ 13 & 44 & 42 & 41 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 21 & 32 & 43 \\ 14 & 22 & 13 & 24 \\ 23 & 11 & 34 & 41 \\ 31 & 42 & 44 & 33 \end{pmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 34 & 43 & 12 & 21 \\ 23 & 14 & 41 & 32 \\ 42 & 31 & 24 & 13 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

۲۵۴- مربع‌های لاتین A و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ متعامند. به‌ازای کدام مربع لاتین C قطعاً A و C متعامند؟

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

تا ابتدای مربع لاتین چرخشی

آزمون ۴۶

۷۲۳- کدام جدول مربعی لاتین از مرتبه ۴ است؟

۲	۱	۳	۲
۴	۳	۴	۱
۱	۴	۲	۳
۳	۲	۱	۴

(۴)

۲	۱	۳	۴
۳	۲	۴	۱
۲	۴	۱	۳
۱	۳	۲	۴

(۳)

۱	۲	۴	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲

(۲)

۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱

(۱)

۷۲۴- کدام یک از جدول‌های زیر را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۲		
		۲
		۳

(۴)

	۱	
		۲
۳		

(۳)

۱		۳
۳		۱

(۲)

۱		۳
	۲	

(۱)

۷۲۵- چند مربع لاتین 3×3 وجود دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۷۲۶- مجموع درایه‌های سطر سوم یک مربع لاتین از مرتبه n برابر ۹۱ است. مقدار n کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۷۲۷- به چند طریق می‌توان جدول مقابل را با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱	۲	۳	
		۱	
	۳	۴	

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) ۳

۷۲۸- اگر جدول مقابل مربعی لاتین از مرتبه ۳ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱	۲	۳
۲	x	
۳		y

- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۴ (۴) ۵

۷۲۹- در یک مربع لاتین از مرتبه ۴، اگر R_i مجموع درایه‌های سطر i ام و C_j مجموع درایه‌های ستون j ام باشد، ماکزیم مقدار

$R_1 + C_2 + C_3$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۳۰ (۳) ۲۷ (۴) ۳۲

۷۳۰- در مربع لاتین A از مرتبه ۴، اگر a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام باشد، کمترین مقدار $a_{12} + a_{21} + a_{34} + a_{41}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۳

۷۳۱- حاصل ضرب درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبه ۴ بر 2^n بخش‌پذیر است. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که به‌ازای آن این ویژگی

برقرار است، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۷۳۲- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۶ را انتخاب کرد که درایه‌های این دو خانه بهم برابر باشند؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۷۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰

۷۳۳- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۶ را انتخاب کرد که درایه‌های این سه خانه دوه‌دو متمایز باشند؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۱۴۴۰ (۳) ۲۸۸۰ (۴) ۴۳۲۰

۷۳۴- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۵ را انتخاب کرد که هیچ دو تا در یک سطر نباشند و مجموع درایه‌های

این سه خانه برابر ۱۴ باشد؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۷۳۵- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۷ را انتخاب کرد که مجموع درایه‌های این دو خانه برابر ۱۰ باشد؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۴۷

سؤال	گام
۷۲۳	۹۸
۷۲۴	۹۸
۷۲۵	۹۸ ۱۰۰
۷۲۶	۹۸
۷۲۷	۹۸
۷۲۸	۹۸
۷۲۹	۹۸
۷۳۰	۹۸
۷۳۱	۹۸
۷۳۲	۹۸
۷۳۳	۹۸
۷۳۴	۹۸
۷۳۵	۹۸
۷۳۶	۱۰۰
۷۳۷	۹۸

۷۳۶- مربع لاتین B از اعمال جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A =

۲	۱			
			x	

B =

۲				
			۴	
				۳

A و B اطلاعات زیر داده شده است. مقدار x کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۵ (۴)

۷۳۷- مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات زیر را داریم.

A =

	۱		
		۱	

B =

	x	۲	
۴			
		۱	

مقدار x کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

آزمون جامع مربع لاتین

آزمون ۴۷

۷۳۸- کدام یک از جدول‌های زیر را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین تبدیل کرد؟

(۱)

۱	۲	۳	
			۴

 (۲)

۱			
	۱		
		۱	
			۲

 (۳)

۱			
		۲	۳

 (۴)

۱			
	۲		
		۳	
			۴

۷۳۹- کدام جدول را نمی‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

(۱)

۱			
	۲		
		۳	
			۴

 (۲)

۱	۲		
		۳	۴

 (۳)

۱		۲	۴
	۳		

 (۴)

۱	۲		
۳	۴		

۷۴۰- چند مربع لاتین از مرتبه ۵ وجود دارد که سه سطر اول آن همانند جدول مقابل باشد؟

۱	۳	۲	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۳	۲	۴	۱	۵

 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴۱- به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی جدول مقابل را طوری پر کرد که جدول حاصل مربعی لاتین از مرتبه ۴ باشد؟

۱	۲	۳	۴
۲			
۳			
۴			

 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴۲- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به صورت مقابل داده شده است. عدد x برابر چندتا از مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد؟

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & & \\ & & 1 & \\ & & & x \end{pmatrix}$ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴۳- ستون اول یک مربع لاتین از مرتبه ۴ مفروض است. ستون دوم این مربع لاتین را به چند طریق می‌توان پر کرد؟

(۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۷۴۴- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۶ را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون قرار نداشته باشند و درایه‌های این دو خانه متمایز باشند؟

(۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۷۲۰

۷۴۵- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه ۶ را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون باشند و تفاضل درایه‌های این دو خانه برابر ۲ باشد؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۷۴۶- مربع لاتین B از اعمال جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد A و B $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

اطلاعات زیر را داریم. مقدار x کدام است؟
A =

۱	۲		
۳	۴		

 B =

		۱	
			x

 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴۷- مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات زیر داده شده است. مقدار x کدام است؟

A =

			x
۳			

 B =

		۲	
	۴		
۴			

 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال	گام
۷۳۸	۹۸
۷۳۹	۹۸
۷۴۰	۹۸
۷۴۱	۹۸
۷۴۲	۹۸
۷۴۳	۹۸ ۱۰۰
۷۴۴	۹۸ ۸۹
۷۴۵	۹۸
۷۴۶	۱۰۰ ۹۸
۷۴۷	۱۰۰ ۹۸
۷۴۸	۱۰۲
۷۴۹	۱۰۲ ۱۰۱
۷۵۰	۱۰۲ ۱۰۱
۷۵۱	۱۰۲
۷۵۲	۱۰۰ ۱۰۲

۷۴۸- به‌ازای کدام مربع لاتین B، مربع‌های لاتین A=

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

 و B متعامدند؟

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

 (۴)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

 (۳)

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

 (۲)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

 (۱)

۷۴۹- دربارهٔ مربع‌های لاتین متعامد A و B اطلاعات زیر داده شده است. مقدار x کدام است؟

A=

	۲	
		۲
۲		

B=

	x	
		۱
		۳
۴		

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۷۵۰- مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ ۵ و B یک مربع لاتین متعامد با A است. مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

- ۲۰ (۴)
- ۱۰ (۳)
- ۱۵ (۲)
- ۵ (۱)

۷۵۱- فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ باشند. به چند طریق می‌توان یک خانه از A را انتخاب کرد که مجموع درایه‌های این خانه و خانهٔ نظیر آن در مربع لاتین B برابر ۵ باشد؟

- ۱۰ (۴)
- ۵ (۳)
- ۴ (۲)
- ۲ (۱)

۷۵۲- مربع‌های لاتین A و B=

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

 متعامدند. به‌ازای کدام مربع لاتین C قطعاً A و C متعامدند؟

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

 (۴)

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

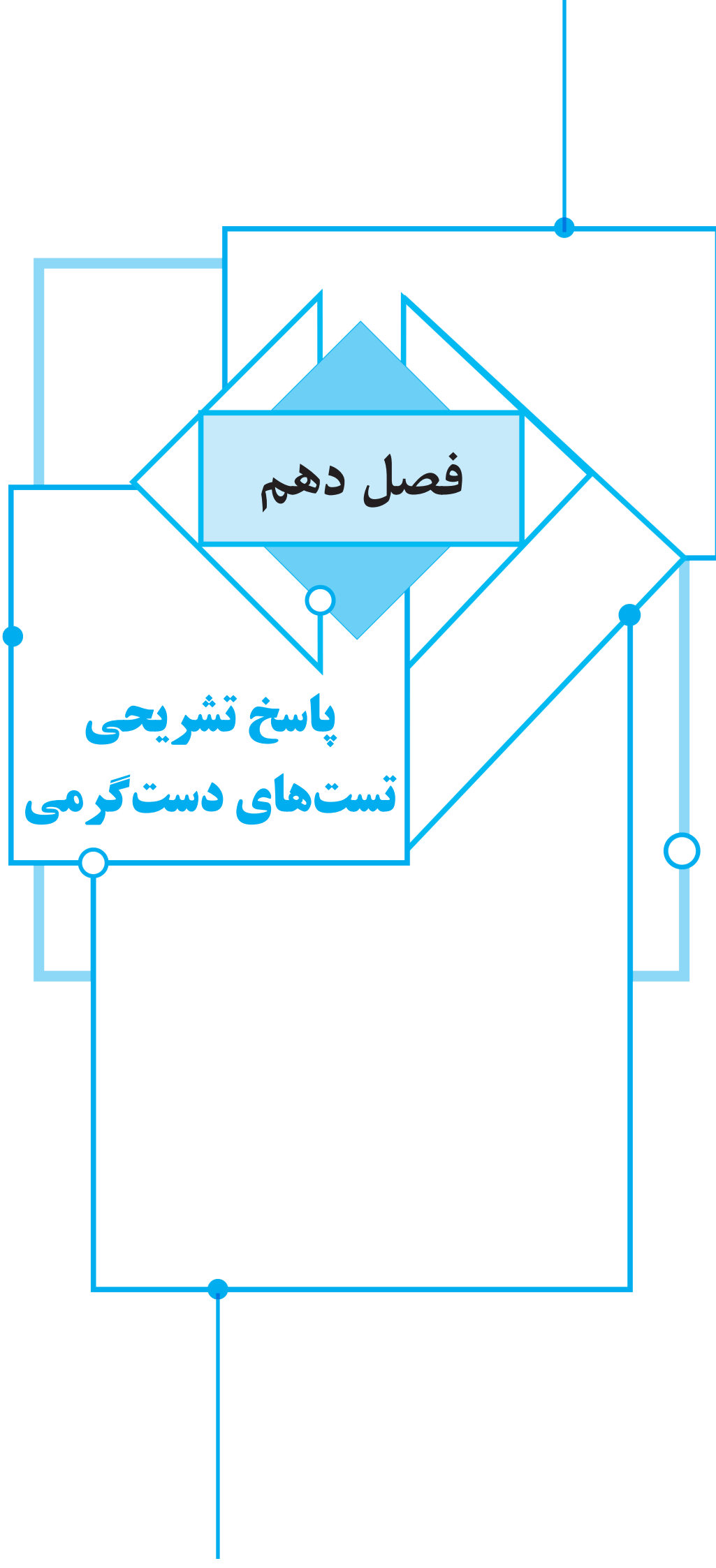
 (۳)

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

 (۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

 (۱)



فصل دهم

پاسخ تشریحی
تست‌های دست‌گرمی

۲۵۳ ۱ با توجه به شرایط گفته شده در صورت سؤال باید به دنبال یک جفت مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ باشیم. در واقع یک مربع لاتین از مرتبه ۴ برای اینکه نشان دهد هر کس در هر مراسم چه پیراهنی بپوشد و یک مربع لاتین دیگر از مرتبه ۴ نیز متعامد با آن برای اینکه نشان دهد هر کس در هر مراسم کدام شلوار را بپوشد، لازم است.

مراسم	x	y	z	t
افراد	a			
b				
c				
d				

 $A =$

مراسم	x	y	z	t
افراد	a			
b				
c				
d				

 $B =$

چهار مراسم را با x, y, z, t و افراد را با a, b, c, d پیراهن‌ها را با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ و شلوارها را نیز با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان می‌دهیم. هریک از جدول‌های A و B را با اعداد ۱ تا ۴ به گونه‌ای پر می‌کنیم که جدول A نشان دهد هر کس در هر مراسم چه پیراهنی بپوشد و جدول B نشان دهد هر کس در هر مراسم کدام شلوار را بپوشد. هیچ سطر از A نباید عدد تکراری داشته باشد، زیرا هر کس در چهار مراسم باید چهار پیراهن مختلف بر تن کند. هیچ ستون از A نیز نباید عدد تکراری داشته باشد، زیرا در هر مراسم، افراد چهار پیراهن مختلف بر تن دارند، پس A باید یک مربع لاتین باشد. به طور مشابه B نیز باید یک مربع لاتین باشد. در ضمن A و B باید متعامد باشند، زیرا هر پیراهن با هر شلوار دقیقاً یک بار باید مورد استفاده قرار گیرد، یعنی از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر A و B باید تمام ۱۶ زوج مرتب مجموعه $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ ایجاد شوند. در بین چهار جدول داده شده، فقط جدول گزینه (۱) از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر دو مربع لاتین متعامد به دست آمده است. توجه کنید که در جدول‌های گزینه‌های (۲) و (۳)، A نمی‌تواند مربع لاتین باشد چون اعداد دورقمی ستون اول رقم‌های دهگان متمایز ندارند. همچنین در جدول گزینه (۴)، B نمی‌تواند مربع لاتین باشد چون اعداد دورقمی سطر چهارم رقم‌های یکان متمایز ندارند.

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

 $A =$

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳

 $B =$

بنابراین به کمک این جدول، چهار نفر می‌توانند مشخص کنند که در هر مراسم کدام پیراهن و کدام شلوار را بپوشند.

۲۵۴ ۱ اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین C از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست آید، A و C نیز متعامدند. مربع لاتین گزینه (۱)

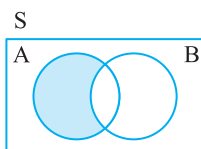
از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ روی درایه‌های B به دست آمده است. پس A

و این مربع لاتین متعامدند.

۲۵۵ ۱ فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 184\}$ و A و B به ترتیب مجموعه‌ای از S باشند که بر ۳ و ۴ بخش پذیرند. باید تعداد اعضای $A - B$ را حساب کنیم. می‌توان نوشت $|A - B| = |A| - |A \cap B|$. توجه کنید که $A \cap B$ مجموعه‌ای از S است که بر ۱۲ بخش پذیرند.

$$|A| = \left\lfloor \frac{184}{4} \right\rfloor = 46, \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{184}{12} \right\rfloor = 15$$

در نتیجه پاسخ برابر است با $|A - B| = 46 - 15 = 31$.



۲۴۸ ۱ چون A یک مربع لاتین از مرتبه ۵ است، پس هریک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در هر سطر و هر ستون A دقیقاً یک بار ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب دو خانه از A که در یک سطر یا یک ستون نباشند و درایه‌های مختلفی داشته باشند، ابتدا دو تا از ۵ عدد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{5}{2}$ طریق

می‌توانیم انجام دهیم. اگر این دو عدد برابر i و j باشند، ابتدا یکی از ۵ خانه شامل عدد i را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید در سطر شامل این خانه و نیز در ستون شامل این خانه دقیقاً یک خانه شامل عدد j وجود دارد، پس دوتا از ۵ خانه شامل عدد j با خانه انتخاب شده در یک سطر یا یک ستون قرار دارند. بنابراین به ۳ طریق می‌توانیم خانه مطلوب شامل عدد j را انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$\begin{matrix} \text{انتخاب یک} & \text{انتخاب یک} \\ \text{خانه شامل} & \text{خانه شامل} \\ \text{عدد } i & \text{عدد } j \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{انتخاب دو} \\ \text{خانه شامل} \\ \text{عدد } i \end{matrix} = 10 \times 3 = 30$$

۲۴۹ ۲ چون خانه‌ها از یک سطر یا یک ستون مربع لاتین انتخاب می‌شوند، پس درایه‌های آن‌ها دوه‌دو متمایزند. در دو حالت مجموع سه درایه متمایز برابر ۸ است:

$$\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$$

ابتدا به ۱۲ طریق یکی از سطرها یا یکی از ستون‌ها را انتخاب می‌کنیم. پس از انتخاب یک سطر یا یک ستون، به یک طریق سه عدد $\{1, 2, 5\}$ و به یک طریق نیز سه عدد $\{1, 3, 4\}$ را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$12 \times 2 = 24$$

۲۵۰ ۴ مربع لاتین A از اعمال عکس جایگشت داده شده، یعنی جایگشت

روی درایه‌های مربع لاتین B به دست می‌آید. این

جایگشت را روی دو درایه داده شده از B اعمال می‌کنیم. در نتیجه A به صورت زیر است. اکنون می‌توان نوشت

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & x \\ 3 & b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a \neq 1, a \neq 2, a \neq 4 \Rightarrow a = 3 \\ b \neq 1, b \neq 3, b \neq 4 \Rightarrow b = 2 \\ x \neq 1, x \neq b = 2, x \neq a = 3 \Rightarrow x = 4 \end{matrix}$$

۲۵۱ ۴ به جای عدد ۴ واقع در سطر چهارم و ستون سوم A ، در مربع لاتین

B عدد x قرار داده شده است، پس برای به دست آوردن B به جای هر عدد ۴ از A باید x قرار دهیم. در نتیجه درایه سطر دوم و ستون اول نیز برابر x است. چون در هیچ سطر و هیچ ستونی از B عدد تکراری وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم $x \neq 1$ ، $x \neq 2$ و $x \neq 3$. بنابراین x باید برابر ۴ باشد.

۱		
x	۲	
		۳
		x

 $B =$

۲۵۲ ۴ ابتدا توجه کنید که a برابر هیچ یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ نیست، پس

$a = 4$. از طرف دیگر، چون A و B متعامدند، پس اگر دو درایه A برابر باشند، درایه‌های نظیر آن‌ها در B متمایزند. با توجه به سه درایه A که برابر ۴ هستند، نتیجه می‌گیریم درایه‌های نظیر این سه در B متمایزند، بنابراین $x \neq 2$ و $x \neq 3$. همچنین معلوم است که $x \neq 1$ ، پس $x = 4$.

۱	۲	۳	a
	۴		
		۴	

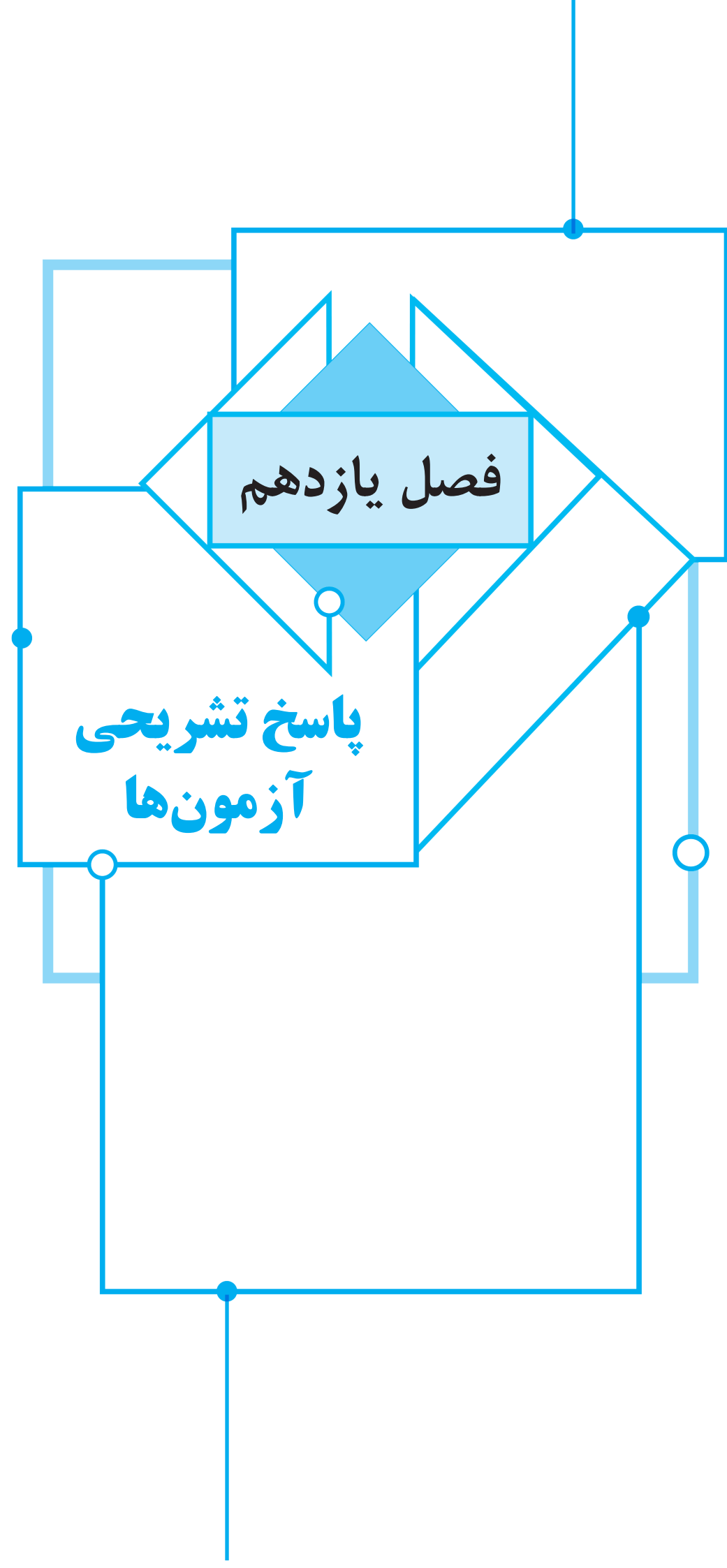
 $A =$

			۳
	x		۱
			۲

 $B =$

فصل یازدهم

پاسخ تشریحی
آزمون‌ها



۷۱۹ ۲ فرض کنید عدد مورد نظر به ترتیب X_1 رقم ۱، X_2 رقم ۲، X_3 رقم ۳ و

X_4 رقم ۴ داشته باشد، در این صورت $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6$ و توجه کنید که پس از انتخاب ارقام، عدد به صورت یکتا ساخته می‌شود (زیرا ارقام عدد را باید از چپ به راست به صورت صعودی بنویسیم). در نتیجه پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6 \quad \text{یعنی برابر } \binom{9}{3} = 84 \text{ است.}$$

۷۲۰ ۲ فرض کنید به سه دانش‌آموز به ترتیب X_1 ، X_2 و X_3 خودکار و Y_1 ،

Y_2 و Y_3 مداد برسد. در این صورت $X_1 + X_2 + X_3 = 7$ و پاسخ برابر تعداد جواب‌های

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 6$$

صحیح و مثبت این دستگاه معادلات، یعنی برابر با $15 \times 10 = 150 = \binom{6}{2} \binom{5}{2}$ است.

۷۲۱ ۳ اگر $8 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ ، آن‌گاه $X_1 + X_2 + X_3$ برابر ۸ یا ۹ یا ۱۰ است.

پس برای محاسبه تعداد جواب‌های نامعادله، سه حالت در نظر می‌گیریم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل جمع، پاسخ برابر است با

$$X_1 + X_2 + X_3 = 8 \quad \text{یا} \quad 9 \quad \text{یا} \quad 10$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{10}{2} + \binom{11}{2} + \binom{12}{2} = 45 + 55 + 66 = 166$$

۷۲۲ ۲ فرض کنید S مجموعه همه جواب‌های صحیح معادله

$X_1 + X_2 + X_3 = 10$ با شرط $X_i \geq 1$ ، $i=1, 2, 3$ ، A_i مجموعه جواب‌هایی در S

باشد که $X_i \geq 6$. در این صورت مطلوب جواب‌هایی از S است که در هیچ یک از A_1 ،

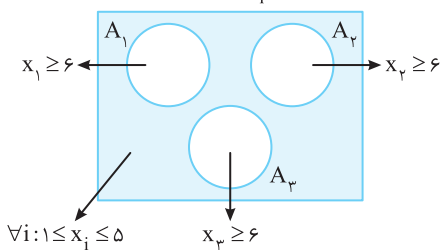
A_2 و A_3 قرار ندارند. توجه کنید که هیچ دو تا از A_1 ، A_2 و A_3 عضو مشترکی

ندارند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| = \binom{9}{2} - 3 \binom{10 - (6+1+1) + 3 - 1}{3-1}$$

$$= \binom{9}{2} - 3 \binom{4}{2} = 36 - 18 = 18$$

$$S: \forall i: x_i \geq 1$$



۷۲۳ ۲ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) در ستون دوم عدد ۲ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

گزینه (۲) در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد، پس این جدول یک مربع لاتین است.

گزینه (۳) در ستون اول عدد ۲ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

گزینه (۴) در سطر دوم عدد ۴ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

۷۲۴ ۳ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) خانه خالی سطر دوم را با هیچ عددی نمی‌توان پر کرد، پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

گزینه (۲) اگر این جدول یک مربع لاتین باشد، آن‌گاه درایه سطر اول و ستون دوم باید برابر ۲ باشد. اما در این حالت خانه خالی سطر سوم را با هیچ عددی نمی‌توان پر کرد.

پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۷۱۳ ۳ راه‌حل اول در نصف جایگشت‌های حروف arrangee حرف n بعد از

حرف g و در نصف دیگر حرف g بعد از حرف n قرار دارد. بنابراین تعداد جایگشت‌های حروف این کلمه را به دست می‌آوریم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم. طبق قضیه جایگشت با تکرار

$$\frac{1}{2} \times \frac{8!}{2!2!2!} = 2520$$

می‌توان نوشت

راه‌حل دوم هشت جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا دو تا از هشت جایگاه را

به $\binom{8}{2} = 28$ طریق انتخاب و حروف n و g را به یک طریق (n بعد از g) در آن‌ها قرار

می‌دهیم. سپس با استفاده از قضیه جایگشت با تکرار، حروف e، r، t، a، a را به $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ طریق در شش جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم. در نتیجه بنابر تعمیم

$$\text{اصل ضرب، پاسخ برابر است با } 28 \times 90 = 2520$$

۷۱۴ ۳ اگر حرکت به سمت راست را با R و حرکت به سمت بالا را با U نشان

دهیم، هر مسیر از A به B یک جایگشت از پنج حرف R و چهار حرف U است. بنابراین

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!}$$

طبق قضیه جایگشت با تکرار، پاسخ برابر است با

۷۱۵ ۱ پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$3X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 3X_4 = 30$ یا هم‌ارز آن $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$ ، یعنی برابر

$$\binom{13}{3} \text{ است.}$$

۷۱۶ ۴ پاسخ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

یعنی $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 7$

۷۱۷ ۳ هر جمله از بسط داده شده به صورت $x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3}$ است که در آن

m_1 ، m_2 و m_3 اعدادی صحیح و نامنفی هستند و $m_1 + m_2 + m_3 = 5$. تعداد

جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر $\binom{7}{2} = 21$ است. در نتیجه بسط داده

شده ۲۱ جمله دارد.

۷۱۸ ۲ اگر نمایش یک عدد سه رقمی را به صورت $\overline{X_1 X_2 X_3}$ فرض کنیم، باید تعداد

جواب‌های صحیح معادله $X_1 + X_2 + X_3 = 12$ را تعیین کنیم به طوری که $1 \leq X_1 \leq 9$ ،

$0 \leq X_2 \leq 9$ و $0 \leq X_3 \leq 9$. فرض کنید S مجموعه همه جواب‌های صحیح معادله

$X_1 + X_2 + X_3 = 12$ باشد به طوری که $X_1 \geq 1$ ، $X_2 \geq 0$ ، $X_3 \geq 0$ ، A_i مجموعه

جواب‌هایی در S باشد که $X_i \geq 1$ ، $(i=1, 2, 3)$. در این صورت مطلوب همه جواب‌هایی در S

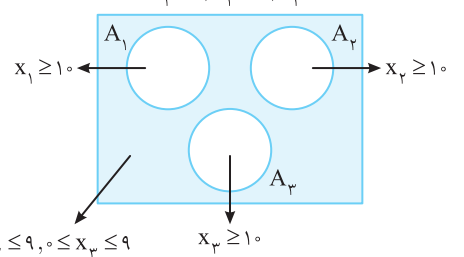
است که در هیچ یک از A_1 ، A_2 و A_3 قرار ندارند. توجه کنید که هیچ دو تا از A_1 و A_2

و A_2 و A_3 عضو مشترکی ندارند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$|S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| = \binom{12 - (1+0+0) + 3 - 1}{3-1} - \binom{12 - (1+0+0) + 3 - 1}{3-1} - \binom{12 - (1+0+0) + 3 - 1}{3-1} - \binom{12 - (1+0+0) + 3 - 1}{3-1}$$

$$= \binom{13}{2} - \binom{4}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} = 78 - 6 - 3 - 3 = 66$$

$$S: x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



۷۳۲ ۳ در مربع لاتین از مرتبه ۶ هریک از اعداد ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، ابتدا یکی از شش عدد (مثلاً X) و سپس دو تا از شش خانه شامل عدد X را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، برابر است با

$$6 \times \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$$

۷۳۳ ۴ در مربع لاتین از مرتبه ۶ هریک از عددهای ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه ظاهر می‌شوند. برای انتخاب سه خانه با درایه‌های دوه‌دو متمایز، ابتدا سه تا از عددهای ۱ تا ۶ (مثلاً X, Y, Z) و سپس یکی از شش خانه شامل X، یکی از شش خانه شامل Y و یکی از شش خانه شامل Z را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$\binom{6}{3} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{1} = 20 \times 6 \times 6 \times 6 = 4320$$

۷۳۴ ۱ چون در مربع لاتین از مرتبه ۵ فقط اعداد ۱ تا ۵ ظاهر می‌شوند، پس به شرطی مجموع سه تا از این اعداد برابر ۱۴ است که دو تا برابر ۵ باشند و یکی برابر ۴ باشد. بنابراین برای انتخاب سه خانه با مجموع ۱۴ که هیچ دو تا در یک سطر نیستند، ابتدا از دو سطر دو خانه شامل درایه ۵ و سپس از یک سطر دیگر خانه‌ای شامل درایه ۴ انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$\binom{5}{2} \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30$$

۷۳۵ ۳ در مربع لاتین از مرتبه ۷ هریک از اعداد ۱ تا ۷ دقیقاً در هفت خانه ظاهر می‌شوند. برای انتخاب دو خانه که مجموع درایه‌های آن‌ها برابر ۱۰ باشد، از اصل ضرب و سپس از تعمیم اصل جمع استفاده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\binom{7}{1} \binom{7}{1} + \binom{7}{1} \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 49 + 49 + 21 = 119$$

انتخاب دو خانه با عدد ۶ و یک خانه با عدد ۴ و یک خانه با عدد ۳
انتخاب یک خانه با عدد ۷ و یک خانه با عدد ۳

۷۳۶ ۱ راه‌حل اول چون B از اعمال جایگشت

روی درایه‌های A به دست آمده است، پس A نیز از اعمال جایگشت روی درایه‌های B به دست می‌آید. این جایگشت را

روی سه درایه داده شده از B اعمال می‌کنیم و حاصل را در خانه‌های نظیر این سه درایه در A قرار می‌دهیم. بنابراین A به صورت زیر می‌شود:

اکنون از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستون A عدد تکراری وجود ندارد و همه اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر و هر ستون A ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & a \\ 1 & & & b \\ & & & x \\ & & & 5 \\ & & & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a \neq 1, a \neq 2, a \neq 4, a \neq 5 &\Rightarrow a = 3 \\ b \neq 1, b \neq 4, b \neq 5, b \neq a = 3 &\Rightarrow b = 2 \\ x \neq 4, x \neq 5, x \neq a = 3, x \neq b = 2 &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

راه‌حل دوم در ستون پنجم مربع لاتین A باید عدد ۱ ظاهر شود. با توجه به درایه‌های مشخص شده در A و B و نیز جایگشت داده شده، فقط درایه سطر سوم این ستون می‌تواند برابر ۱ باشد. بنابراین $x = 1$.

2	1	3
1	3	2
3	2	1

گزینه ۳ این جدول به صورت زیر قابل گسترش به مربعی لاتین است:

گزینه ۴ هیچ‌یک از خانه‌های سطر سوم را نمی‌توان با عدد ۲ پر کرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

a	b	c
x		

۷۲۵ ۲ فرض کنید سطر اول مربع لاتین به صورت $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ باشد (abc جایگشتی از اعداد ۱، ۲ و ۳ است). با توجه به جدول زیر X برابر b یا c است:

در هریک از دو حالت بقیه خانه‌ها به طور یکتا پر می‌شوند چون هریک از a، b و c در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک بار ظاهر می‌شوند.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

پس دو نوع مربع لاتین 3×3 وجود دارد. اکنون در هریک از این دو نوع مربع باید اعداد ۱، ۲ و ۳ را به جای a، b و c قرار دهیم. این کار را به $3!$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنابر اصل ضرب، تعداد مربع‌های لاتین 3×3 برابر $12 = 2 \times 3!$ است.

۷۲۶ ۴ مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون دلخواه مربع لاتین از مرتبه n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است. چون $\frac{n(n+1)}{2} = 91$ ، پس $n+1 = 14$ ، یعنی $n = 13$.

۷۲۷ ۲ با توجه به جدول زیر می‌توان نوشت

۱	۲	۳	a
b	c	۱	d
e	f	g	h
i	۳	۴	j

$$a \neq 1, a \neq 2, a \neq 3 \Rightarrow a = 4$$

$$g \neq 1, g \neq 3, g \neq 4 \Rightarrow g = 2$$

$$c \neq 1, c \neq 2, c \neq 3 \Rightarrow c = 4$$

$$f \neq 2, f \neq 3, f \neq c = 4 \Rightarrow f = 1$$

$$h \neq a = 4, h \neq f = 1, h \neq g = 2 \Rightarrow h = 3$$

$$d \neq h = 3, d \neq 1, d \neq a = 4 \Rightarrow d = 2$$

به همین صورت نتیجه می‌گیریم $i = 2$ ، $j = 1$ و $e = 4$.

$b = 3$. پس مربع داده شده به طور یکتا به مربعی لاتین گسترش داده می‌شود. این مربع لاتین به صورت مقابل است:

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۷۲۸ ۴ از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستون عدد تکراری نداریم و در هر سطر و هر ستون همه اعداد ۱، ۲ و ۳ ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم

۱	۲	۳
۲	x	a
۳		y

$$a \neq 2, a \neq 3 \Rightarrow a = 1$$

$$x \neq 2, x \neq a = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$y \neq 3, y \neq a = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow x + y = 5$$

۷۲۹ ۲ مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون دلخواه یک مربع لاتین از مرتبه ۴ برابر $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ است. بنابراین $R_1 = C_1 = C_4 = 10$ ، یعنی

$$R_1 + C_1 + C_4 = 10 + 10 + 10 = 30$$

۷۳۰ ۲ چون کمترین مقدار مجموع چهار درایه مشخص شده را می‌خواهیم، پس

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = 1, a_{41} = 2$$

دقت کنید که چون a_{41} و a_{21} در یک ستون قرار دارند، پس هر دو با هم نمی‌توانند برابر ۱ باشند. در نتیجه

$$\min(a_{12} + a_{21} + a_{34} + a_{41}) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

۷۳۱ ۳ در هر مربع لاتین از مرتبه ۴، هریک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ چهار بار ظاهر می‌شوند. پس حاصل ضرب درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبه ۴ برابر با $4^4 \times 3^4 \times 2^4 \times 1^4 = 2^4 \times 3^4 \times 2^4 \times 1^4 = 2^{12} \times 3^4$ است. در نتیجه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که 2^n یک شمارنده این حاصل ضرب باشد، برابر ۱۲ است.

۷۴۱ ۴ به چهار طریق می‌توان این مربع را به یک مربع لاتین گسترش داد.

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳	۴
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۲	۱

۱	۲		
۳	۴	a	b
		۱	
			x

۷۴۲ ۳ می‌توان نوشت
 $a \neq 1, a \neq 3, a \neq 4 \Rightarrow a = 2$
 $b \neq 3, b \neq 4, b \neq a = 2 \Rightarrow b = 1$
 $x \neq b = 1$

جدول‌های زیر نشان می‌دهند که x برابر هریک از مقادیر ۳، ۲ و ۴ می‌تواند باشد.

۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۳	۲

$x = 2$

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳

$x = 3$

۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴

$x = 4$

۷۴۳ ۴ فرض کنید عددهای قرار گرفته در ستون اول این مربع لاتین از بالا به پایین به صورت ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. ستون دوم را به صورت‌های زیر می‌توان کامل کرد:

۱	۲		
۲	۱		
۳	۴		
۴	۳		

۱	۲		
۲	۳		
۳	۴		
۴	۱		

۱	۲		
۲	۴		
۳	۱		
۴	۳		

۱	۳		
۲	۱		
۳	۴		
۴	۲		

۱	۳		
۲	۴		
۳	۱		
۴	۲		

۱	۳		
۲	۴		
۳	۲		
۴	۱		

۱	۴		
۲	۱		
۳	۲		
۴	۳		

۱	۴		
۲	۳		
۳	۱		
۴	۲		

۱	۴		
۲	۳		
۳	۲		
۴	۱		

در واقع تعداد راه‌های پر کردن ستون دوم این مربع لاتین برابر تعداد جایگشت‌هایی از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است که هیچ‌یک از آن‌ها سر جای خود قرار ندارند. با توجه به جدول‌های بالا، تعداد این جایگشت‌ها برابر ۹ است.

	y		
	y		
y	x		
			y
			y
			y

۷۴۴ ۲ در مربع لاتین از مرتبه ۶ هریک از اعداد ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه (یکی از خانه‌های هر سطر و یکی از خانه‌های هر ستون) ظاهر می‌شوند. بنابراین برای حل مسئله، ابتدا دو تا از اعداد ۱ تا ۶ (مثلاً x و y) و سپس یکی از شش خانه شامل x و یکی از چهار خانه شامل y را که با خانه انتخاب

شده در یک سطر یا یک ستون قرار ندارند، انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که از شش خانه شامل y یکی در سطر خانه شامل x و یکی در ستون خانه شامل x قرار دارد. پس به چهار طریق می‌توانیم خانه شامل y را انتخاب کنیم که با خانه شامل x در یک سطر یا یک ستون نباشد. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

انتخاب یک خانه شامل y انتخاب یک خانه شامل x انتخاب y و x

$$\binom{6}{2} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 15 \times 6 \times 4 = 360$$

۷۴۵ ۴ در هر سطر و هر ستون یک مربع لاتین از مرتبه ۶ هریک از عددهای ۱ تا ۶ دقیقاً یک بار می‌آیند. بنابراین برای انتخاب دو خانه از این مربع لاتین که در یک سطر یا یک ستون باشند و تفاضل درایه‌های آن‌ها برابر ۲ باشد، ابتدا یک سطر یا یک ستون را انتخاب می‌کنیم که به ۱۲ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، سپس از سطر یا ستون انتخاب شده یکی از جفت‌های $\{1, 3\}$ ، $\{2, 4\}$ ، $\{3, 5\}$ و $\{4, 6\}$ را برمی‌داریم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه مطلوب برابر $12 \times 4 = 48$ است.

۷۳۷ ۳ به جای عدد ۱ واقع در سطر اول A، در مربع لاتین B عدد x قرار داده شده است. پس برای به دست آوردن B، درایه متناظر به هر درایه ۱ از A برابر x است. در نتیجه درایه سطر سوم و ستون سوم B نیز برابر x است. چون در هیچ سطر و هیچ ستون B عدد تکراری وجود ندارد. در نتیجه $x \neq 1$ ، $x \neq 2$ و $x \neq 4$. بنابراین x باید برابر ۳ باشد.

	x	۲	
B=			
	۴	x	
			۱

۷۳۸ ۴ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) چون در هیچ سطر و هیچ ستون مربع لاتین عدد تکراری وجود ندارد، پس با توجه به جدول مقابل، x نمی‌تواند برابر هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. بنابراین این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱	۲	۳	x
			۴

گزینه (۲) در جدول مقابل عدد ۱ را در هیچ‌یک از خانه‌های سطر چهارم نمی‌توانیم قرار دهیم، زیرا خانه چهارم این سطر با عدد ۲ پر شده است و در هریک از ستون‌های اول، دوم و سوم عدد ۱ ظاهر شده است. پس این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱			
	۱		
x	x	x	۲

گزینه (۳) در جدول مقابل عدد ۱ را در هیچ‌یک از خانه‌های سطر چهارم نمی‌توانیم قرار دهیم، زیرا خانه‌های سوم و چهارم این سطر پر شده‌اند و وجود عدد ۱ در خانه اول یا دوم این سطر باعث ایجاد عدد تکراری در یک ستون می‌شود. پس این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱			
	۱		
x	x	۲	۳

گزینه (۴) این جدول به صورت مقابل قابل گسترش به مربعی لاتین است.

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

۷۳۹ ۳ در جدول گزینه (۳)، در جای خالی سطر اول باید عدد ۳ قرار دهیم. چون درایه سطر چهارم و ستون دوم برابر ۳ است، پس نمی‌توان جای خالی سطر اول را پر کرد. بنابراین این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد. سه جدول دیگر با به صورت زیر می‌توان به مربعی لاتین گسترش داد:

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۱	۲

گزینه (۴)

۱	۲	۴	۳
۲	۱	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

گزینه (۲)

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

گزینه (۱)

۷۴۰ ۴ جدول مقابل را در نظر بگیرید:

۱	۳	۲	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۳	۲	۴	۱	۵
a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

g=۵. پس چهار خانه $\begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix}$ را به دو طریق می‌توانیم پر

کنیم. همچنین c برابر ۱ یا ۳ است. اگر $c=1$ ، آن‌گاه $h=3$ ، $e=2$ ، $d=3$ و $i=2$ و $j=1$ و اگر $c=3$ ، آن‌گاه $h=1$ ، $d=2$ ، $e=1$ ، $i=3$ و $j=2$. پس شش خانه را نیز به دو طریق می‌توانیم پر کنیم. بنابراین طبق اصل ضرب، دو سطر آخر مربع لاتین را به $2 \times 2 = 4$ طریق می‌توانیم پر کنیم. این ۴ طریق به صورت زیر هستند:

۴	۵	۱	۳	۲
۵	۴	۳	۲	۱

۴	۵	۳	۲	۱
۵	۴	۱	۳	۲

۵	۴	۱	۳	۲
۴	۵	۳	۲	۱

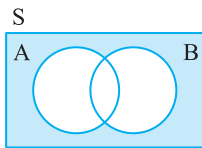
۵	۴	۳	۲	۱
۴	۵	۱	۳	۲

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{مربع لاتین}$$

روی درایه‌های B به دست می‌آید. چون A و B متعامدند، پس A و C نیز متعامد خواهند بود.

فرض کنید S مجموعه همه دانش‌آموزان دبیرستان، A مجموعه دانش‌آموزان کلاس ادبیات و B مجموعه دانش‌آموزان کلاس عربی باشد. در این صورت بنابر اصل شمول و عدم شمول، تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند، برابر است با

$$|A \cap B'| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ = 51 - (35 + 31 - 23) = 8$$



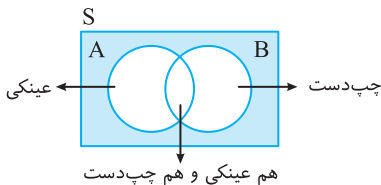
فرض کنید S مجموعه همه افراد این مدرسه، A مجموعه افراد عینکی و B مجموعه افراد چپ‌دست باشد. طبق فرض

$$|S| = 200, \quad |A| = 80, \quad |B| = 40, \quad |A' \cap B'| = 100$$

در نتیجه بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$|S| - |A \cup B| = 100 \Rightarrow |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 100$$

$$200 - 80 - 40 + |A \cap B| = 100 \Rightarrow |A \cap B| = 20$$



معادله سیاله خطی $ax + 3y = 35$ در صورتی جواب دارد که $(a, 3^0)$ ، همچنین می‌دانیم $35 = 5 \times 7$ و $3^0 = 2 \times 3 \times 5$. بنابراین معادله در صورتی جواب دارد که $(a, 3^0)$ برابر ۱ یا ۵ باشد، یعنی a نباید بر هیچ‌یک از اعداد ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد. فرض کنید $A = S = \{1, 2, \dots, 100\}$ مجموعه اعدادی از S باشد که بر ۲ بخش‌پذیرند و B مجموعه اعدادی از S باشد که بر ۳ بخش‌پذیرند. در این صورت $A \cap B$ مجموعه اعدادی از S است که هم بر ۲ و هم بر ۳، یعنی بر ۶ بخش‌پذیرند. اکنون می‌توان نوشت

$$|S| = 100, \quad |A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50, \quad |B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$$

مجموعه اعدادی از S که بر هیچ‌یک از عددهای ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند، برابر $A' \cap B'$ است. در نتیجه بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$|A' \cap B'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 100 - 50 - 33 + 16 = 33$$

فرض کنید S مجموعه همه خودکارهای آرمان باشد. A مجموعه خودکارهایی از S باشد که نوک آبی دارند و B مجموعه خودکارهایی از S باشد که بدنه فلزی دارند. در این صورت طبق فرض $|S| = 44$ ، $|A| = 17$ ، $|B| = 14$ و

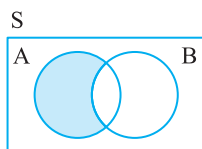
$$|A' \cap B'| = 19$$

$$|A' \cap B'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$19 = 44 - 17 - 14 + |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 6$$

مجموعه خودکارهایی که نوک آبی دارند ولی بدنه فلزی ندارند، برابر $A - B$ است. بنابراین پاسخ برابر است با

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 17 - 6 = 11$$



جایگشت داده شده را روی درایه‌های معلوم A اعمال می‌کنیم. در نتیجه B به صورت زیر درمی‌آید. اکنون از این جدول معلوم است که a برابر ۳، ۱ و ۴ نیست، پس $a = 2$ و پس از آن به وضوح معلوم است که x باید برابر ۱ باشد.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \\ 1 & 4 & \\ & a & 1 \\ & x & \end{pmatrix}$$

چون B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های A به دست آمده است، پس A نیز از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به دست می‌آید. فرض کنید این

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & b & \\ & d & & \\ d & & & \end{pmatrix} \quad \text{باشد. در این صورت}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & & x \\ & & & \\ & & & \\ 3 & & & \end{pmatrix} \quad \text{طبق فرض}$$

در نتیجه $d = 3$ و A به صورت

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & b & x \\ & 3 & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

درمی‌آید. عدد ۳ باید در یکی از خانه‌های سطر دوم A بیاید. این

عدد در خانه اول یا دوم این سطر نمی‌تواند بیاید، زیرا اگر بیاید، در ستون اول یا دوم عدد تکراری ایجاد می‌شود. در ضمن عدد ۳ در خانه سوم سطر دوم قرار ندارد، زیرا $b \neq d = 3$. پس عدد ۳ باید در خانه چهارم سطر دوم قرار گیرد. در نتیجه $x = 3$.

مربع‌های حاصل از کنار هم قرار دادن مربع لاتین A و هر یک از گزینه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
گزینه (۴)	گزینه (۳)	گزینه (۲)	گزینه (۱)

مربع لاتین گزینه (۲) و A متعامدند، زیرا از کنار هم قرار دادن آن‌ها مربعی به دست می‌آید که عدد دورقمی تکراری ندارد.

ابتدا توجه کنید که در جدول مقابل درایه y برابر ۲ است، زیرا عدد ۲ باید در سطر سوم A ظاهر شود. اگر این عدد در یکی از خانه‌های اول، دوم و سوم این سطر ظاهر شود، در ستون مربوطه عدد ۲ تکرار می‌شود که چنین چیزی ممکن نیست. اکنون اگر A و B را کنار یکدیگر قرار دهیم، مربع مقابل حاصل می‌شود. چون A و B متعامدند، در این مربع هیچ عدد دورقمی‌ای نباید تکرار شود. در نتیجه x باید برابر ۲ باشد.

چون A مربع لاتین چرخشی است، پس همه درایه‌های قطر اصلی آن برابر ۱ هستند. در نتیجه درایه‌های قطر اصلی مربع لاتین B همگی باید متمایز باشند، یعنی همه عددهای ۱ تا ۵ را دربردارند. بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی B برابر $\frac{5 \times 6}{2} = 15$ است.

چون A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ هستند، پس با قرار دادن A و B کنار یکدیگر، هر یک از ۲۵ زوج مرتب متشکل از اعداد ۱ تا ۵ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. بنابراین هر یک از زوج‌های مرتب $(1, 4)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 2)$ ، $(4, 1)$ را فقط یک بار خواهیم داشت. پس به چهار طریق می‌توانیم یک خانه از A را انتخاب کنیم که مجموع درایه‌های این خانه و خانه نظیر آن در مربع لاتین B برابر ۵ باشد.