



# هندسه و استدلال

## فصل ۴



در سال‌های چهارم، پنجم و ششم با برخی از مفاهیم و شکل‌های هندسی و خواص آن‌ها مثل خط، نیم‌خط، پاره‌خط، زاویه، توازی، مساحت، تقارن، چندضلعی‌ها و مجموع زوایای آن‌ها و ... آشنا شدید. مبحث هندسه را از امسال تا آخرین سال تحصیل دوره متوسطه دوم در کتاب‌های درسی‌تان می‌بینید؛ پس اگر می‌خواهید از این درس عقب نمانید باید از همین الان که شکل جدی‌تری نسبت به سال‌های قبل به خودش گرفته است، خوب و مفهومی مطالبش را یاد بگیرید تا امسال و البته سال‌های بعد کارتان راحت‌تر پیش برود. این را هم بگوییم که هندسه اصلاً درس سختی نیست و فقط لازم است که برای حل مسائل آن اولاً شکل دقیق داشته باشید و ثانیاً نگاه با حوصله و دقیق‌تر. بسیار شبا پرویم سراغ درس ...

### خط، نیم‌خط، پاره‌خط

در شکل‌های مقابل  $xy$  خط،  $Ax$  و  $Ay$  نیم‌خط و  $AB$  پاره‌خط است.

در واقع با توجه به شکل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر نقطه روی یک خط تشکیل دو نیم‌خط و هر دو نقطه روی یک خط تشکیل یک پاره‌خط می‌دهند. همیشه نقاط دو سر یک پاره‌خط و نقطه ابتدایی یک نیم‌خط را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم؛ هم‌چنین دو طرف یک خط و یک طرف یک نیم‌خط که نقطه انتهایی آن‌ها معلوم نیست را با حروف کوچک انگلیسی نمایش می‌دهیم. (شکل‌ها را ببینید.)  
حالا با توجه به تعریف‌های پاره‌خط و نیم‌خط، می‌خواهیم ببینیم اگر  $n$  نقطه روی یک خط راست قرار بگیرند، چند نیم‌خط و چند پاره‌خط تولید می‌کنند. به جدول زیر توجه کنید:

تعداد نقاط روی خط	شکل	پاره‌خطها و نیم‌خطها	تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطها
۲		پاره‌خط: $AB$ نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By$	تعداد پاره‌خطها: $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ تعداد نیم‌خطها: $2 \times 2 = 4$
۳		پاره‌خط: $AB, AC, BC$ نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy$	تعداد پاره‌خطها: $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ تعداد نیم‌خطها: $2 \times 3 = 6$
۴		پاره‌خط: $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy$	تعداد پاره‌خطها: $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ تعداد نیم‌خطها: $2 \times 4 = 8$
۵		پاره‌خط: $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$ نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy, Ex, Ey$	تعداد پاره‌خطها: $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ تعداد نیم‌خطها: $2 \times 5 = 10$

با توجه به جدول صفحه قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم:  $\div 2$  (یکی کم‌تر از تعداد نقاط روی خط)  $\times$  (تعداد نقاط روی خط) = تعداد پاره‌خط‌های روی یک خط راست

(تعداد نقاط روی خط)  $\times 2$  = تعداد نیم‌خط‌های روی یک خط راست

پس اگر  $n$  نقطه روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن وقت داریم: تعداد نیم‌خط‌ها  $= 2 \times n$  و تعداد پاره‌خط‌ها  $= \frac{n \times (n-1)}{2}$

**تست:** ۲۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌هایی که این ۲۰ نقطه می‌سازند، چه قدر است؟

- ۱۴۰ (۱)      ۱۴۵ (۲)      ۱۵۰ (۳)      ۱۵۵ (۴)

**پاسخ: گزینه ۳** تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها} = \frac{20 \times (20-1)}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \quad \text{و} \quad \text{تعداد نیم‌خط‌ها} = 2 \times 20 = 40$$

$$\Rightarrow 190 - 40 = 150 = \text{اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها}$$

**تست:** تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند. اگر تعداد پاره‌خط‌هایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خط‌هایی باشد که می‌سازند، در

این صورت چند نقطه روی این خط قرار دارند؟

- ۱۱ تا (۱)      ۱۲ تا (۲)      ۱۳ تا (۳)      ۱۴ تا (۴)

**پاسخ: گزینه ۳** فرض کنید  $n$  نقطه روی خط قرار دارند؛ در این صورت تعداد پاره‌خط‌ها برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  و تعداد نیم‌خط‌ها نیز برابر  $2n$  می‌شود؛

در نتیجه چون تعداد پاره‌خط‌ها سه برابر تعداد نیم‌خط‌ها است، باید داشته باشیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 3 \times 2n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 6n \xrightarrow{(\times 2)} n(n-1) = 12n \xrightarrow{(+n)} n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

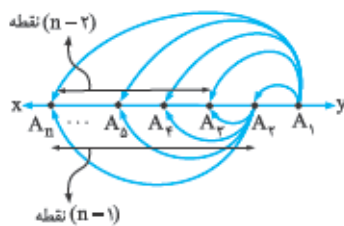
بنابراین تعداد نقاط روی خط ۱۳ است.

**تست:** تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند، اگر دو تا از این نقاط را برداریم، ۲۳ پاره‌خط از تعداد کل پاره‌خط‌ها کم می‌شود. در ابتدا چند

پاره‌خط روی این خط وجود داشته است؟

- ۶۶ تا (۱)      ۹۱ تا (۲)      ۸۴ تا (۳)      ۷۸ تا (۴)

**پاسخ: گزینه ۴** فرض کنید  $n$  نقطه  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  روی یک خط راست قرار دارند.



همان‌طور که در شکل می‌بینید  $A_1$  به  $n-1$  نقطه و  $A_2$  نیز به  $n-2$  نقطه (به جز  $A_1$ ) وصل‌اند؛ پس اگر  $A_1$  را حذف کنیم،  $n-1$  پاره‌خط و اگر  $A_2$  را حذف کنیم  $n-2$  پاره‌خط دیگر حذف می‌شوند؛ پس باید داشته باشیم:

$$(n-1) + (n-2) = 23 \Rightarrow 2n - 3 = 23 \Rightarrow 2n = 26 \Rightarrow n = 13$$

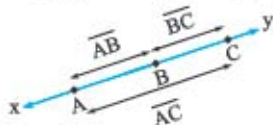
$$\Rightarrow \text{تعداد کل پاره‌خط‌های اولیه} = \frac{13 \times (13-1)}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

### طول پاره‌خط

فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$  را طول پاره‌خط  $AB$  می‌نامند و آن را با نماد  $\overline{AB}$  نمایش می‌دهند؛ مثلاً اگر فاصله نقطه  $A$  و نقطه  $B$  روی خطی راست

مانند  $xy$  برابر ۷ سانتی‌متر باشد، آن وقت می‌نویسیم  $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$ .

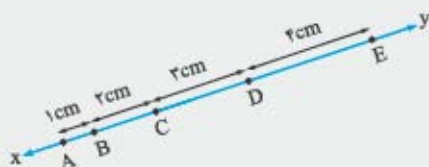
**توجه:** مطابق شکل روبه‌رو اگر A، B و C سه نقطه روی یک خط راست باشند، آن وقت روابط زیر همیشه برقرارند:



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Rightarrow \begin{cases} \text{۱) } \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \\ \text{۲) } \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} \end{cases}$$



**مثال:** با توجه به شکل زیر، حاصل جمع طول همه پاره‌خط‌ها را به دست آورید.



**پاسخ:** تمام پاره‌خط‌ها را تعیین کرده و طول آن‌ها را می‌یابیم؛ سپس همه طول‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm}, \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 1 + 2 = 3 \text{ cm}, \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 3 + 3 = 6 \text{ cm}, \overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 2 \text{ cm}, \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2 + 3 = 5 \text{ cm}, \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 5 + 4 = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 3 \text{ cm}, \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = 3 + 4 = 7 \text{ cm}$$

$$\overline{DE} = 4 \text{ cm}$$

پس حاصل جمع طول همه پاره‌خط‌ها برابر است با:

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{BE} + \overline{CD} + \overline{CE} + \overline{DE} = 1 + 3 + 6 + 10 + 2 + 5 + 9 + 3 + 7 + 4 = 50$$



**تست:** در شکل مقابل C وسط AB، D وسط AC و E وسط AD است. کدام گزینه صحیح نیست؟

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}}{4} \quad (۲)$$

$$۲\overline{AE} + \overline{CD} = \overline{BC} \quad (۱)$$

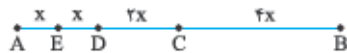
$$\overline{BE} = \frac{۵}{۶}\overline{AB} \quad (۴)$$

$$\frac{\overline{BC}}{۲} + \overline{AE} = \frac{۳}{۴}\overline{AC} \quad (۳)$$

**پاسخ:** گزینه ۴ فرض کنید  $\overline{AE} = x$  در این صورت چون E وسط AD است، پس  $\overline{AE} = \overline{ED}$  و بنابراین  $\overline{ED} = x$ .

حالا دوباره چون D وسط AC است، پس  $\overline{AD} = \overline{CD}$ ، اما دقت کنید که  $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = x + x = ۲x$  پس  $\overline{CD} = ۲x$  و نهایتاً چون C وسط

$\overline{AB}$  است، پس  $\overline{AC} = \overline{BC}$  و در نتیجه چون  $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = ۲x + ۲x = ۴x$ ، بنابراین  $\overline{BC} = ۴x$ . حالا تمام گزینه‌ها را چک می‌کنیم:



۱)  $۲\overline{AE} = ۲x, \overline{CD} = ۲x \Rightarrow ۲\overline{AE} + \overline{CD} = ۲x + ۲x = ۴x = \overline{BC} \checkmark$

۲)  $\frac{\overline{AB}}{۴} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{۴} = \frac{۴x + ۴x}{۴} = \frac{۸x}{۴} = ۲x = \overline{CD} \checkmark$

۳)  $\frac{\overline{BC}}{۲} = \frac{۴x}{۲} = ۲x, \overline{AE} = x \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{۲} + \overline{AE} = ۲x + x = ۳x = \frac{۳}{۴} \times ۴x = \frac{۳}{۴}\overline{AC} \checkmark$

۴)  $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = ۴x + ۳x = ۷x, \frac{۵}{۶}\overline{AB} = \frac{۵}{۶} \times ۸x = \frac{۲۰}{۳}x \Rightarrow ۷x \neq \frac{۲۰}{۳}x \times$

پس رابطه گزینه (۴) غلط است و در نتیجه جواب مسئله همین گزینه است.





**تست:** در شکل مقابل، اگر  $\frac{AD}{EB} = \frac{4}{3}$ ،  $\frac{CE}{BD} = 2$ ،  $ED = 10$  و  $AC = 2$ ، آن وقت  $\overline{AB} - \overline{CE}$  کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

**پاسخ: گزینه ۱** چون  $\frac{CE}{BD} = 2$  پس  $\overline{CE}$  دو برابر  $\overline{BD}$  است؛ یعنی اگر فرض کنیم  $\overline{BD} = x$ ، آن وقت  $\overline{CE} = 2x$ . حالا با توجه به شکل داریم:

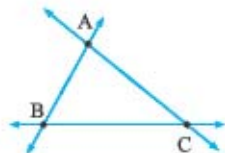


$$\frac{AD}{EB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AC + CE + ED}{ED + DB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 + 2x + 10}{10 + x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{12 + 2x}{10 + x} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(12 + 2x) = 4(10 + x)$$

$$\Rightarrow 36 + 6x = 40 + 4x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \overline{CE} = 2x = 2 \times 2 = 4, \overline{DB} = x = 2$$

حالا با توجه به شکل چون  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CE} + \overline{ED} + \overline{DB}$  پس داریم:  $\overline{AB} - \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{ED} + \overline{DB} = 2 + 10 + 2 = 14$

### شرط وجود مثلث



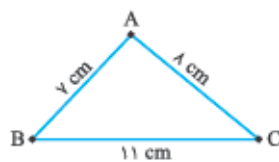
دیدیم که اگر C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB (بین دو نقطه A و B) باشد، آن وقت تساوی  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$  برقرار است، اما اگر نقاط A، B و C همگی روی یک خط قرار نداشته باشند، آن وقت اولاً A، B و C می‌توانند تشکیل یک مثلث بدهند و ثانیاً در مثلث به وجود آمده مجموع طول هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ یعنی با توجه به شکل مقابل داریم:

①  $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$

②  $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$

③  $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

توجه کنید که برای ساختن یک مثلث باید هر سه شرط بالا برقرار باشند؛ یعنی اگر حتی یکی از آن‌ها هم برقرار نباشد، مثلثی به وجود نمی‌آید؛ مثلاً مثلثی وجود ندارد که طول اضلاع آن ۵، ۶/۵ و ۱۲ باشد؛ چون درست است که  $۱۲ + ۵ > ۶/۵$  و  $۱۲ + ۶/۵ > ۵$ ، اما  $۵ + ۶/۵ = ۱۱/۵$



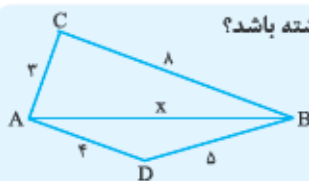
است و ۱۱/۵ هم از ۱۲ بزرگ‌تر نیست؛ یعنی شرط  $۵ + ۶/۵ > ۱۲$  برقرار نیست؛ پس چنین مثلثی وجود ندارد؛ اما اگر سه پاره‌خط داشته باشیم که طول آن‌ها اعداد ۷، ۸ و ۱۱ باشند، آن وقت می‌توانیم توسط این سه پاره‌خط مثلث بسازیم؛ چون هر سه رابطه بالا برقرار می‌شوند:

①  $\frac{8 + 7}{15} > 11 \checkmark$

②  $\frac{8 + 11}{19} > 7 \checkmark$

③  $\frac{11 + 7}{18} > 8 \checkmark$

**تست:** با توجه به شکل مقابل، اگر طول AB برابر عددی صحیح باشد، آن وقت چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

**پاسخ: گزینه ۲** دقت کنید اگر فرض کنیم  $\overline{AB} = x$ ، آن وقت با توجه به شرط وجود مثلث باید داشته باشیم:

$$\triangle ABD: \overline{AB} < \overline{AD} + \overline{BD} \Rightarrow x < 4 + 5 \Rightarrow x < 9 \quad (1) \quad \triangle ABC: \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC} \Rightarrow 3 + x > 8 \Rightarrow x > 5 \quad (2)$$

پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که x باید از ۹ کوچک‌تر و از ۵ بزرگ‌تر باشد؛ در نتیجه چون x صحیح است، پس می‌تواند برابر یکی از مقادیر ۶، ۷ و ۸ باشد. البته باز هم باید چک شود که اگر x برابر هر کدام از مقادیر ۶، ۷ یا ۸ باشد، هر سه شرط وجود مثلث برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند یا نه، که اگر به جای x هر یک از مقادیر ۶، ۷ یا ۸ را قرار دهیم، می‌بینیم که هر سه شرط برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند، پس طول  $\overline{AB}$  سه مقدار صحیح می‌پذیرد و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

یک بار دیگر مثال قبل را ببینید. شاید این سؤال در ذهنتان ایجاد شود که روابط (۱) و (۲) از کجا آمدند؟ جواب سؤال این است که فرمول یا روش خاصی برای نوشتن این رابطه‌ها نداریم؛ بلکه با توجه به مثلث‌ها چندتا نامساوی می‌نویسیم و بعد از بین آن‌ها بهترین‌ها را انتخاب کرده و به کمک آن‌ها مسئله را حل می‌کنیم. در این مسئله دو نامساوی که نوشتیم از بقیه نامساوی‌ها به‌دردبخورتر بودند.

تست: چند مثلث با محیط ۱۰ و طول اضلاع صحیح می توان ساخت؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

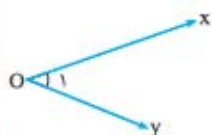
پاسخ: گزینه ۲ با توجه به جدول زیر، حالت‌های مختلف طول اضلاع را نوشته و آن‌هایی که قابل قبول اند را انتخاب می‌کنیم:

حالت‌های مختلف طول دو ضلع دیگر	مجموع طول دو ضلع دیگر (محیط = ۱۰)	طول کوچک‌ترین ضلع
$(۵, ۴) \times$ $(۶, ۳) \times$ $(۷, ۲) \times$ $(۸, ۱) \times$ $۴+۱ > ۵$ $۳+۱ > ۶$ $۲+۱ > ۷$ $۱+۱ > ۸$	۹	۱
$(۴, ۴) \checkmark$ $(۳, ۵) \times$ $(۲, ۶) \times$ $۲+۳ > ۵$ $۲+۲ > ۶$	۸	۲
$(۴, ۳) \checkmark$	۷	۳

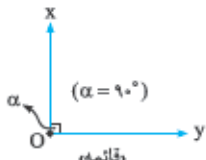
دقت کنید که طول کوچک‌ترین ضلع نمی‌تواند برابر ۴ یا مقداری بیشتر از ۴ باشد؛ چون در این صورت محیط مثلث حداقل برابر ۱۲ واحد می‌شود؛ مثل  $(۴, ۴, ۴)$ ، در حالی که ما به دنبال مثلث‌هایی با محیط ۱۰ هستیم؛ بنابراین با توجه به جدول تنها دو مثلث وجود دارند که محیط آن‌ها برابر ۱۰ و طول اضلاع آن‌ها نیز صحیح است.

### زاویه

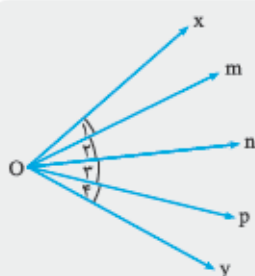
با مفهوم زاویه در سال چهارم آشنا شدید. در این‌جا اول به یادآوری نکات و تعریف‌های زاویه می‌پردازیم و بعد می‌رویم سراغ مطالب پیشرفته‌تر در مورد زاویه‌ها.



در شکل بالا زاویه  $xOy$  را می‌بینید. این زاویه را می‌توان به صورت‌های  $y\hat{O}x$ ،  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}$  نمایش داد. زاویه بزرگ‌تر از  $90^\circ$  و کوچک‌تر از  $90^\circ$  را زاویه تند، زاویه  $90^\circ$  را زاویه قائمه، زاویه بزرگ‌تر از  $90^\circ$  و کوچک‌تر از  $180^\circ$  را زاویه منفرجه و نهایتاً زاویه  $180^\circ$  را زاویه نیم‌صفحه می‌نامند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



در همین ابتدا، شاید بد نباشد که مسئله‌های تیزهوشانی که از همین مطالب ساده در آزمون‌ها مطرح می‌شوند را بررسی کنیم، مثال زیر را ببینید:



مثال: در شکل مقابل، زاویه  $xOy$  توسط چند نیم‌خط به تعدادی زاویه تقسیم شده است. اگر  $x\hat{O}y < 90^\circ$ .

آن وقت تعداد کل زوایای تند شکل چندتا است؟

پاسخ: دقت کنید که در شکل  $x\hat{O}y$  از همه زوایای دیگر بزرگ‌تر است؛ پس چون  $x\hat{O}y < 90^\circ$ ، نتیجه می‌گیریم مابقی زاویه‌ها هم کمتر از  $90^\circ$  هستند؛ یعنی تند هستند، بنابراین زاویه‌های حاده شکل عبارت‌اند از:

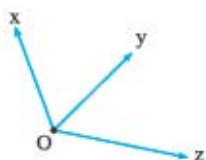
$y\hat{O}p$ ,  $y\hat{O}n$ ,  $y\hat{O}m$ ,  $y\hat{O}x$ ,  $p\hat{O}n$ ,  $p\hat{O}m$ ,  $p\hat{O}x$ ,  $n\hat{O}m$ ,  $n\hat{O}x$ ,  $m\hat{O}x$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۱۰ تا است.

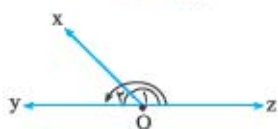
**نکته:** به کمک راهبرد الگوسازی، می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک زاویه تند به  $n$  قسمت تقسیم شود، آن وقت تعداد کل زاویه‌های تند ایجاد شده برابر می‌شود با  $\frac{n \times (n+1)}{2}$ ، مثلاً در مثال قبل چون  $x\hat{O}y$  به ۴ قسمت تقسیم شده بود، تعداد کل زوایا برابر  $10 = \frac{4 \times 5}{2}$  تا شد.

### حالت‌های مختلف دو زاویه

دو زاویه می‌توانند نسبت به هم حالت‌های مختلفی داشته باشند که در زیر به معرفی این حالت‌ها می‌پردازیم:

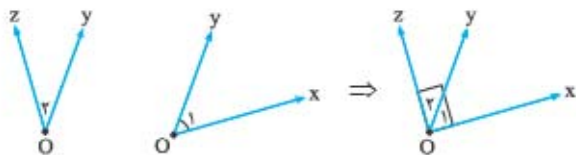


① **دو زاویه مجاور:** دو زاویه‌ای که دارای رأس مشترک و یک ضلع مشترک باشند را دو زاویه مجاور می‌نامیم؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، دو زاویه  $x\hat{O}y$  و  $y\hat{O}z$  مجاورند.



② **دو زاویه مجانب:** دو زاویه‌ای که در کنار هم تشکیل زاویه نیم‌صفحه می‌دهند را دو زاویه مجانب می‌نامیم؛ مثلاً در شکل مقابل چون  $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$ ، پس  $x\hat{O}y$  و  $x\hat{O}z$  مجانب‌اند.

③ **دو زاویه متمم:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر  $90^\circ$  باشد را دو زاویه متمم می‌نامیم؛ مثلاً در شکل‌های زیر، چون  $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ ، پس دو زاویه  $x\hat{O}y$  و  $y\hat{O}z$  متمم یکدیگرند.



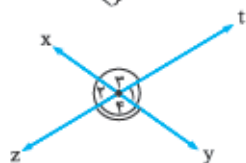
**توجه:** متمم زاویه حاده  $x$  برابر  $(90 - x)^\circ$  است؛ مثلاً متمم زاویه  $20^\circ$  برابر  $90 - 20 = 70^\circ$  می‌باشد.

④ **دو زاویه مکمل:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر  $180^\circ$  باشد را دو زاویه مکمل می‌نامیم؛ مثلاً در شکل زیر، چون  $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$ ، پس  $x\hat{O}y$  و  $y\hat{O}z$  مکمل یکدیگرند.



**نتیجه:** چون دو زاویه مجانب تشکیل زاویه نیم‌صفحه می‌دهند، پس مجموع آن‌ها برابر  $180^\circ$  است و نتیجه آن‌که دو زاویه مجانب همواره مکمل‌اند.

**توجه:** مکمل زاویه  $x$  ( $0^\circ < x < 180^\circ$ ) برابر  $(180 - x)^\circ$  است؛ مثلاً مکمل زاویه  $96^\circ$  برابر  $180 - 96 = 84^\circ$  است.

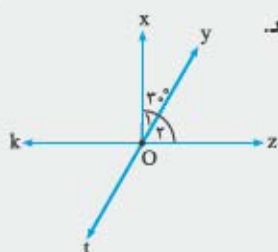


⑤ **دو زاویه متقابل به رأس:** دو زاویه‌ای که یک رأس آن‌ها مشترک و اضلاع آن‌ها در امتداد یکدیگر باشند را متقابل به رأس می‌نامیم. در واقع از برخورد دو خط راست، چهار زاویه درست می‌شود که زوایای مقابل، متقابل به رأس هستند؛ مثلاً در شکل مقابل، دو زاویه  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  و همچنین دو زاویه  $\hat{O}_3$  و  $\hat{O}_4$  متقابل به رأس‌اند.

**توجه:** اندازه دو زاویه متقابل به رأس با هم برابر است. (چرا؟)  
 با توجه به شکل بالا دو زاویه  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  مجانب‌اند؛ همچنین دو زاویه  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_3$  نیز مجانب‌اند، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - \hat{O}_2 \\ \hat{O}_1 + \hat{O}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - \hat{O}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3$$





مثال: با توجه به شکل، اگر دو زاویه  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  متمم باشند، آن وقت اندازه زوایای خواسته شده را به دست آورید.

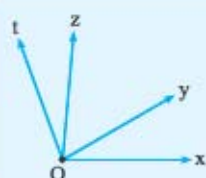
الف)  $y\hat{O}z$

ب)  $z\hat{O}t$

پ)  $x\hat{O}k$

ت)  $t\hat{O}k$

پاسخ: چون  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  متمم اند، پس  $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$  و چون  $\hat{O}_1 = 30^\circ$ ، بنابراین  $\hat{O}_2 = 60^\circ$ ، یعنی  $y\hat{O}z = 60^\circ$ . حالا دقت کنید که دو زاویه  $y\hat{O}z$  و  $z\hat{O}t$  مجانباند؛ پس این دو زاویه مکمل اند؛ یعنی داریم  $y\hat{O}z + z\hat{O}t = 180^\circ$  و چون  $y\hat{O}z = 60^\circ$ ، بنابراین  $z\hat{O}t = 120^\circ$ . حالا دقت کنید که گفتیم  $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ ، یعنی  $x\hat{O}z = 90^\circ$ ، پس دوباره با توجه به شکل، چون  $x\hat{O}z$  تشکیل زاویه نیم صفحه می دهند، داریم  $x\hat{O}k = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . نهایتاً چون دو زاویه  $y\hat{O}z$  و  $t\hat{O}k$  متقابل به رأس اند، پس  $t\hat{O}k = y\hat{O}z$ ، یعنی  $t\hat{O}k = 60^\circ$ .



تست: در شکل مقابل، داریم:  $x\hat{O}z = 85^\circ$ ،  $t\hat{O}y = 8^\circ$  و  $x\hat{O}t = 11^\circ$ . اندازه زاویه  $z\hat{O}y$  کدام است؟

۳۵° (۲)

۲۵° (۱)

۵۵° (۴)

۴۵° (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل و اندازه زوایا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x\hat{O}z = 85^\circ \Rightarrow x\hat{O}y + y\hat{O}z = 85^\circ \\ t\hat{O}y = 8^\circ \Rightarrow t\hat{O}z + z\hat{O}y = 8^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \underbrace{x\hat{O}y + y\hat{O}z + t\hat{O}z + z\hat{O}y}_{x\hat{O}t} = 8^\circ + 85^\circ \Rightarrow x\hat{O}t + z\hat{O}y = 165^\circ$$

$$\Rightarrow 11^\circ + z\hat{O}y = 165^\circ \Rightarrow z\hat{O}y = 55^\circ$$

تست: اگر  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  دو زاویه مکمل باشند، به طوری که  $\hat{A}$  از ۲ برابر  $\hat{B}$  به اندازه  $6^\circ$  کم تر باشد، آن وقت متمم زاویه  $\hat{B}$  کدام است؟

۴۰° (۴)

۳۰° (۳)

۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  مکمل اند، پس  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ . از طرف دیگر چون  $\hat{A}$  از ۲ برابر  $\hat{B}$  به اندازه  $6^\circ$  کم تر است، پس باید داشته باشیم  $\hat{A} = 2\hat{B} - 6^\circ$ ، بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{A} = 2\hat{B} - 6^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{2\hat{B} - 6^\circ + \hat{B}}_{\hat{A}} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{B} = 240^\circ \xrightarrow{(+3)} \hat{B} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B}_{\text{متمم}} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$$

تست: حاصل جمع سه زاویه  $A$ ،  $B$  و  $C$  به اندازه  $30^\circ$  از زاویه نیم صفحه بیشتر است. اگر  $\hat{B}$  به اندازه  $30^\circ$  از متمم  $\hat{A}$  بیشتر باشد و  $\hat{C}$  نیز به اندازه  $10^\circ$  از مکمل  $\hat{B}$  کم تر باشد، آن وقت حاصل جمع متمم  $\hat{A}$ ، مکمل  $\hat{B}$  و  $20^\circ$  درجه بیشتر از مکمل  $\hat{C}$  کدام است؟

۲۱۰° (۴)

۲۲۰° (۳)

۲۳۰° (۲)

۲۶۰° (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون  $\hat{B}$ ،  $30^\circ$  از متمم  $\hat{A}$  بیشتر است، پس باید داشته باشیم:

$$\hat{B} = \underbrace{(90^\circ - \hat{A})}_{\text{متمم } \hat{A}} + 30^\circ = 120^\circ - \hat{A} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون  $\hat{C}$  به اندازه  $10^\circ$  از مکمل  $\hat{B}$  کم تر است، پس داریم:

$$\hat{C} = (180^\circ - \hat{B}) - 10^\circ \Rightarrow \hat{C} = 170^\circ - \hat{B} \xrightarrow{(1)} \hat{C} = 170^\circ - (120^\circ - \hat{A}) = 170^\circ - 120^\circ + \hat{A} \Rightarrow \hat{C} = 50^\circ + \hat{A} \quad (2)$$

حالا چون زاویه نیم صفحه برابر  $180^\circ$  است، پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ + 30^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{120^\circ - \hat{A}}_{\hat{B}} + \underbrace{50^\circ + \hat{A}}_{\hat{C}} = 210^\circ \Rightarrow 170^\circ + \hat{A} = 210^\circ \Rightarrow \hat{A} = 40^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ \\ \hat{C} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A}_{\text{متمم}} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

پس با توجه به اندازه های  $\hat{B}$ ،  $\hat{A}$  و  $\hat{C}$  داریم:

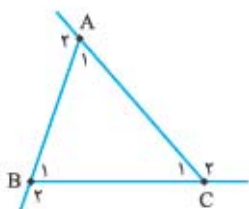
$$\hat{B}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{C}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{C}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - (180^\circ - \hat{C}) = \cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ} + \hat{C} = \hat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{\text{مکمل}} = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع مورد نظر}} 50 + 100 + 110 = 260$$

### زوایای مثلث



هر مثلث سه زاویه داخلی و سه زاویه خارجی دارد. در شکل مقابل، زاویه های  $\hat{A}_1$ ،  $\hat{B}_1$ ،  $\hat{C}_1$  زوایای داخلی و زاویه های  $\hat{A}_2$ ،  $\hat{B}_2$ ،  $\hat{C}_2$  نیز زوایای خارجی هستند.

در هر مثلث دلخواه  $ABC$  روابط زیر همواره برقرارند:

① مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر  $180^\circ$  است؛ یعنی  $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$ .

② هر زاویه خارجی مکمل زاویه داخلی اش است؛ یعنی:

الف)  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$       ب)  $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$       پ)  $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$

③ هر زاویه خارجی برابر حاصل جمع دو زاویه داخلی غیر مجاورش است؛ یعنی:

الف)  $\hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$       ب)  $\hat{B}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$       پ)  $\hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1$

اما چرا هر زاویه داخلی برابر حاصل جمع دو زاویه داخلی غیر مجاورش است؟ رابطه اول را اثبات می کنیم. با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ &\Rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ &\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

**تست:** اندازه سه زاویه مثلثی با اعداد ۳، ۷ و ۸ متناسب اند. اندازه بزرگ ترین زاویه خارجی این مثلث چه قدر است؟

- ۱)  $150^\circ$       ۲)  $120^\circ$       ۳)  $110^\circ$       ۴)  $170^\circ$

**پاسخ: گزینه ۱** فرض کنید زوایای این مثلث به ترتیب  $3x$ ،  $7x$  و  $8x$  درجه هستند؛ در این صورت باید داشته باشیم:

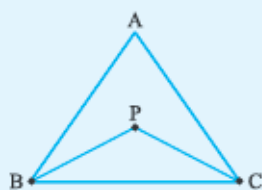
$$3x + 7x + 8x = 180^\circ \Rightarrow 18x = 180^\circ \xrightarrow{(+18)} x = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زوایا: } 3x = 3 \times 10^\circ = 30^\circ, 7x = 7 \times 10^\circ = 70^\circ, 8x = 8 \times 10^\circ = 80^\circ$$

حالا دقت کنید که کوچک ترین زاویه داخلی، بزرگ ترین زاویه خارجی را دارد. پس با توجه به زاویه ها، بزرگ ترین زاویه خارجی مثلث برابر

$$\text{است با } 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

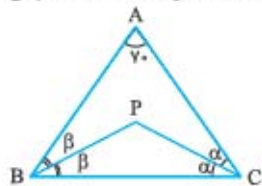
**تست:** در شکل زیر، اندازه زاویه  $BAC$  برابر  $70^\circ$  است. اندازه زاویه  $BPC$  چه قدر است؟ (PB و PC به ترتیب نیمسازهای زاویه های  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  هستند.)



- ۱)  $105^\circ$   
۲)  $115^\circ$   
۳)  $125^\circ$   
۴)  $135^\circ$



**پاسخ: گزینه ۳** چون  $PC$  نیمساز زاویه  $C$  است، پس فرض می‌کنیم  $\hat{ACP} = \hat{PCB} = \alpha$ ، به همین ترتیب چون  $PB$  نیمساز  $\hat{ABC}$  است، پس فرض می‌کنیم  $\hat{ABP} = \hat{PBC} = \beta$ .



حالا توجه کنید که چون  $\hat{A}$  در مثلث  $ABC$  برابر  $70^\circ$  است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 110^\circ \xrightarrow{(+2)} \alpha + \beta = 55^\circ$$

اکنون مثلث  $PBC$  را ببینید. در این مثلث داریم:

$$\hat{PBC} + \hat{BCP} + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow 55^\circ + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BPC} = 125^\circ$$

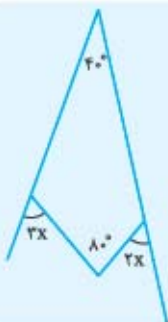
**تست:** با توجه به شکل مقابل، اندازه زاویه  $x$  برابر است با .....

(۱)  $24^\circ$

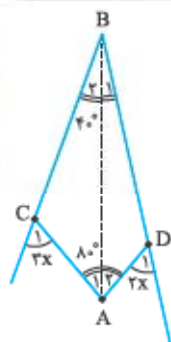
(۲)  $36^\circ$

(۳)  $12^\circ$

(۴)  $18^\circ$



**پاسخ: گزینه ۱** به شکل مقابل دقت کنید. اگر از  $A$  به  $B$  وصل کنیم، آن وقت دو مثلث  $ABC$  و  $ABD$  به وجود می‌آیند که به ترتیب  $\hat{D}_1$  و  $\hat{C}_1$  زوایای خارجی آن‌ها هستند؛ پس چون هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش است، نتیجه می‌گیریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD: \hat{D}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 \\ \triangle ABC: \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = (\hat{B}_1 + \hat{B}_1) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_1) = \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 2x = 120^\circ \Rightarrow 5x = 120^\circ \xrightarrow{(+5)} x = 24^\circ$$

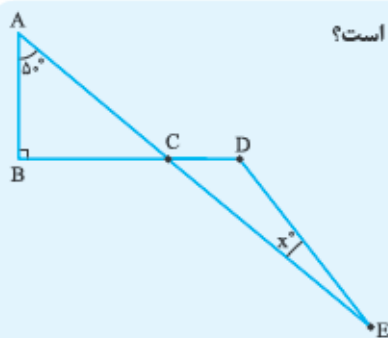
**تست:** در شکل مقابل، نصف مکمل زاویه  $D$  از دو برابر متمم زاویه  $A$ ،  $55^\circ$  کم‌تر است. مقدار  $x$  کدام است؟

(۱)  $10^\circ$

(۲)  $20^\circ$

(۳)  $30^\circ$

(۴)  $40^\circ$



**پاسخ: گزینه ۱** اول دقت کنید که چون  $\hat{C}_1$  و  $\hat{C}_2$  متقابل به رأس هستند، پس  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ . در مثلث  $ABC$  نیز داریم:

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) \Rightarrow \hat{C}_1 = 40^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 40^\circ$$

حالا چون دو برابر متمم  $\hat{A}$ ، برابر  $2 \times (90^\circ - 55^\circ) = 80^\circ$  باشد، پس نصف مکمل  $\hat{D}$  باید برابر  $80^\circ - 55^\circ = 25^\circ$  باشد؛ پس نتیجه می‌گیریم که:

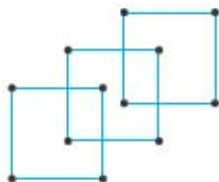
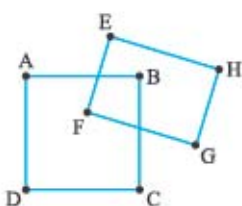
$$\frac{180^\circ - \hat{D}}{2} = 25^\circ \xrightarrow{(+2)} 180^\circ - \hat{D} = 50^\circ \Rightarrow \hat{D} = 130^\circ \Rightarrow \triangle CDE: \hat{E} = x = 180^\circ - (\hat{C}_2 + \hat{D}) = 180^\circ - (40^\circ + 130^\circ) = 10^\circ$$

# سوالات چهارگزینه‌ای

## تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطها



- ۱- در شکل روبه‌رو چند نیم‌خط موجود است؟  
 ۱۵ (۱)      ۱۷ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۴ (۴)
- ۲- اگر روی خطی پنج نقطه قرار داشته باشد، آن وقت تعداد پاره‌خطها برابر است با .....  
 ۱۰ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)
- ۳- چند نقطه روی یک خط تشکیل ۲۰ نیم‌خط می‌دهند. این نقاط تشکیل چند پاره‌خط می‌دهند؟  
 ۵۰ (۱)      ۴۵ (۲)      ۱۹۰ (۳)      ۴۰ (۴)
- ۴- روی خطی ۹۶ نقطه قرار دارند. اگر چپ‌ترین نقطه و راست‌ترین نقطه روی خط را حذف کنیم، چند پاره‌خط حذف می‌شوند؟  
 ۱ تا ۱۹۲ (۱)      ۲ تا ۱۹۱ (۲)      ۳ تا ۱۹۰ (۳)      ۴ تا ۱۸۹ (۴)
- ۵- تعدادی نقطه روی یک خط مشخص می‌کنیم. اگر تعداد پاره‌خطهایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خطها باشد، با قراردادن سه نقطه بیشتر از دو برابر این نقاط روی یک خط، چند نیم‌خط به دست می‌آید؟  
 ۱ تا ۵۶ (۱)      ۲ تا ۵۸ (۲)      ۳ تا ۶۰ (۳)      ۴ تا ۶۲ (۴)
- ۶- چند نقطه روی یک خط قرار دارند، به طوری که اختلاف تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطهایی که ایجاد می‌کنند، پنج برابر تعداد این نقاط است. اگر یک نقطه به این نقاط اضافه کنیم، چند پاره‌خط جدید تولید می‌شود؟  
 ۱۴ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۶ (۳)      ۱۷ (۴)
- ۷- روی خطی ۱۶ نقطه موجود است. اگر دو نقطه به این نقاط اضافه کنیم، به تعداد کل پاره‌خطها X تا اضافه می‌شود. از این ۱۶ نقطه چند نقطه برداریم تا تعداد پاره‌خطهای حذف‌شده از دو برابر یکی کم‌تر شود؟  
 ۷ (۱)      ۶ (۲)      ۵ (۳)      ۴ (۴)
- ۸- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟  
 ۱۴ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۶ (۳)      ۱۷ (۴)
- ۹- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟  
 ۲۰ (۱)      ۲۴ (۲)      ۲۸ (۳)      ۳۲ (۴)
- ۱۰- تعداد پاره‌خطهای موجود در شکل مقابل برابر است با .....  
 ۵۴ (۱)      ۵۵ (۲)      ۵۶ (۳)      ۵۷ (۴)



## طول پاره خط

(سیزدهمین دوره مسابقات علمی اصفهان ۹۴-۹۳)



۱۱- پاره خط AB به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. کدام گزینه نادرست است؟

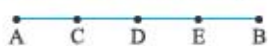
$$\overline{AC} = \frac{1}{6}\overline{AB} \quad (۳)$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{DB} \quad (۱)$$

$$\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{AB} \quad (۴)$$

$$\overline{AF} = ۴\overline{DE} \quad (۳)$$

(پیشرفت تفهیمی یزد ۹۴-۹۵)



$$\overline{CB} = \frac{2}{3}\overline{DB} \quad (۳)$$

$$\overline{AE} = ۳\overline{AC} \quad (۱)$$

$$\overline{EB} = \frac{1}{4}\overline{AB} \quad (۴)$$

$$(\overline{AD} - \overline{CD}) + \overline{CE} = \overline{AE} \quad (۳)$$

۱۲- با توجه به شکل، چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟ (پاره خط AF به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است.) (پیشرفت تفهیمی سمنان ۹۵)



$$\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AE} - \overline{DE} \quad (ب)$$

$$\overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{BF} \quad (الف)$$

$$\frac{2}{3}\overline{BE} = \frac{2}{5}\overline{AF} \quad (پ)$$

صفر (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱۴- در شکل زیر طول پاره خط‌های کوچک با هم برابر است. در این شکل اندازه پاره خط AC برابر  $۲\overline{AB}$  است. اندازه چند پاره خط دیگر برابر  $۲\overline{AB}$  است؟

(آزمون پیشرفت تفهیمی اصفهان ۹۵-۹۴)



۳ (۲)

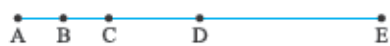
۴ (۱)

۵ (۴)

۶ (۳)

۱۵- در شکل زیر، نقطه D وسط پاره خط AE و نقطه C وسط AD و نقطه B وسط AC است. اگر  $\overline{AE} = ۱۶ \text{ cm}$ ، مجموع طول همه پاره خط‌های موجود در شکل چند سانتی متر است؟

(المپیاد ریاضی فراسان ۹۵)



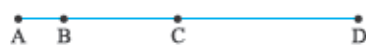
۶۸ (۲)

۷۶ (۱)

۸۰ (۴)

۷۲ (۳)

(آفریقای بنوبی مرحله دوم)



$\frac{5}{6}$  (۳)

$\frac{3}{5}$  (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۵)

$\frac{4}{5}$  (۴)

۱۷- نقطه‌های A، B، C و D روی یک خط راست قرار دارند و  $\overline{AB} = ۱۰$ ،  $\overline{AC} = ۳$ ،  $\overline{BD} = ۵$  و  $\overline{CD} = ۸$ . طول پاره خط BC چه قدر است؟

(المپیاد هندسه ایران ۹۵)

۸ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

۱۸ (۵)

۱۳ (۴)

۱۸- نقاط A، B، C و D روی یک خط راست طوری قرار گرفتند که  $\overline{AB} = ۱۳$ ،  $\overline{BC} = ۱۱$ ،  $\overline{CD} = ۱۴$  و  $\overline{DA} = ۱۲$ . فاصله بین دورترین نقطه‌ها کدام است؟

(کاتگورو)

۵۰ (۳)

۳۸ (۲)

۱۴ (۱)

هیچ کدام (۵)

۲۵ (۴)

۱۹- چهار نقطه A، B، C و D روی خطی قرار دارند. اگر  $\overline{AB} = ۱۳$ ،  $\overline{CD} = ۱۴$  و  $\overline{DA} = ۱۲$ ، آن وقت بیشترین فاصله بین دو نقطه چه قدر است؟

۳۹ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۱۴ (۱)

۲۰- دو نقطه B و C روی پاره خط AD قرار دارند. طول  $\overline{AB}$  برابر طول  $\overline{BD}$  و طول  $\overline{AC}$  برابر طول  $\overline{CD}$  است. طول  $\overline{BC}$  چند برابر طول  $\overline{AD}$  است؟

(آمریکا)

$\frac{5}{36}$  (۴)

$\frac{1}{10}$  (۳)

$\frac{1}{13}$  (۲)

$\frac{1}{36}$  (۱)



۲۱- پنج نقطه  $A, B, D, E$  طوری قرار گرفته‌اند که  $\overline{AC} = 5$ ،  $\overline{AE} = 4$ ،  $\overline{BC} = 14$ ،  $\overline{BD} = 2$  و  $\overline{DE} = 3$ . فاصله بین وسط پاره‌خط‌های  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  چه قدر است؟

(Regatta)

- (۱)  $2/5$  (۲)  $3/5$  (۳)  $4/5$  (۴)  $5/5$

۲۲- چهار نقطه  $A, B, C, D$  روی خطی قرار دارند به طوری که  $\overline{AC} > \overline{AB}$ ،  $\overline{AD} > \overline{AC}$ ،  $\overline{BC} > \overline{BD}$  و  $\overline{CD} > \overline{AB}$ . این نقاط از چپ به راست با چه ترتیبی ظاهر می‌شوند؟

- (۱)  $DACB$  (۲)  $CADB$  (۳)  $DBAC$  (۴)  $CDAB$

۲۳- پنج نقطه روی یک خط راست هستند. علی فاصله بین هر دو جفت از این نقطه‌ها را اندازه گرفت و به ترتیب صعودی، عددهای ۲، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۵، ۱۷، ۲۰ و ۲۲ را به دست آورد. مقدار  $k$  چه قدر است؟

(کانون و ۲۰۱۵)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲

- (۴) ۱۳ (۵) ۱۴

۲۴- نقاط  $A, B, C$  طوری قرار دارند که  $\overline{AB} = 5$ ،  $\overline{AC} = 9$  و  $\overline{BC} = 14$ . اگر  $D$  نقطه‌ای باشد که فاصله آن از  $A$  برابر نصف فاصله‌اش از  $C$  باشد، آن وقت مجموع همه مقادیر ممکن برای حاصل جمع  $\overline{AD} + \overline{BD}$  چه قدر است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۵ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۲۵- نقاط  $A, B, C, D, E, F$  را روی خط  $d$  چنان در نظر گرفته‌ایم که  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$ . اگر این نقاط به ترتیب از چپ به راست روی خط قرار گیرند و ضمناً  $\overline{AC} = 90$  و همچنین نقطه  $X$  در سمت راست  $F$  قرار گیرد، طول  $\overline{XF}$  چه قدر باشد تا طول  $\overline{XD}$  سه برابر طول  $\overline{EC}$  باشد؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۷ (۴) ۷۸

شرط وجود مثلث

۲۶- کدام دسته از اعداد زیر، اندازه‌های سه ضلع مثلث می‌توانند باشند؟

(تیمز)

- (۱) ۲، ۳، ۵ (۲)  $4, 2/5, 1/5$  (۳) ۷، ۳، ۵ (۴) ۸، ۴، ۳

۲۷- طول اضلاع مثلثی  $x$ ،  $3/5$  و ۸ است.  $x$  کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

(سنه ۹۴)

- (۱) ۷ (۲)  $9/06$  (۳) ۱۱

- (۴)  $35/3$  (۵) ۸

۲۸- دو نقطه  $A$  و  $B$  به فاصله ۱۰ سانتی‌متر از هم قرار دارند. چند نقطه مانند  $C$  می‌توان پیدا کرد که از  $A$  به فاصله ۴ سانتی‌متر و از  $B$  به فاصله ۳ سانتی‌متر قرار داشته باشند؟

(تیمز)

- (۱) دو نقطه (۲) یک نقطه (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۲۹- چند مثلث به طول اضلاع صحیح موجود هستند که محیط آن‌ها برابر ۱۰ شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰- چند مثلث متساوی‌الساقین با حداکثر ۱۳ چوب‌کبریت می‌توان ساخت؟

(پیشرفت تفهیلی شماره ۹۵)

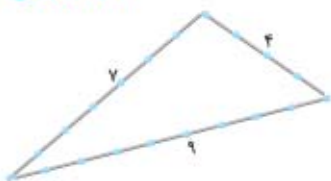
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۳۱- ۲۰ چوب‌کبریت را به شکل یک مثلث چیده‌ایم. با این تعداد چوب‌کبریت، چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟

(آزمایشی پنوی)

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶

- (۴) ۷ (۵) ۱۰



پیشرفت تفهیمی استعدادهای درفشان ۹۳

۲۲- با توجه به ادعاهای زیر، کدام گزینه صحیح است؟

ادعای اول: تمام مثلث‌های با محیط ۷ و اندازه اضلاع صحیح، متساوی‌الساقین هستند.  
ادعای دوم: فقط دو مثلث با محیط ۹ و اندازه اضلاع صحیح وجود دارد.

- (۱) ادعای اول درست و ادعای دوم نادرست است.  
(۲) ادعای اول و دوم هر دو درست هستند.  
(۳) ادعای اول نادرست و ادعای دوم درست است.  
(۴) ادعای اول و دوم هر دو نادرست هستند.

۲۳- تعداد مثلث‌های مختلف‌الاضلاعی که ضلع‌های آن‌ها عددهای صحیح و محیط هر یک کم‌تر از ۱۳ باشد، برابر است با .....

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (استعدادهای درفشان)

۲۴- از میان همه مثلث‌های متساوی‌الساقین به طول ساق ۷ که طول قاعده‌شان با یک عدد صحیح بیان می‌شود، مثلثی را انتخاب کرده‌ایم که بیشترین محیط را دارد. محیط این مثلث برابر است با .....

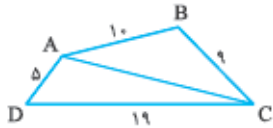
- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۲۷ (۵) ۲۸ (گنگورو)

۲۵- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، می‌دانیم  $\overline{AB} = \overline{AC} = ۵$  و  $\widehat{BAC} > ۶۰^\circ$ . طول محیط این مثلث عددی صحیح است. چند مثلث از این نوع وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵ (گنگورو)

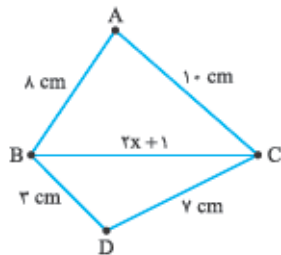
۲۶- مصطفی می‌خواهد مثلث متساوی‌الساقینی رسم کند که اولاً طول ساق‌هایش ۶ واحد، ثانیاً اندازه رأسش بیشتر از  $۶۰^\circ$  باشد و ثالثاً طول قاعده‌اش عددی طبیعی باشد. او چند مثلث مختلف می‌تواند بکشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (گنگورو)



۲۷- در شکل مقابل، طول  $\overline{AC}$  کدام یک از گزینه‌ها ممکن است باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰



۲۸- با توجه به شکل مقابل، اگر  $x$  عددی صحیح و مثبت باشد، آن وقت مجموع مقادیری که به جای  $x$  می‌توان قرار داد برابر است با .....

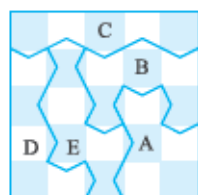
- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷ (آفریقای بنوبی ۲۰۱۰)

۲۹- طول ضلع‌های  $\overline{AB}$  و  $\overline{BC}$  از چهار ضلعی محدب  $ABCD$  به ترتیب برابر ۱ و ۴ است. طول قطر  $BD$  نیز برابر ۲ است. اگر چهارضلعی را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کند، محیط چهارضلعی چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۴۰- روباه مکار ۱۰۰ تکه چوب دارد که طول همه آن‌ها با هم فرق دارد. او ادعا می‌کند که با هر سه‌تایی از این چوب‌ها می‌تواند مثلث درست کند. پینوکیو قصد دارد درستی ادعای او را با امتحان کردن چوب‌ها و ساختن مثلث‌های مختلف مشخص کند. حداقل چند بار باید آزمایش کند تا از درستی یا نادرستی ادعای روباه مطمئن شود؟

- (۱) ۱۰۰ بار (۲)  $۱۰۰ \times ۹۹$  بار (۳) تقریباً  $\frac{۱۰۰}{۳}$  بار (۴) ۱ بار



۴۱- مربعی  $۵ \times ۵$  را مانند شکل مقابل به پنج قسمت تقسیم کرده‌ایم. هر برش، دنباله‌ای از شکل‌های به صورت  $\checkmark$  است که البته همگی با هم یکسان هستند. محیط کدام قسمت بیشتر است؟

- (۱) B (۲) C (۳) D (۴) E (انگلستان ۲۰۱۳)

طول پاره‌خط در شکل‌های هندسی

۴۲- طول ضلع‌های مثلثی ۶، ۱۰ و ۱۱ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی داریم که محیط آن با محیط این مثلث برابر است. طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع چه قدر است؟

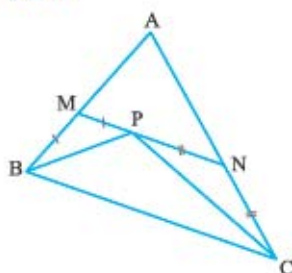
(گانه‌نگار و ۲۰۱۵)

- ۱۸ (۱)  
۹ (۴)  
۱۱ (۲)  
۶ (۵)  
۱۰ (۳)

۴۳- در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 5$ ،  $BC = 6$  و  $AC = 7$ . دو حشره با هم و در جهت‌های مخالف از رأس  $A$  شروع به حرکت روی اضلاع مثلث می‌کنند. می‌دانیم سرعت این دو در طول مسیر یکسان است و اولین بار در نقطه‌ای مانند  $D$  روی  $BC$  به هم می‌رسند. طول  $BD$  کدام است؟

(آفریقای)

- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)

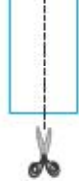


۴۴- می‌دانیم در شکل مقابل،  $AB = 12$  و  $AC = 20$ . در این صورت محیط مثلث  $AMN$  چه قدر است؟

- ۳۰ (۱)  
۳۲ (۲)  
۳۴ (۳)  
۳۶ (۴)

۴۵- کاغذی مربعی به طول ضلع ۴ را از وسط تا کرده و سپس هر دو لایه را موازی با خط تا بریده‌ایم. در نتیجه سه مستطیل به دست آمده است. نسبت محیط یکی از مستطیل‌های کوچک جدید به مستطیل بزرگ جدید چه قدر است؟

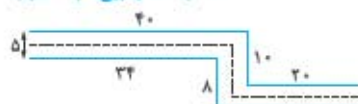
(آفریقای)



- $\frac{5}{6}$  (۱)  
 $\frac{3}{4}$  (۳)  
 $\frac{1}{2}$  (۲)  
 $\frac{4}{5}$  (۴)

(آفریقای جنوبی مرحله دوم)

۴۶- طول خط‌چین شکسته در وسط راه. برحسب میلی‌متر برابر است با .....



- ۶۷ (۱)  
۶۹ (۴)  
۶۸ (۲)  
۷۰ (۵)  
۶۷/۵ (۳)

۴۷- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ،  $AB = 2BC$ . اگر محیط  $ABC$  برابر ۲۰۰ میلی‌متر باشد، آن‌گاه طول  $AC$  چند میلی‌متر است؟

(آفریقای جنوبی مرحله دوم)

- ۱۲۰ (۱)  
۱۰ (۴)  
۴۰ (۲)  
۸۰ (۵)  
۵۰ (۳)

۴۸- کامبیز نواری کاغذی به طول ۳۶ سانتی‌متر را به ۴ مستطیل دلخواه، مطابق شکل زیر تقسیم کرده و سپس وسط این مستطیل‌ها را به هم وصل کرده است. مجموع طول خط‌های  $MN$  و  $PQ$  چه قدر است؟

(گانه‌نگار و)



- ۹ (۱)  
۱۶ (۳)  
۱۲ (۲)  
۱۸ (۴)

۴۹- دو خط‌کش که پایینی ۲۰ سانتی‌متر و بالایی ۴۰ سانتی‌متر است، روی هم قرار گرفته‌اند. با توجه به شکل، فاصله مجهول  $x$  برابر است با .....



- ۱۶ cm (۱)  
۱۸ cm (۲)  
۱۹ cm (۳)  
۱۷ cm (۴)