



مدرس‌ان شریف

فصل اول

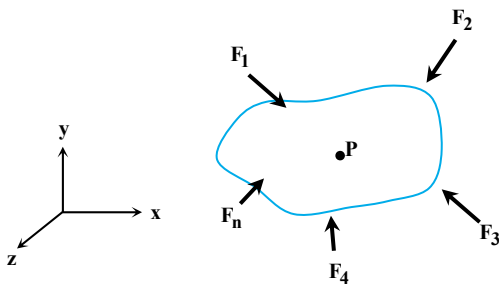
«تنش، کرنش، بارگذاری محوری»

درسنامه (I): معرفی انواع تنش‌ها

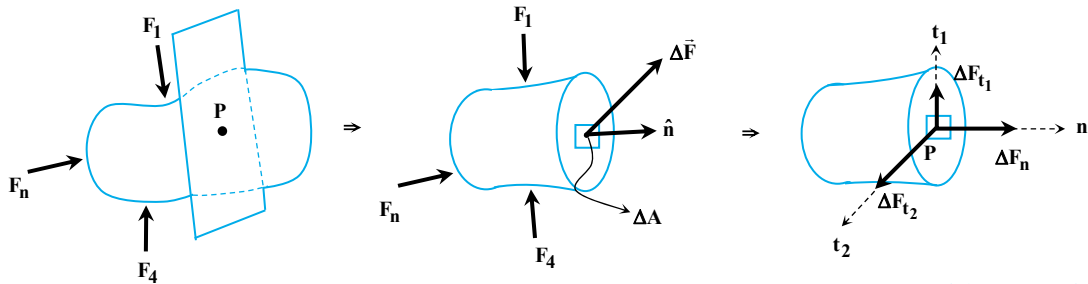
مقدمه

هرگاه جسمی (طبق شکل مقابل) تحت انواع بارگذاری‌ها قرار گیرد، نیروهای داخلی که در جسم به وجود می‌آیند در جسم تولید تنش می‌کنند.

در شکل مقابل اگر جسم در نقطه P موازی صفحه yz برش زده شده و پیکره سمت چپ برش رسم شود، به علت حفظ تعادل در سطح برش خورده نیروی داخلی وجود خواهد داشت. اگر برآیند نیروهای وارد بر المان سطح ΔA که در برگیرنده‌ی نقطه P است با $\Delta \vec{F}$ نشان داده شود، این نیرو سه مؤلفه دارد. یک مؤلفه آن عمود بر سطح ΔA (ΔF_n) در راستای بردار نرمال \hat{n} و دو مؤلفه دیگر مماس بر سطح ΔA ($\Delta F_{t_1}, \Delta F_{t_2}$) خواهد بود.



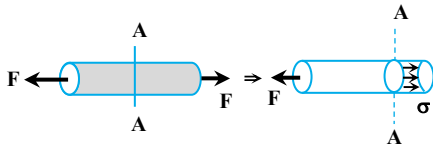
از تقسیم ΔF_n بر مساحت سطح مقطع ΔA کمیتی به نام تنش قائم (σ) و از تقسیم $\Delta F_{t_1}, \Delta F_{t_2}$ بر مساحت سطح مقطع ΔA نوع دیگری از تنش به دست می‌آید که به آن تنش برشی (τ) گفته می‌شود. لازم به ذکر است که با استفاده از مقادیر به دست آمده، مقادیر متوسط تنش را می‌توان به دست آورد.



تنش قائم (تنش نرمال)

تعریف تنش عمودی: به شدت نیروی عمودی سطحی یا نیروی عمود بر واحد سطح، تنش عمودی می‌گویند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



A مساحت سطح مقطع اولیه جسم است. لازم به ذکر است در صورتی که نیرو به مرکز سطح مقطع جسم وارد شود نیرو، محوری اما اگر نیرو به مرکز سطح مقطع وارد نشود نیرو، غیر محوری می‌باشد که برای محاسبه تنش ناشی از آن، در فصل‌های بعدی بحث می‌کنیم. همچنین رابطه بالا تنش عمودی متوسط در فاصله‌های دور از ناحیه‌ی اعمال بار متمرکز را نشان می‌دهد (چرا که تنش در مقاطع نزدیک به نقطه‌ی اعمال بار توزیعی غیریکنواخت دارد). ولی برای

محاسبه‌ی تنش واقعی در یک نقطه، می‌توان حد تنش متوسط را وقتی سطح مقطع به سمت صفر میل می‌کند محاسبه نمود:

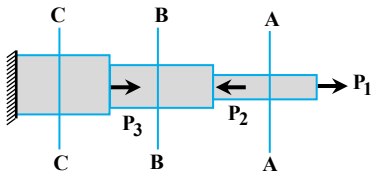
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

طبق قرارداد، تنش‌های کششی را با علامت مثبت و تنش‌های فشاری را با علامت منفی نشان می‌دهند. واحد تنش در سیستم متریک نیوتن بر

مترمربع $(\frac{N}{m^2})$ یا پاسکال Pa و در سیستم اینچی U.S، پوند بر اینچ مربع $(\frac{lb}{in^2})$ یا Psi می‌باشد.

در رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ نیروی داخلی در مقطعی است که تنش در آن مورد نظر می‌باشد. برای یافتن نیروی داخلی در هر مقطع کافی است که مقطع مورد

نظر را برش زده و از رابطه تعادل نیروها، نیروی وارده در مقطع برش خورده را به دست آورد. به عنوان مثال: نیروی داخلی در برش A-A:



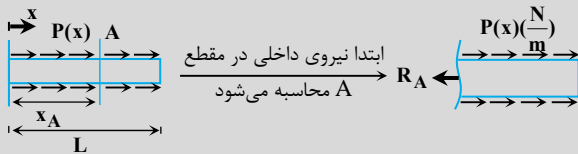
$$R_A \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \rightarrow P_1 \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - R_A = 0 \Rightarrow R_A = P_1$$

نیروی داخلی در برش B-B:

$$R_B \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline P_1 \\ \hline \end{array} \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline P_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = P_1 - P_2$$

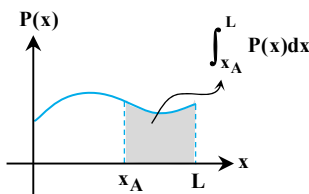
نیروی داخلی در برش C-C:

$$R_C \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline P_1 \\ \hline \end{array} \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline P_2 \\ \hline \end{array} \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline P_3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 + P_3 - R_C = 0 \Rightarrow R_C = P_1 - P_2 + P_3$$



نکته: اگر به میله‌ای بار گسترده محوری وارد کنیم از رابطه انتگرالی برای محاسبه نیروی داخلی در هر سطح مقطع دلخواه از آن استفاده می‌شود:

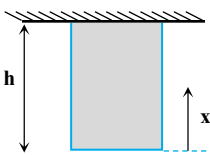
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A = \int_{x_A}^L P(x) dx$$



اگر نمودار تغییرات $P(x)$ بر حسب x به صورت روبرو باشد، حاصل انتگرال $\int P(x) dx$ در واقع سطح زیر منحنی در بازه مورد نظر بوده که برابر نیروی داخلی در سطح مقطع داخلی می‌باشد.

یادآوری: لازم به ذکر است که تنش کمیتی تانسوری و از مرتبه دو بوده و نباید به اشتباه آن را کمیت اسکالر یا برداری فرض نمود.

مثال ۱: یک ستون تحت وزن خود آویزان است. تنش نرمال در $x = \frac{h}{2}$ چقدر است؟ γ وزن مخصوص جنس ستون است.



$$\sigma = \frac{3}{2} \gamma h \quad (2)$$

$$\sigma = \gamma h \quad (1)$$

$$\sigma = 0 \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{\gamma h}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۳» نیروی داخلی در هر مقطع دلخواه از میله باید وزن بخش پایینی میله را

$$\sigma = \frac{F_x}{A} = \frac{W_x}{A} = \frac{mg}{A}$$

تحمل کند، بنابراین:

اما حجم بخش جدا شده از میله برابر $V = Ax$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sigma = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho A x g}{A} = \rho x g = \gamma x$$

طبق رابطه فوق، تنش قائم در هر مقطع از استوانه‌ای که تحت وزن خود آویزان است، با فاصله x نسبت خطی دارد اما مقدار

$$x = \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma = \gamma \frac{h}{2}$$

تنش در $x = \frac{h}{2}$ برابر است با:

تذکره: تنش ماکزیمم در میله فوق در تکیه‌گاه ایجاد شده که مقدار آن مساوی $\sigma_{max} = \frac{ql}{A}$ می‌باشد. این نوع بارگذاری را می‌توان مشابه میله‌ای در

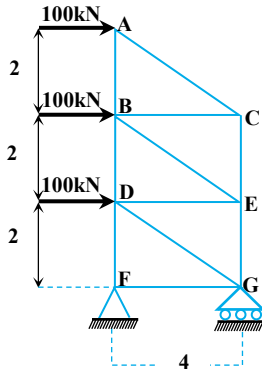
نظر گرفت که از سقف آویزان بوده و تحت اثر وزنش قرار گرفته است. در چنین حالتی اگر میله استوانه‌ای بوده و وزن مخصوصش مساوی γ باشد، آنگاه تغییرات تنش آن بر حسب متغیر x مساوی $\sigma = \gamma x$ و خطی بوده و حداکثر تنش آن در تکیه‌گاه ایجاد شده و برابر $\sigma_{max} = \gamma l$ می‌باشد.

📌 **مثال ۲:** کدام یک از عبارات زیر در مورد تنش صحیح است؟

- (۱) تنش به ابعاد هندسی قطعه وابسته و مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد.
 - (۲) تنش به ابعاد هندسی، جنس و مقاومت قطعه و نیروهای اعمالی وابسته است.
 - (۳) تنش از خواص ذاتی ماده است که به چگونگی توزیع نیروهای داخلی وابسته می‌باشد.
 - (۴) تنش به ابعاد هندسی قطعه، جنس آن و نیروهای خارجی اعمال به قطعه وابسته است.
- ✅ پاسخ: گزینه «۱» تنش مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد و با توجه به رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ تنها به ابعاد هندسی و بارگذاری خارجی وابسته است.

📌 **مثال ۳:** برای خرابی نشان داده شده اگر مساحت مقطع عضو BD، ۱۰۰۰ میلی‌متر مربع باشد،

تنش عمودی در این عضو چند MPa است؟

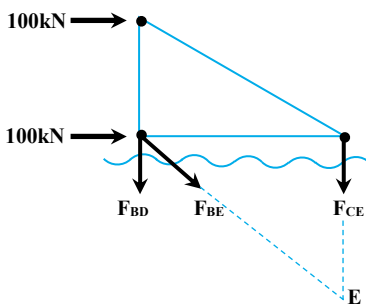


(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۲۰۰



✅ پاسخ: گزینه «۳» برای تعیین تنش در عضو BD کفایت نیرو در عضو مورد نظر را به دست

آوریم. از روش برش برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم:

مطابق شکل خرابی، برشی افقی می‌زنیم و دیاگرام آزاد بخش فوقانی برش را رسم می‌کنیم. برش مورد نظر عضوهای BD، BE و CE را قطع می‌کند.

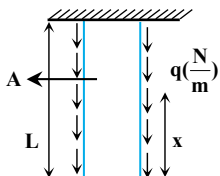
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{BD} \times 4 - 100 \times 2 - 100 \times 4 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 150 \text{ KN}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} = \frac{150000 \text{ N}}{1000 \text{ mm}^2} = 150 \text{ MPa}$$

توجه کنید اگر در رابطه تنش $\sigma = \frac{F}{A}$ ، F بر حسب نیوتن و A بر حسب mm^2 جایگزین شوند، واحد تنش MPa خواهد شد.

📌 **مثال ۴:** میله‌ای طبق شکل زیر در انتهای فوقانی خود از سقف آویزان بوده و در طول خود تحت بار گسترده یکنواخت q قرار گرفته است. تغییرات

تنش در میله، در یک مقطع دلخواه از تیر به فاصله x از انتهای آن مساوی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



(۲) $\frac{q}{A} x$

(۱) $\frac{w}{2A} x$

(۴) $\frac{q}{2A} x^2$

(۳) $\frac{q}{A} x^2$

✅ پاسخ: گزینه «۲» برای تعیین تنش قائم در میله، آن را به فاصله x از انتهایش برش می‌زنیم سپس

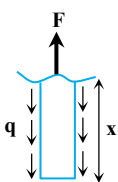
دیاگرام آزاد بخش جداشده را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه بار وارد شده بر میله از نوع گسترده طولی است،

لذا نیروی داخلی برابر حاصل ضرب بار گسترده در فاصله طولی اعمال بار گسترده می‌باشد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - \int q dx = 0 \Rightarrow F = \int q dx = q \int_0^x dx = qx$$

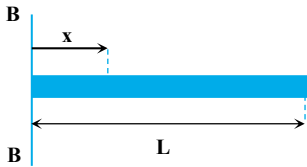
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{q}{A} x$$

از طرفی تنش قائم مساوی است با:





مثال ۵: میله‌ای به جرم m ، طول L ، مساحت مقطع یکنواخت A با سرعت زاویه‌ای ω حول محور $B-B$ می‌گردد. تنش در فاصله x از محور دوران کدام است؟ (مدول یانگ را E در نظر بگیرید.) (مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی - سراسری ۸۶)



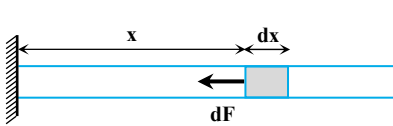
$$\frac{m\omega^2}{A.L}(L^2 - x^2) \quad (۱)$$

$$\frac{\omega^2}{A.L}(L^2 - x^2) \quad (۳)$$

$$\frac{m\omega^2}{2A.L}(L^2 - x^2) \quad (۲)$$

$$\frac{\omega^2}{2A.L}(L^2 - x^2) \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۱» بر هر المان از میله یک نیروی جانب مرکز مطابق شکل وارد می‌شود. مقدار این نیرو برای یک المان به فاصله x از محور دوران برابر است با:



دشتاب جانب مرکز برابر $R\omega^2$ می‌باشد) $dF = -adm \Rightarrow dF = -dmx\omega^2$

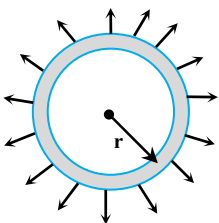
x در رابطی بالا همان شعاع دوران بوده که برابر فاصله‌ی المان تا محور دوران است.

با انتگرال‌گیری از این نیرو، نیروی داخلی در هر مقطع دلخواه به فاصله x از تکیه‌گاه به دست می‌آید.

$$F = \int_L^x -dmx\omega^2 = \int_x^L \rho A dx \cdot x\omega^2 = \frac{\omega^2 \rho A}{2}(L^2 - x^2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2}{2}(L^2 - x^2) \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در حجم میله ضرب می‌کنیم}} \sigma = \frac{\rho V\omega^2}{2V}(L^2 - x^2) \Rightarrow \sigma = \frac{m\omega^2}{2AL}(L^2 - x^2)$$

مثال ۶: تنش در مقطع حلقه‌ای به شعاع متوسط r که با سرعت محیطی v در حال دوران می‌باشد کدام است؟ (وزن مخصوص جنس حلقه را γ و دشتاب جاذبه را g در نظر بگیرید.) (مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی - سراسری ۸۶)



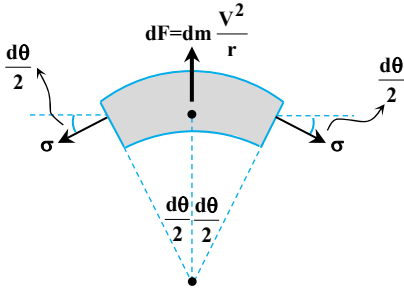
$$\frac{\gamma v^2}{g} \quad (۲)$$

$$\frac{\gamma v^2}{2g} \quad (۱)$$

$$\frac{\gamma v^2}{g} \quad (۳)$$

$$\frac{\gamma v^2}{2g} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۳» تعادل المانی از حلقه در جهت شعاعی مورد بررسی قرار داده می‌شود. $dF = dm \frac{v^2}{r}$ نیروی جانب مرکز بوده و σ تنش محیطی ایجادشده در حلقه می‌باشد.



$$\sum F_r = d_m a_n \Rightarrow \sum F_r = dm \frac{v^2}{r} \Rightarrow \sigma A \sin \frac{d\theta}{2} \times 2 = dm \frac{v^2}{r} \quad (۱)$$

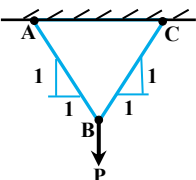
اما زاویه θ خیلی کوچک است بنابراین می‌توان تقریب زیر را به کار برد:

$$dm = \rho dV = \rho A r d\theta, \quad \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$$

$$(۱) \Rightarrow \sigma A \times \frac{d\theta}{2} \times 2 = \rho A r d\theta \times \frac{v^2}{r} \Rightarrow \sigma = \rho v^2 = \frac{\gamma v^2}{g}$$

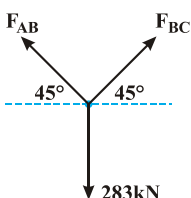
در نتیجه:

مثال ۷: دو میله فولادی همانند یکدیگر، به تکیه‌گاه مطابق شکل مفصل شده‌اند. به آن‌ها در نقطه‌ی B نیروی 283 kN وارد می‌شود. سطح مقطع میله‌ی AB چند میلی‌متر مربع است؟ (تنش مجاز در میله‌ها 200 MPa می‌باشد.) (مهندسی معدن - سراسری ۹۲)



- ۱) ۱۲۵۰
- ۲) ۱۲۰۰
- ۳) ۹۰۰
- ۴) ۱۰۰۰

پاسخ: گزینه «۴» در ابتدا با رسم دیاگرام آزاد مفصل B نیروی داخلی میله‌های AB و BC تعیین می‌شوند. سپس با توجه به تنش مجاز در میله‌ها می‌توان حداقل مساحت مورد نیاز برای میله‌ها را به صورت زیر محاسبه نمود:



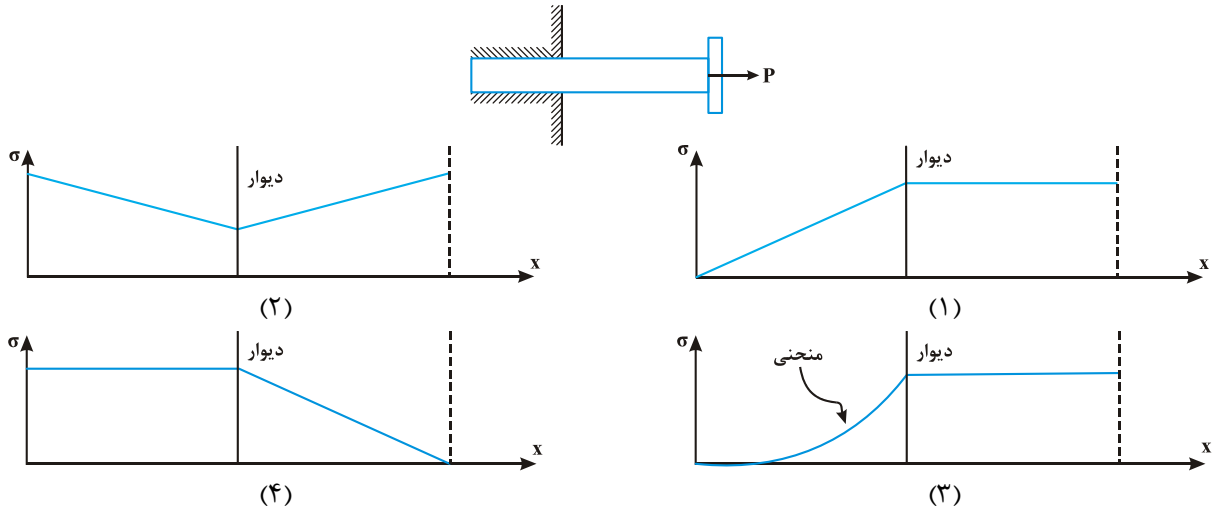
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \sin 45^\circ + F_{AB} \sin 45^\circ - 283 = 0$$

$$F_{AB} = F_{BC} \Rightarrow 2F_{AB} \sin 45^\circ = 283 \Rightarrow F_{AB} = \frac{283}{\sqrt{2}} = 200 \text{ kN}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \Rightarrow A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{AB}} = \frac{200 \times 10^3 \text{ N}}{200 \text{ MPa}} = 10^3 = 1000 \text{ mm}^2$$

مثال ۸: میخی در داخل دیوار کوبیده شده و با نیروی P به بیرون کشیده می‌شود. نمودار تغییرات تنش در طول میخ کدام است؟

(مهندسی مکانیک - سراسری ۹۴)

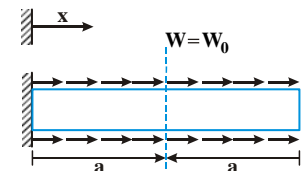


پاسخ: گزینه «۱» در فاصله‌ای که میخ در بیرون دیوار بوده، تنش کششی ثابت است. اما در فاصله‌ای که میخ در درون دیوار قرار دارد، نیروی کششی P با نیروی اصطکاک خنثی می‌شود، اما نیروی اصطکاک متناسب با سطح می‌باشد. بنابراین هر چه به انتهای میخ نزدیک‌تر می‌شویم، تنش کششی درون میخ به صورت خطی کاهش می‌یابد.

مثال ۹: میله‌ی نشان داده شده در شکل زیر، با سطح مقطع A تحت بارگذاری گسترده که به صورت خطی از $W = 0$ در $x = 0$ تا $W = W_0$

در $x = a$ به صورت افزایشی و سپس تا $W = 0$ در $x = 2a$ به صورت کاهش می‌تغییر می‌کند، قرار گرفته است. تنش نرمال میانگین σ در میله به صورت تابعی از x در ناحیه‌ی $a < x \leq 2a$ ، کدام است؟

(ایمینی و بازرسی فنی - سراسری ۹۵)



$$\frac{W_0}{2aA} (a-x)^2 \quad (2) \qquad \frac{W_0}{aA} (a-x)^2 \quad (1)$$

$$\frac{W_0}{2aA} (2a-x)^2 \quad (4) \qquad \frac{W_0}{aA} (2a-x)^2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» تغییرات W بر حسب x برابر است با:

$$\frac{W}{2a-x} = \frac{W_0}{a} \Rightarrow w = \frac{W_0}{a} (2a-x)$$

و اما بار محوری برابر با مساحت سطح زیر نمودار بار گسترده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$F = \frac{w(2a-x)}{2} = \frac{W_0}{2a} (2a-x)^2$$

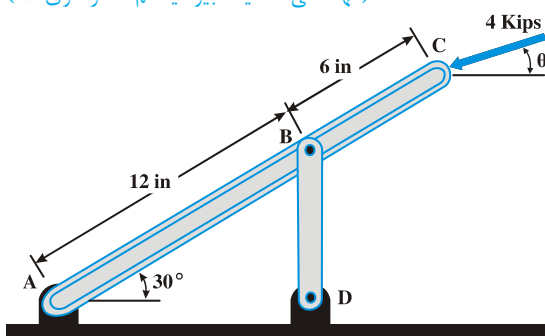
بنابراین تنش محوری برابر خواهد بود با:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{W_0}{2aA} (2a-x)^2$$

مثال ۱۰: رابطه BD میله‌ای به عرض 1 in و ضخامت $\frac{1}{4} \text{ in}$ است. با فرض اینکه قطر هر پین $5/8 \text{ in}$ باشد، مقدار بیشینه تنش قائم میانگین در رابط

(مهندسی مکانیک بیوسیستم - سراسری ۹۶)

BD هرگاه $\theta = 0$ باشد، چند ksi است؟



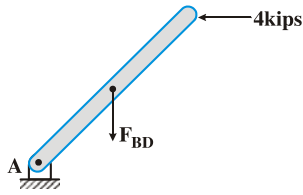
$$\text{مفروضات: } \begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$4\sqrt{3} \quad (1)$$

$$8\sqrt{3} \quad (2)$$

$$16\sqrt{3} \quad (3)$$

$$36 \quad (4)$$



پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با نوشتن معادله تعادل نیروی کششی عضو BD تعیین می‌شود.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4 \times 18 \sin 30^\circ - F_{BD} \times 12 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_{BD} = \frac{4 \times 18 \times \frac{1}{2}}{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \text{ kips}$$

و اما تنش قائم حداکثر در عضو BD در مقطعی بوده که سوراخ‌های پین در آن تعبیه شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

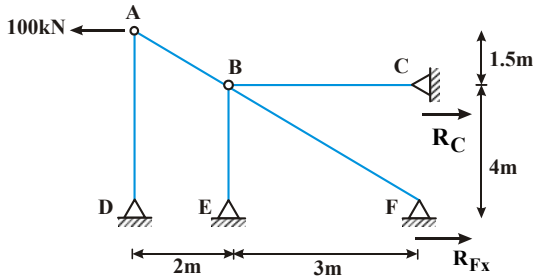
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} = \frac{2\sqrt{3} \times 10000}{(1 - 0.5) \times \frac{1}{2}} = 8000\sqrt{3} \text{ psi} = 8\sqrt{3} \text{ ksi}$$

مثال ۱۱: اگر در اثر بار 100 kN به نقطه A، مقدار تغییر طول میله BF به سطح مقطع 5 cm^2 برابر با 4 mm باشد، در این صورت نسبت سطح مقطع

(مهندسی در سوانج طبیعی - سراسری ۹۷)

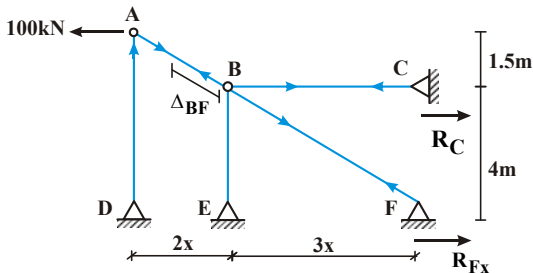
میله AD به BC در صورت یکسان بودن تنش این دو میله کدام است؟

$E = 2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ و تناسب مقیاس اندازه‌ها رعایت نشده است.)



$$\frac{100}{36} \quad (2) \quad \frac{75}{36} \quad (1)$$

$$\frac{100}{52} \quad (4) \quad \frac{75}{52} \quad (3)$$



پاسخ: گزینه «۳»

$$\sigma_{AD} = \sigma_{BC}$$

$$\frac{F_{AD}}{A_{AD}} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow \frac{A_{AD}}{A_{BC}} = \frac{F_{AD}}{F_{BC}} \quad (I)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 100 \times 1/5 = F_{AD} \times 2 \Rightarrow F_{AD} = 75 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

(با توجه به این که امتداد میله‌های AB، BC، BE و BF از B می‌گذرد، لنگری حول نقطه B ایجاد نمی‌کنند.)

$$\Delta_{BF} = \frac{F_{BF} L_{BF}}{EA_{BF}} \Rightarrow F_{BF} = \frac{EA_{BF} \Delta_{BF}}{L_{BF}} = \frac{2 \times 10^{11} \times 5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-3}}{5} = 8 \times 10^4 \text{ N} = 80 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$\text{در نقطه F: } \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Fx} = F_{BF} \times \frac{3}{5} = 48 \text{ kN}$$

$$\text{در کل سازه: } \sum F_x = 0 \Rightarrow R_C + R_{Fx} = 100 \Rightarrow R_C = 52 \text{ kN}$$

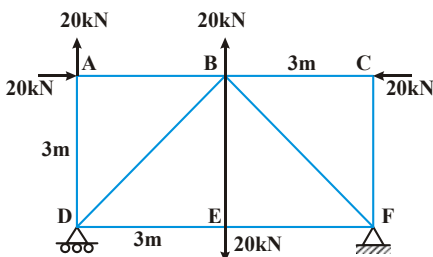
$$\text{در نقطه C: } \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = R_C = 52 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} \frac{A_{AD}}{A_{BC}} = \frac{F_{AD}}{F_{BC}} = \frac{75}{52}$$

بنابراین گزینه (۳) پاسخ صحیح است.

مثال ۱۲: در خرپای زیر، اگر سطح مقطع عضوهای BE و AD با هم برابر باشد، تنش در عضو BE چند برابر تنش در عضو AD است؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم - سراسری ۹۷)



(۱) نصف

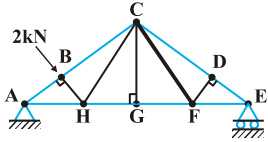
(۲) دو برابر

(۳) چهار برابر

(۴) مساوی هستند.

پاسخ: گزینه «۴» با در نظر گرفتن معادلات تعادل برای مفصل E می‌توان نتیجه گرفت که عضو BE تحت نیروی کششی 20 kN است. از طرفی اگر معادلات تعادل را برای مفصل A در نظر بگیریم، مقدار نیروی داخلی در عضو AD برابر 20 kN می‌باشد. چون سطح مقطع دو میله‌ی مذکور برابر است بنابراین تنش در دو میله یکسان می‌باشد.

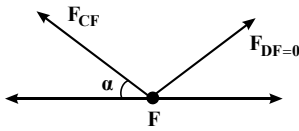
(مکانیک بیوسیستم - دکتری ۹۷)



مثال ۱۳: در شکل زیر، اگر مساحت مقطع میله‌ها 1 cm^2 باشد، تنش در عضو FC چند MPa است؟

- (۱) ۰
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۲

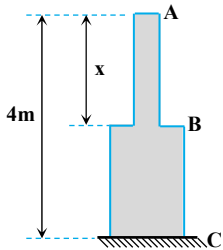
پاسخ: گزینه «۱» با مشاهده مفصل D در خرپا می‌توان نتیجه گرفت که عضو DF صفر نیرویی می‌باشد. از طرفی با حذف این عضو برای مفصل F خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CF} \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_{CF} = 0 \Rightarrow \sigma_{CF} = 0$$

نکته ۲: اگر در یک سازه خواهیم حداکثر یک کمیت که به پارامتر خاصی وابسته است به حداقل برسد، ابتدا مقادیر کمیت در نقاط اکسترمم را محاسبه نموده، سپس قدرمطلق کمیت مورد نظر را در این نقاط با هم برابر قرار داده تا پارامتر مورد بررسی به دست آید.

مثال ۱۴: ستون بتونی به ارتفاع 4 m برای تحمل وزنش از دو قسمت AB و BC به ترتیب به قطر 200 mm و 400 mm تشکیل شده است. طول تقریبی قسمت AB برای اینکه مقدار ماکزیمم تنش عمودی در ستون کمترین مقدار خود را داشته باشد چقدر است؟



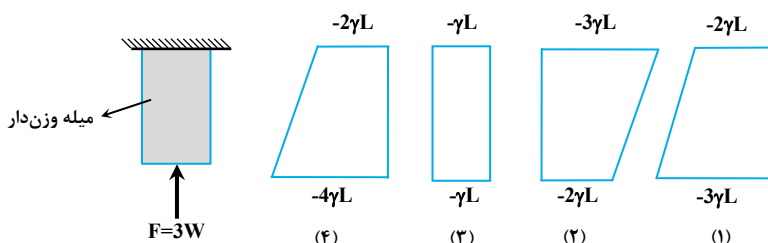
- (۱) 230 cm
(۲) $86/4 \text{ cm}$
(۳) 200 cm
(۴) اطلاعات ناقص است.

پاسخ: گزینه «۱» ماکزیمم تنش عمودی در ستون زمانی کمترین مقدارش را خواهد داشت که ماکزیمم تنش عمودی در کل ستون ثابت باشد. از طرفی ماکزیمم وزن هر بخش از میله برابر حاصل ضرب حجم میله در وزن مخصوص آن (γ) می‌باشد. بنابراین تنش در دو بخش میله را محاسبه نموده و مقادیر آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$(\sigma_{AB})_{\max} = (\sigma_{BC})_{\max} \Rightarrow \frac{W_{AB}}{A_1} = \frac{W_{AB} + W_{BC}}{A_2} \Rightarrow \frac{\gamma V_{AB}}{A_1} = \frac{\gamma V_{AB} + \gamma V_{BC}}{A_2} \Rightarrow \gamma x = \frac{\gamma A_1 x + \gamma A_2 (L - x)}{A_2}$$

$$x = \frac{A_1}{A_2} x + L - x \Rightarrow 2x - x \frac{A_1}{A_2} = L \Rightarrow x = \frac{L}{2 - \frac{A_1}{A_2}} = \frac{400}{2 - \frac{\pi \times 200^2}{\pi \times 400^2}} = \frac{1600}{\gamma} \text{ cm} \sim x = 230 \text{ cm}$$

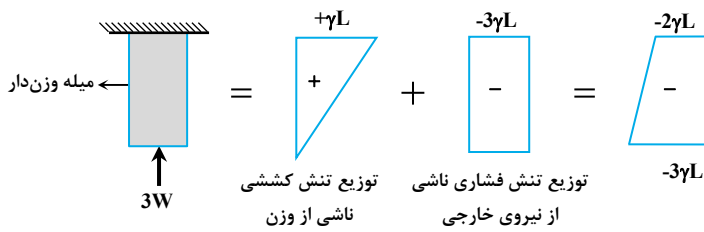
مثال ۱۵: یک میله به مقطع ثابت A، طول L و وزن مخصوص γ تحت تأثیر نیروی فشاری معادل سه برابر وزنش قرار دارد. منحنی توزیع تنش محوری مطابق کدام یک از اشکال زیر می‌باشد؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

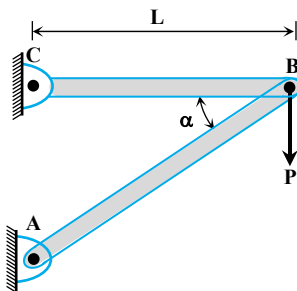


پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ می‌توان از روش جمع آثار استفاده



نمود، به این صورت که تنش ناشی از بار فشاری $3W$ و نیروی وزن را به صورت جداگانه محاسبه نموده و نتایج را با هم جمع کنیم. با توجه به تذکر (۱) توزیع تنش ناشی از وزن یک توزیع خطی است، در حالی که توزیع تنش ناشی از بار فشاری یک توزیع ثابت می‌باشد که حاصل جمع آن‌ها مساوی است با:

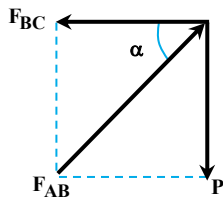
مثال ۱۶: قاب مفصلی شکل زیر، تحت نیروی P در مفصل B قرار گرفته است. تنش مجاز در هر دو میله AB و BC با سطح مقطع ثابت مساوی می‌باشد. زاویه α چه اندازه باشد تا وزن کل سازه حداقل شود؟



- (۱) 55°
- (۲) 45°
- (۳) 40°
- (۴) 50°

پاسخ: گزینه «۱» وزن سازه در صورتی حداقل خواهد بود که تنش حداکثر در هر دو میله مساوی و ثابت و در حد تنش مجاز باشد.

در این حالت می‌توان گفت که از حداقل ماده مورد نیاز برای ساخت سازه استفاده شده است، چرا که تنش‌های حداکثر مساوی تنش مجاز می‌باشد. با رسم دیاگرام آزاد مفصل B و نوشتن معادلات تعادل، نیرو در دو میله مطابق روابط زیر به دست می‌آیند:



$$\sum F_{x,y} = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (1) ; \quad F_{BC} = F_{AB} \cos \alpha \Rightarrow F_{BC} = P \cot \alpha$$

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \Rightarrow A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma}, \quad \sigma = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma}$$

$$V = A_{AB}L_{AB} + A_{BC}L_{BC} = A_{AB} \frac{L}{\cos \alpha} + A_{BC}L = \left(\frac{P}{\sigma \sin \alpha}\right) \frac{L}{\cos \alpha} + \left(\frac{P \cot \alpha}{\sigma}\right)L$$

همان طور که مشاهده می‌شود حجم سازه تابعی از متغیر زاویه α می‌باشد. برای به حداقل رساندن وزن و یا حجم میله کافی است که از این حجم نسبت به این متغیر مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم:

$$V = \frac{PL}{\sigma} \left(\cot \alpha + \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} \right) \Rightarrow \frac{dV}{d\alpha} = 0 \Rightarrow$$

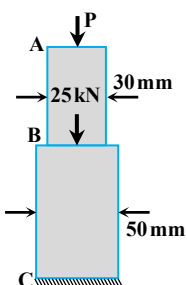
$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{-\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 0$$

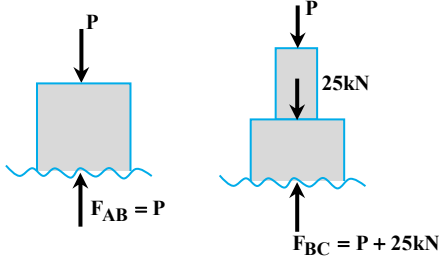
$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 55^\circ$$

مثال ۱۷: در شکل نشان داده شده در صورتی که تنش عمودی در میله AB و BC یکسان باشد، مقدار نیروی P تقریباً چند کیلو نیوتن است؟

(مهندسی معدن - سراسری ۹۱)



- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۵
- (۴) ۱۶



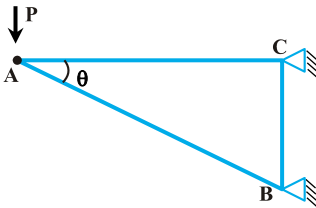
پاسخ: گزینه «۲» در ابتدا نیروی داخلی در قسمت‌های AB و BC میله‌ها محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BC} \Rightarrow -\frac{P}{\frac{\pi}{4} \times 30^2} = -\frac{P+25}{\frac{\pi}{4} \times 50^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{9} = \frac{P+25}{25} \Rightarrow 25P = 9P + 9 \times 25 \Rightarrow 16P = 225 \Rightarrow P = 14 \text{ kN}$$

مثال ۱۸: در خرپای زیر، چنانچه طول عضو AC برابر L باشد، جهت مینیمم شدن حجم میله AB، زاویه θ باید چند درجه باشد؟

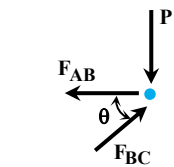
(مهندسی عمران - سراسری ۹۲)



$$\frac{\pi}{4} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4) \qquad \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای مینیمم شدن حجم میله BC باید حجم BC را بر حسب زاویه θ یافته و از آن نسبت به θ مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم یا از روی همان رابطه‌ی حجم، θ را طوری تعیین می‌کنیم تا حجم حداقل شود. ابتدا با توجه به دیگرام آزاد مفصل B، نیروی میله BC محاسبه می‌گردد.

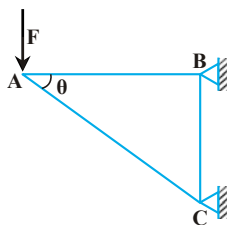


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P - F_{BC} \sin \theta = 0 \quad ; \quad F_{BC} = \frac{P}{\sin \theta} \quad ; \quad \begin{cases} \sigma = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} \Rightarrow A_{BC} = \frac{\sin \theta}{\sigma} = \frac{P}{\sigma \sin \theta} \\ V_{BC} = A_{BC} L_{BC} = \frac{P}{\sigma \sin \theta} \times \frac{L}{\cos \theta} = \frac{PL}{\sigma \sin 2\theta} \end{cases}$$

هرگاه $\sin 2\theta$ مساوی یک شود، حجم میله BC مینیمم خواهد شد. به عبارت دیگر $\theta = \frac{\pi}{4}$. در معادله‌ی بالا فرض شده است که طول میله AB برابر L و مقدار ثابتی باشد.

مثال ۱۹: برای عضو AC از خرپای زیر، تنش مجاز مشخصی وجود دارد. زاویه θ به چه میزان انتخاب شود تا حجم عضو AC حداقل باشد؟ طول

(مهندسی مکانیک - سراسری ۹۵)



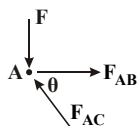
$$30 \quad (1)$$

$$45 \quad (2)$$

$$60 \quad (3)$$

$$90 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای حداقل شدن حجم عضو AC، حجم آن را بر حسب θ محاسبه کرده، سپس از آن نسبت به θ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + F_{AC} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{AC} = \frac{F}{\sin \theta}$$

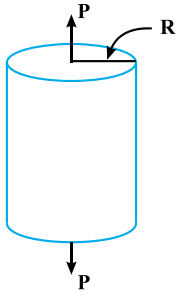
$$\sigma_{AC} = \sigma \text{ (مقدار ثابت)} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} = \frac{F}{A_{AC} \sin \theta} \Rightarrow A_{AC} = \frac{F}{\sigma \sin \theta}$$

و اما حجم میله AC مساوی است با:

$$V_{AC} = A_{AC} L_{AC} = \frac{F}{\sigma \sin \theta} \times \frac{L_{AB}}{\cos \theta} = \frac{FL_{AB}}{\sigma \sin \theta \cos \theta} = \frac{2FL_{AB}}{\sigma \sin 2\theta}$$

طول میله AB در رابطه‌ی بالا ثابت در نظر گرفته می‌شود، اما مقدار V_{AC} در صورتی حداقل خواهد بود که زاویه θ برابر 45° یا $\sin 2\theta$ برابر یک باشد.

مثال ۲۰: توزیع تنش در سطح مقطع عضو مطابق شکل زیر تحت نیروی محوری به صورت $\sigma(r) = \sigma_0(R^2 - r^2)$ می‌باشد. σ_0 بر حسب تابعی از R و P کدام است؟ (مهندسی در سوانح طبیعی - سراسری ۹۸)



$$\sigma_{avg} \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_{avg}}{R^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sigma_{avg}}{2R^2} \quad (3)$$

$$\frac{2\sigma_{avg}}{R^2} \quad (4)$$

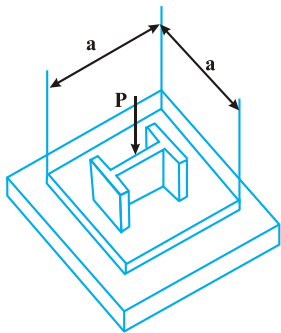
پاسخ: گزینه «۴» در ابتدا تنش متوسط σ_{avg} در سطح به صورت مقابل تعریف می‌شود: (۱) $\sigma_{avg} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi R^2} \Rightarrow P = \pi R^2 \sigma_{avg}$

از طرفی برابری تنش محوری $\sigma(r)$ در روی سطح باید برابر نیروی محوری P شود:

$$P = \int \sigma(r) dA = \int_0^R \sigma_0(R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{2} \sigma_0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{2P}{\pi R^4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sigma_0 = \frac{2(\pi R^2) \sigma_{avg}}{\pi R^4} = \frac{2\sigma_{avg}}{R^2}$$

مثال ۲۱: نیروی محوری P به یک ستون کوتاه $W_{8 \times 40}$ با مساحت مقطع عرضی $A = 12 \text{ in}^2$ اعمال می‌شود و مطابق شکل به وسیله یک ورق روی پایه بتنی توزیع شده است. با فرض اینکه تنش عمودی در ستون و تنش تکیه‌گاهی در پایه بتنی، به ترتیب از 3 ksi و $3/6 \text{ ksi}$ بیشتر نشود، مقدار a به طوری که اقتصادی‌ترین و مطمئن‌ترین طرح حاصل شود چند اینچ است؟ (مکانیک بیوسیستم - دکتری ۹۸)



$$5 \quad (1)$$

$$10 \quad (2)$$

$$15 \quad (3)$$

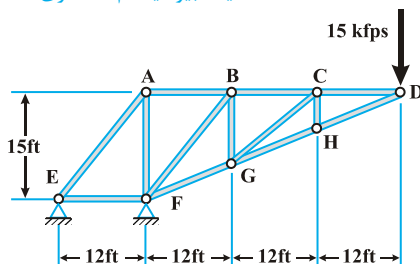
$$20 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به تنش مجاز تکیه‌گاهی در ستون نیروی P به دست آمده سپس با استفاده از آن حداقل مقدار a (طول ورق) تعیین می‌شود.

$$\text{ستون } (\sigma_b)_{all} = \frac{P}{A_1} \Rightarrow P = (\sigma_b)_{all} \times A_1 = 30000 \times 12 \Rightarrow P = 360000$$

$$\text{پایه } (\sigma_b)_{all} = \frac{P}{A_2} \Rightarrow A_2 = a^2 = \frac{360000}{3600} = 100 \Rightarrow a = 10 \text{ in}$$

مثال ۲۲: در خرپای نشان داده شده چنانچه سطح مقطع همه اعضا یکسان باشد، نسبت تنش عضو BC به تنش عضو AB برابر کدام است؟ (مکانیک بیوسیستم - دکتری ۹۸)



$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» اعضای CH ، CG ، BG و BF صفر نیرویی بوده و می‌توان آن‌ها را در تحلیل نیرویی خرپا در نظر نگرفت. در این صورت نیروی

$$F_{AB} = F_{BC} \Rightarrow \sigma_{AB} = \sigma_{BC}$$

داخلی در اعضای BC و AB برابرند بنابراین داریم:



مدرس‌ان شریف

فصل دوم

«پیچش»

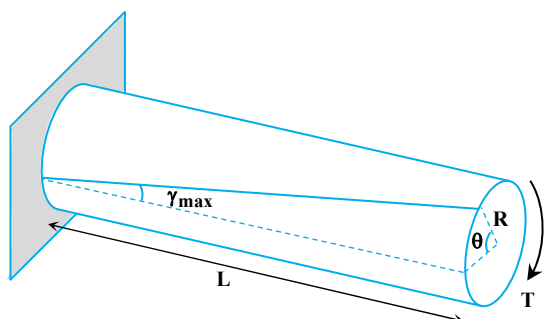
درسنامه (۱): پیچش محورها با مقاطع دایروی



مقدمه

اعضای تحت پیچش دارای کاربردهای متعددی در پروژه‌های گوناگون مهندسی هستند که از مهم‌ترین آن‌ها کاربرد در محورهای انتقال قدرت است که توان از نقطه‌ای به نقطه دیگر انتقال می‌یابد. برای اعضای تحت پیچش مقاطع دایروی توپر و توخالی استفاده می‌شود و علت آن این است که این مقاطع در پیچش به صورت مسطح و قائم بر محور باقی می‌مانند و اعوجاج پیدا نمی‌کنند. با استفاده از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که توزیع کرنش برشی در نتیجه تنش برشی به صورت خطی و متناسب با فاصله از محور می‌باشد. از دیگر فرضیات پیچش این است که مصالح همگن است، میله مستقیم باقی می‌ماند و شعاع‌های اولیه نیز به همان صورت باقی می‌مانند.

مقاطع دایروی پیچش



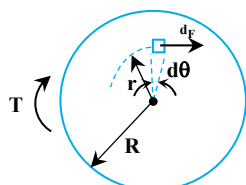
در صورتی که گشتاور وارد بر یک میله یا محور، حول محور طولی‌اش باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود میله یا محور تحت پیچش قرار گرفته است. اگر عضو دارای مقطع مدور باشد، تحت اثر لنگر پیچشی تمامی مقاطعش مستوی و بدون آشفتنگی و تغییر شکل باقی می‌مانند و تنها اثر آن پیچش دو انتهای عضو نسبت به هم خواهد بود که به آن زاویه پیچش گفته می‌شود. ولی اگر عضو دارای مقطع غیرمدور باشد، در اثر لنگر پیچشی مقاطع آن کج شده و علاوه بر پیچش دو انتهای عضو نسبت به هم، دچار تاب‌خوردگی و اعوجاج نیز خواهد گردید.

در این بخش ابتدا پیچش مقاطع مدور توپر و توخالی در محدوده ارتجاعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرضیاتی که برای استخراج روابط در نظر گرفته می‌شوند شامل موارد زیر می‌باشد:

(الف) پس از اعمال لنگر پیچشی بر عضو، هر مقطع عرضی آن حالت مستوی خود را حفظ می‌کند و هیچ‌گونه اعوجاج و تغییر شکلی در آن رخ نخواهد داد.
(ب) کرنش‌های برشی γ از محور مرکزی عضو تا سطح خارجی به صورت خطی تغییر می‌کنند (این فرض حتی برای بارگذاری در محدوده‌ی پلاستیک نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد).

(ج) قانون هوک در برش که ارتباط بین تنش برشی و کرنش برشی را بیان می‌کند فقط برای محدوده الاستیک خطی معتبر است.

در اثر لنگر پیچشی در محور مدور، تنش برشی ایجاد شده که مقدار تنش وابسته به فاصله شعاعی نقطه مورد نظر تا مرکز محور بوده و همچنین در صفحات طولی و عرضی مقدار آن برابر می‌باشد. برای استخراج رابطه تنش ناشی از لنگر پیچشی ابتدا یک المان از مقطع عرضی مطابق شکل در نظر گرفته می‌شود.



المان نشان داده تحت اثر یک نیروی برشی dF می‌باشد. این نیرو حول محور مرکزی گشتاوری به اندازه dT ایجاد می‌کند. برای محاسبه لنگر پیچشی T می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$T = \int dT = \int r dF = \int r \tau dA \quad (1)$$

در رابطه فوق dA مساحت المان بوده که مقدار آن برابر $dA = r d\theta dr$ می‌باشد. اما طبق فرض (ب)، کرنش‌های برشی از مرکز تا سطح خارجی به صورت خطی تغییر کرده و از صفر تا یک مقدار ماکزیمم افزایش می‌یابند. به عنوان مثال در شعاع r ، کرنش برشی γ برابر است با:

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma_{\max}}{R} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{r}{R} \gamma_{\max} \quad (2)$$

اما در محدوده ارتجاعی، یک رابطه خطی بین تنش برشی و کرنش برشی برقرار می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در محدوده ارتجاعی، توزیع تنش برشی نیز یک توزیع خطی بوده و توسط رابطه زیر قابل بیان است:

$$G\gamma = \frac{r}{R} G\gamma_{\max} \Rightarrow \tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} \quad (3)$$

طرفین رابطه (۲) را در G ضرب می‌کنیم:

$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow T = \int r \times \frac{r}{R} \tau_{\max} dA$$

مقادیر R و τ_{\max} ثابت بوده و می‌توانند از داخل انتگرال بیرون آورده شوند:

$$\Rightarrow T = \frac{\tau_{\max}}{R} \int r^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{\max}}{R} J \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} \quad (4)$$

رابطه فوق مقدار ماکزیمم تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی T را تعیین می‌کند. اما برای محاسبه تنش برشی در یک فاصله دلخواه شعاعی r می‌توان از ترکیب روابط (۳) و (۴) استفاده نمود.

$$\tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} = \frac{r}{R} \times \frac{TR}{J} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

در رابطه‌ی فوق:

r : فاصله شعاعی نقطه مورد نظر تا مرکز محور

T : لنگر پیچشی وارد بر محور

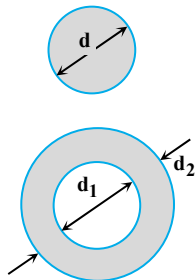
J : ممان اینرسی قطبی مقطع مورد پیچش که مقدار آن برای مقاطع توپر و توخالی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

مقطع توپر:

$$J = \int r^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \times r d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R r^3 dr = 2\pi \times \frac{R^4}{4} \Rightarrow J = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} d^4$$

مقطع توخالی:

$$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4)$$



$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{T \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

ماکزیمم تنش برشی در محور مدور در سطح خارجی میله اتفاق می‌افتد:

در این رابطه، اگر T بر حسب $N.m$ و R بر حسب m نوشته شوند، تنش بر حسب Pa به دست می‌آید. اما اگر T بر حسب $N.mm$ و R بر حسب mm باشد واحد تنش، MPa می‌گردد.

توزیع تنش برشی در محور مدور همان‌گونه که در شکل زیر نشان داده شده است، با فاصله شعاعی نقطه مورد نظر تا محور میله نسبت مستقیم دارد، در نتیجه داریم:

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{r}{R}$$

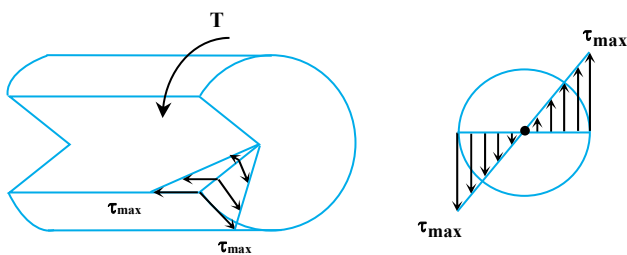
البته روابط فوق در محدود الاستیک صادق می‌باشند. از طرفی مقدار این تنش در صفحات طولی و عرضی باهم برابر می‌شود. شکل روبرو بیانگر توزیع خطی تنش و همچنین توزیع تنش برشی در صفحات طولی و عرضی بوده که به دلیل تعادل استاتیکی باید مقادیر آن‌ها مساوی باشد.

در محدوده ارتجاعی ارتباط تنش برشی و کرنش برشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau = G\gamma$$

کرنش برشی در محدوده ارتجاعی و غیر ارتجاعی همواره توزیعی خطی داشته و مقدار آن را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

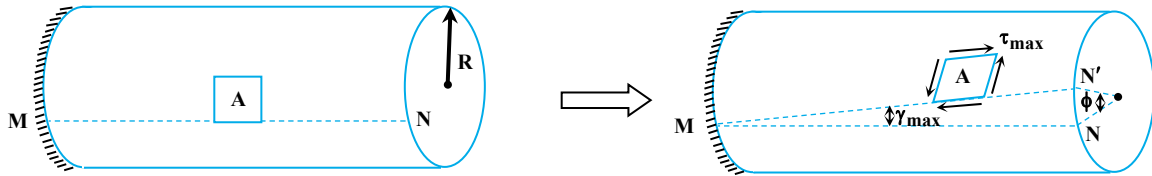
$$\gamma = r \frac{d\phi}{dx}$$



به زاویه پیچش در واحد طول موسوم است. در میله‌ای که تحت پیچش خالص قرار می‌گیرد، مقدار $\frac{d\phi}{dx}$ ثابت بوده و مساوی $\frac{\phi}{L}$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\gamma = r \frac{\phi}{L} \Rightarrow \boxed{\gamma L = r\phi}$$

ϕ زاویه پیچش دو انتهای میله نسبت به هم می‌باشد. رابطه فوق را می‌توان به صورت دیگر نیز به دست آورد. شکل زیر محوری را در دو وضعیت قبل و پس از اعمال لنگر پیچشی نشان می‌دهد. همچنین بر روی سطح خارجی دو محور المان بزرگنمایی شده A نیز نشان داده شده است.



همان طور که از شکل المان A در حالت ثانویه مشخص است گوشه‌های المان دیگر قائم نبوده بلکه تغییر زاویه داده‌اند. این تغییر زاویه با حرف γ نشان داده شده که همان کرنش برشی می‌باشد. اگر خطی را به موازات محور طولی بر سطح خارجی محور ترسیم کنیم (خط MN)، پس از اعمال لنگر پیچشی این خط به وضعیت MN' خواهد رسید. طول کمان NN' را می‌توان توسط رابطه روبرو به دست آورد.

از طرفی طول کمان NN' برابر است با:

$$\widehat{NN'} = \text{tg}\gamma \times L \Rightarrow (\text{tg}\gamma = \gamma \text{ به دلیل کوچکی زاویه } \gamma \text{ بر حسب رادیان، مقدار زاویه با تانژانت زاویه برابر است.}) \Rightarrow \widehat{NN'} = \gamma L$$

$$r\phi = \gamma L \quad \text{یا} \quad R\phi = \gamma_{\max} L$$

از مقایسه روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت:

زاویه پیچش کل را می‌توان برای میله‌های مدور و همگن با سطح مقطع ثابت به صورت زیر به دست آورد. با توجه به رابطه اخیر می‌توان نوشت:

$$\phi = \gamma_{\max} \times \frac{L}{R} \Rightarrow \phi = \frac{\tau_{\max}}{G} \times \frac{L}{R} \Rightarrow \phi = \frac{TR}{G} \times \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$

ϕ در رابطه فوق زاویه پیچش نسبی یا زاویه پیچش یک انتها نسبت به انتهای دیگر می‌باشد. به همین دلیل در حل بسیاری از مسائل فصل پیچش رابطه

$$\phi_{A/B} = \phi_A - \phi_B = \frac{TL}{GJ}$$

فوق به صورت روبرو نوشته می‌شود:

اگر مقطع B به تکیه‌گاه صلب متصل باشد، آنگاه ϕ_B صفر بوده و از رابطه فوق زاویه پیچش مقطع A محاسبه می‌شود.

در رابطه فوق T گشتاور پیچشی داخلی بوده که برای محاسبه آن در مقطع مورد نظر، محور را در آن مقطع برش زده و با نوشتن معادله تعادل، مقدار T را در سطح مقطع داخلی به دست می‌آوریم. در صورتی که میله از جنس‌های مختلف تشکیل شده باشد یا دارای سطح مقطع‌های مختلف بوده و یا تحت تأثیر چندین لنگر پیچشی قرار گرفته باشد رابطه فوق به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\boxed{\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i}}$$

در میله‌هایی با مقطع متغیر (مقاطع مخروطی) و یا میله‌های مدوری که تحت اثر لنگر پیچشی متغیری قرار گرفته است، رابطه‌ی زاویه پیچش به شکل انتگرالی بیان می‌شود:

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \frac{J}{R} \tau_{\max}$$

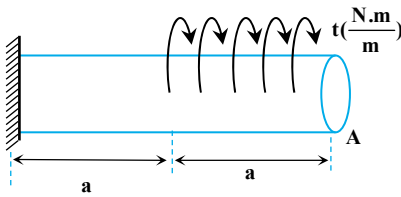
همان طور که قبلاً نیز اثبات شد گشتاور پیچشی وارد بر کل مقطع را می‌توان از رابطه روبرو تعیین نمود:

اما اگر هدف محاسبه گشتاور پیچشی وارد بر بخشی از محور باشد، کافی است از رابطه زیر استفاده گردد:

$$T = \int r \tau dA \xrightarrow{\text{در محدوده ارتجاعی}} T = \int \frac{\tau_{\max}}{R} \times r^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{R} \int r^2 dA$$

در رابطه فوق، انتگرال بر روی بخشی از مقطع عرضی محور می‌باشد که مورد نظر مسئله است.

کلمه مثال ۱: محوری مطابق شکل تحت اثر لنگر پیچشی یکنواخت t قرار گرفته است. زاویه پیچش مقطع A مساوی کدامیک از گزینه‌ها است؟



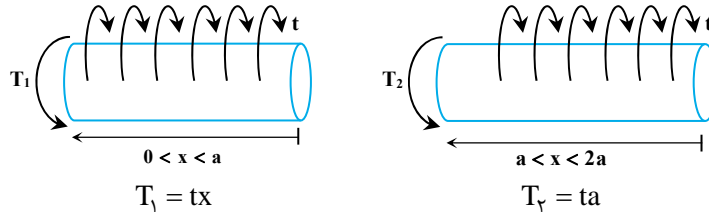
$$\frac{ta^2}{GJ} \quad (۲)$$

$$\frac{۳ ta^2}{۲ GJ} \quad (۱)$$

$$\frac{\Delta ta^2}{۲GJ} \quad (۴)$$

$$\frac{۲ta^2}{GJ} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه زاویه پیچش، ابتدا باید گشتاور پیچشی داخلی در هر مقطع مشخص شود، در نتیجه:

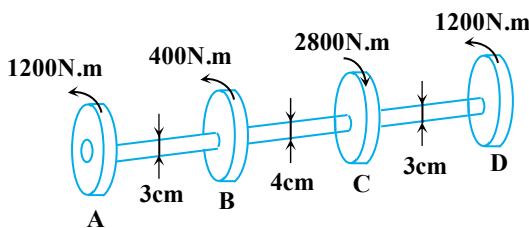


چون لنگر پیچشی گسترده دارای توزیعی یکنواخت است، بنابراین مقدار لنگر داخلی از حاصل ضرب لنگر گسترده t در فاصله‌ای که لنگر گسترده اعمال شده است به دست می‌آید.

به دلیل آن که T_1 ثابت نبوده و دارای توزیعی خطی است بنابراین برای محاسبه زاویه پیچش باید از شکل انتگرالی رابطه استفاده نمود. حتی می‌توان برای یکنواخت بودن شکل رابطه، جمله دوم رابطه زیر را نیز به صورت انتگرالی بیان نمود.

$$\phi_A = \int_0^a \frac{T_1 dx}{GJ} + \int_a^{2a} \frac{T_2 dx}{GJ} = \frac{1}{GJ} \left[\int_0^a tx dx + \int_a^{2a} ta dx \right] \Rightarrow \phi_A = \frac{1}{GJ} \left[\frac{ta^2}{2} + ta^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{ta^2}{GJ}$$

کلمه مثال ۲: تنش برشی ماکزیمم در محور BC شکل زیر مساوی کدام گزینه است؟



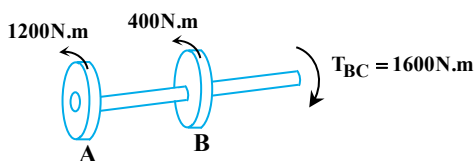
$$\frac{۲۰۰}{\pi} \text{MPa} \quad (۲)$$

$$\frac{۴۰۰}{\pi} \text{MPa} \quad (۱)$$

$$\frac{۱۰۰}{\pi} \text{MPa} \quad (۴)$$

$$\frac{۸۰۰}{\pi} \text{MPa} \quad (۳)$$

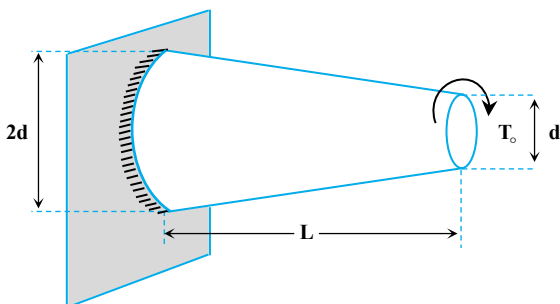
پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه تنش برش ماکزیمم در محور BC باید ابتدا آن را در مقطع مورد نظر برش زده و دیاگرام آزاد سمت چپ یا راست برش، رسم شود. مطابق شکل زیر برای حفظ تعادل مقدار لنگر داخلی باید برابر مجموع گشتاور پیچشی وارد بر پولی‌های A و B شود، بنابراین:



$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{۱۶T_{BC}}{\pi d_{BC}^3} = \frac{۱۶ \times ۱۶۰۰ \times ۱۰^3 \text{ N.mm}}{\pi \times (۴۰)^3 \text{ mm}^3}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{۱۶ \times ۱۶۰۰}{\pi \times ۴^3} = \frac{۴۰۰}{\pi} \text{MPa}$$

کلمه مثال ۳: بر انتهای محور مخروطی نشان داده شده، لنگر پیچشی T_0 وارد می‌شود، زاویه پیچش انتهای محور چه اندازه است؟



$$\frac{\sqrt{T_0}L}{\pi G d^4} \quad (۱)$$

$$\frac{۳۲ T_0 L}{\pi G d^4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{T_0}L}{\pi G d^4} \quad (۳)$$

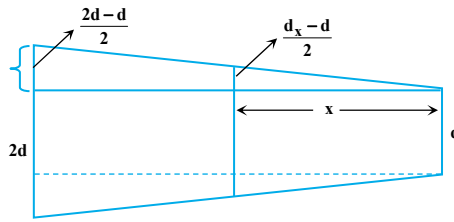
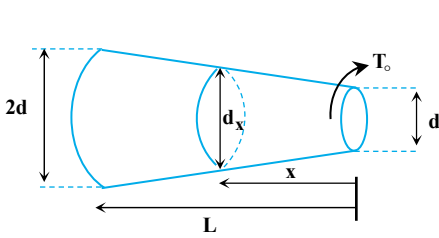
$$\frac{۲۸ T_0 L}{۳ \pi G d^4} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به مخروطی بودن محور برای محاسبه زاویه پیچش آن باید از رابطه زیر استفاده شود:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ} = \int_0^L \frac{T_0 dx}{G \times \frac{\pi}{32} d_x^4} = \frac{۳۲ T_0}{\pi G} \int_0^L \frac{dx}{d_x^4} \quad (۱)$$

J ممان اینرسی قطبی یک مقطع دلخواه از محور بوده و برابر $\frac{\pi}{32} d_x^4$ می‌باشد.

همچنین در رابطه فوق d_x قطر میله در یک مقطع دلخواه به فاصله x از انتهای آن است. اما این قطر را می‌توان بر حسب متغیر x به شکل زیر بیان نمود:



$$\frac{d_x - d}{2d - d} = \frac{x}{L} \Rightarrow d_x = d \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

$$(1) \Rightarrow \phi = \frac{32T_0}{\pi G d^4} \int_0^L \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^4}$$

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $u = 1 + \frac{x}{L}$ استفاده می‌شود. برای تعیین حدود u ، حدود x را در رابطه‌ی u قرار داده تا حدود آن تعیین شود.

$$1 + \frac{x}{L} = u \Rightarrow dx = L du \Rightarrow \phi = \frac{32T_0}{\pi G d^4} \int_1^2 \frac{L du}{u^4} = \frac{32T_0 L}{\pi G d^4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \left[(u^{-3}) \right]_1^2 = \frac{28}{3} \frac{T_0 L}{\pi G d^4}$$

مثال ۴: با دو برابر شدن قطر یک محور، مقدار گشتاور انتقالی به چه نسبتی تغییر خواهد نمود؟

(۴) شانزده برابر

(۳) هشت برابر

(۲) چهار برابر

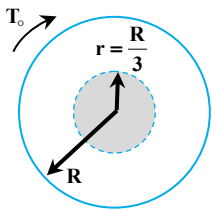
(۱) دو برابر

پاسخ: گزینه «۳» در یک محور توپر مقدار گشتاور انتقالی را بر حسب تنش برشی ماکزیمم می‌توان توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{\max}$$

با فرض ثابت ماندن تنش برشی ماکزیمم، اگر قطر محور تحت گشتاور دو برابر شود، گشتاور پیچشی انتقالی ۸ برابر می‌شود.

مثال ۵: چه سهمی از لنگر خارجی وارد بر محور مدور توسط یک هسته مرکزی از محور به شعاع $\frac{R}{3}$ تحمل می‌شود؟



(۱) تقریباً ۱/۵ درصد

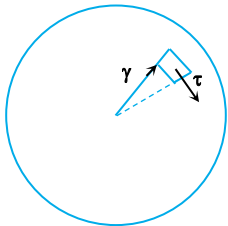
(۲) تقریباً ۸ درصد

(۳) تقریباً ۱۰ درصد

(۴) تقریباً ۱۲ درصد

پاسخ: گزینه «۱» در صورتی که محوری تحت اثر لنگر پیچشی قرار گیرد، هر المان به فاصله r از مرکز محور، تنش برشی به اندازه τ تحمل می‌کند.

این تنش برشی تولید یک گشتاور حول محور مرکزی نموده که با انتگرال‌گیری از آن، گشتاور وارد بر کل محور به دست می‌آید.



$$\tau = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = \tau dA$$

$$dT = r dF = r \tau dA \left. \begin{array}{l} \tau = \tau_{\max} \times \frac{r}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow dT = \frac{\tau_{\max}}{R} r^2 dA$$

توزیع تنش برشی در مقطع محور، یک توزیع خطی بوده و در فاصله شعاعی r تنش برشی بر حسب تنش

برشی ماکزیمم برابر $\tau = \tau_{\max} \frac{r}{R}$ می‌باشد.

اما مساحت المان نشان داده شده در شکل فوق مساوی $r d\theta dr$ می‌باشد، بنابراین:

$$dT = \frac{\tau_{\max}}{R} r^2 dr d\theta \Rightarrow T = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{\pi \tau_{\max} R^3}{2R} \quad (1)$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_0 R}{J} = \frac{T_0 R}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{2T_0}{\pi R^3} \quad (2)$$

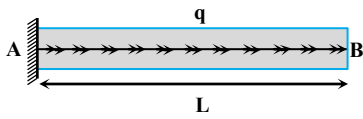
اما از طرفی تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow T = T_0 \frac{R^3}{R^3} \xrightarrow{r=\frac{R}{2}} T = T_0 \times \frac{3}{R^3} \Rightarrow T = T_0 \times \frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right) \times 100 = \frac{100}{81} \approx \% 1.23$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که سهم اندکی از گشتاور پیچشی کل (T_0) توسط هسته مرکزی به شعاع $\frac{R}{3}$ تحمل می‌شود.

مثال ۶: میله AB با ضریب ارتجاعی برشی G و ممان اینرسی قطبی J مطابق شکل زیر در انتهای چپ، گیردار و تحت اثر لنگر پیچشی گسترده با شدت ثابت q می‌باشد. میزان زاویه دوران انتهای B میله چقدر است؟

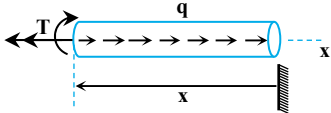
(مهندسی معدن - سراسری ۹۱)



$$\frac{qL^2}{GJ} \quad (۲) \quad \frac{qL}{GJ} \quad (۱)$$

$$\frac{qL^2}{2GJ} \quad (۴) \quad \frac{qL}{2GJ} \quad (۳)$$

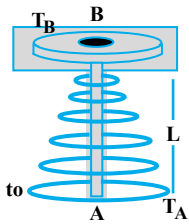
پاسخ: گزینه «۴» چون مقدار لنگر پیچشی داخلی در مقطع استوانه‌ای متغیر است بنابراین باید از رابطه $\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ}$ مقدار زاویه پیچش را محاسبه نمود. اما برای تعیین مقدار T کافی است به فاصله x دلخواه از انتهای محور برش زده و مقدار لنگر داخلی را به دست آورد.



$$\sum T_x = 0 \Rightarrow -T + qx = 0 \Rightarrow T = qx \Rightarrow \phi = \int_0^L \frac{qx}{GJ} dx = \frac{qL^2}{2GJ}$$

مثال ۷: برای فرو کردن یک لوله، یک گشتاور مقاوم T_A در A و یک گشتاور گسترده که مقدار آن از صفر در B تا t_0 در A در واحد طول تغییر می‌کند. زاویه پیچشی (ϕ) یک انتهای لوله نسبت به انتهای دیگر در لحظه‌ای که لوله در آستانه پیچشی است چقدر می‌باشد؟ (شعاع داخلی و خارجی لوله به ترتیب r_1 و r_0 و ضریب الاستیسیته برشی لوله G می‌باشد).

(مهندسی معماری کشتی - سراسری ۹۱)



$$\frac{2\pi(L + 3t_0 T_A)}{3L(r_0^3 - r_1^3)G} \quad (۲) \quad \frac{2\pi(L + 3t_0 T_A)}{3L(r_0^4 - r_1^4)G} \quad (۱)$$

$$\frac{2L(t_0 L + 3T_A)}{3\pi(r_0^4 - r_1^4)G} \quad (۴) \quad \frac{2(L + 3t_0 T_A)}{3\pi(r_0^4 - r_1^4)G} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» تغییرات لنگر پیچشی گسترده t بر حسب x به صورت خطی بوده و طبق رابطه تشابه مثلث به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{x}{L} \Rightarrow t = t_0 \frac{x}{L}$$

اما با نوشتن رابطه تعادل می‌توان مقدار گشتاور پیچشی T_B را به دست آورد.

$$T_B = T_A + \int_0^L t dx = T_A + \int_0^L t_0 \frac{x}{L} dx = T_A + \frac{t_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = T_A + \frac{t_0 L}{2} \quad (۱)$$

اکنون در یک x دلخواه محور را برش زده و دیاگرام آزاد بخش فوقانی مقطع برش خورده را رسم نموده سپس از رابطه تعادل مقدار لنگر داخلی را به دست می‌آوریم:

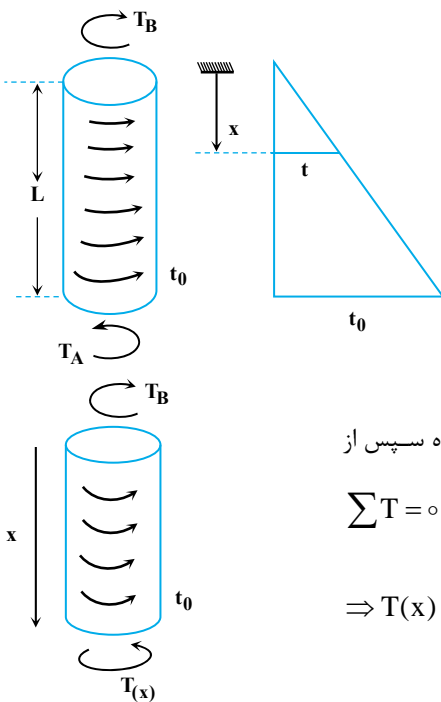
$$\sum T = 0 \Rightarrow T(x) - T_B + \int_0^L t dx = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = T_B - \int_0^x t dx \xrightarrow{(۱)} T(x) = T_A + \frac{t_0 L}{2} - \frac{t_0 x^2}{2L}$$

با استفاده از مقدار $T(x)$ زاویه پیچش مقطع A نسبت به مقطع B را توسط رابطه ذیل محاسبه می‌کنیم:

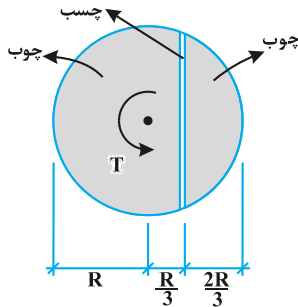
$$\phi_{A/B} = \int_0^L \frac{T(x) dx}{GJ} = \frac{1}{G \frac{\pi}{2} (r_0^4 - r_1^4)} \int_0^L \left[T_A + \frac{t_0 L}{2} - \frac{t_0 x^2}{2L} \right] dx$$

$$\Rightarrow \phi_{A/B} = \frac{2}{\pi G (r_0^4 - r_1^4)} \left[T_A L + \frac{t_0 L^2}{2} - \frac{t_0 L^3}{6} \right] = \frac{2L(3T_A + t_0 L)}{3\pi G (r_0^4 - r_1^4)}$$



مثال ۸: عضوی به طول L با مقطع دایره‌ای مطابق شکل زیر تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. در صورتی که مقطع از دو قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل‌اند تشکیل شده باشد، حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط مقطع، کدام است؟ (مهندسی عمران - سراسری ۹۲)

τ = تنش برشی مجاز چسب، $\tau = 2/5 \tau$ = تنش برشی مجاز چوب



$$\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} R^3 \quad (1) \quad \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R^3 \quad (2)$$

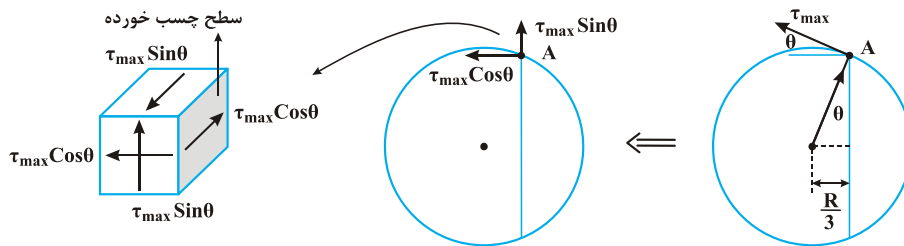
$$\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} R^3 \quad (3) \quad \frac{2\pi}{3\sqrt{2}} R^3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» حداکثر کوپل پیچشی را می‌توان جداگانه با توجه به تنش برشی مجاز چوب و چسب محاسبه نمود.

۱- محاسبه حداکثر کوپل پیچشی با استفاده از تنش برشی مجاز چوب:

$$1) \tau_{\max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow \tau = \frac{2T}{5\pi R^3} \Rightarrow T = \frac{2/5\pi R^3 \tau}{2} = 1/25\pi R^3 \tau$$

۲- محاسبه حداکثر کوپل پیچشی با استفاده از تنش برشی مجاز چسب: در ابتدا باید در دورترین نقطه‌ی چسب که نقطه‌ی A می‌باشد تنش برشی را محاسبه نموده و سپس مؤلفه‌ی آن را در راستای افقی به دست آورد.



همان‌طور که در المان حجمی فوق در نقطه‌ی A مشاهده می‌شود، سطح چسب‌خورده تحت تنش برشی $\tau_{\max} \cos \theta$ می‌باشد که حداکثر این تنش باید برابر تنش برشی مجاز چسب یعنی τ شود در نتیجه داریم:

$$2) \tau_{\max} \cos \theta = \frac{TR}{J} \times \frac{\sqrt{R^2 - (\frac{R}{3})^2}}{R} \Rightarrow \tau = \frac{2T}{\pi R^3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} R^3$$

از بین پاسخ‌های (۱) و (۲)، پاسخ (۲) کوچک‌تر بوده بنابراین پاسخ مطلوب می‌باشد.

مثال ۹: میله‌ای با مقطع دایره‌ای، به طول $2m$ و شعاع مقطع $5cm$ مفروض است. حداکثر چند رادیان می‌توان میله را پیچاند، تا به نقطه‌ی تسلیم

نرسد؟ تنش مجاز برشی $\tau_a = 1000 \frac{kg}{cm^2}$ ، مدول ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ و ضریب پواسون $\nu = 0/25$ است. (دکتری ۹۲)

۰/۰۵ (۴)

۰/۰۴ (۳)

۰/۰۲۵ (۲)

۰/۰۲ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به روابط زیر می‌توان مقدار حداکثر زاویه پیچش در محدوده ارتجاعی را به دست آورد:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{TL}{GJ} \\ \tau_{\max} &= \tau_a = \frac{TR}{J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\phi}{\tau_a} = \frac{TL}{\frac{TR}{J}} = \frac{L}{RG} = \frac{200cm}{5cm \times \frac{2 \times 10^6 kg}{2 \times (1 + 0/25) cm^2}} \Rightarrow \frac{\phi}{\tau_a} = \frac{200}{5 \times \frac{10^6}{1/25}} = 5 \times 10^{-5} \Rightarrow \phi = \tau_a \times 5 \times 10^{-5} \Rightarrow \phi = 5 \times 10^{-2} = 0/05 rad$$

مثال ۱۰: یک شفت با قطر خارجی 20 mm تحت یک لنگر پیچشی یکنواخت به مقدار $100 \frac{\text{kN.m}}{\text{m}}$ مؤثر در روی قسمت AB در شکل مفروض است.

(دکتری ۹۳)

اندازه‌ی دو کمیت زیر کدام است؟ ($G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$)

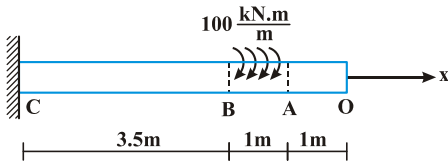
ماکزیمم تنش برشی τ_{\max} بر حسب $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ، زاویه‌ی چرخش «O» نسبت به «C» بر حسب رادیان

$$(1) \quad \phi = 418/3 \text{ و } \tau_{\max} = 63 \times 10^9$$

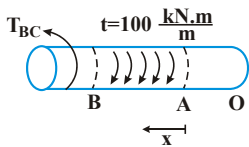
$$(2) \quad \phi = 318/3 \text{ و } \tau_{\max} = 43 \times 10^9$$

$$(3) \quad \phi = 418/3 \text{ و } \tau_{\max} = 43 \times 10^9$$

$$(4) \quad \phi = 318/3 \text{ و } \tau_{\max} = 63 \times 10^9$$



پاسخ: گزینه «۴» بیشترین لنگر پیچشی در بخش BC شفت ایجاد شده که مقدار آن برابر است با:



$$T_{BC} = 100 \times 1 = 100 \text{ kN.m} = 10^5 \text{ N.m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16 \times 10^5}{\pi \times 0.02^3} = 63/66 \times 10^9 \text{ pa}$$

از طرفی حداکثر تنش برشی در قسمت BC برابر است با:

همچنین زاویه پیچش مقطع O نسبت به تکیه‌گاه C برابر است با:

$$\phi_O = \phi_{\frac{O}{A}} + \phi_{\frac{A}{B}} + \phi_{\frac{B}{C}} = 0 + \int_0^1 \frac{T dx}{GJ} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ} \Rightarrow \phi_O = \int_0^1 \frac{t x dx}{GJ} + \frac{10^5 \times 3/5}{GJ} = \frac{1}{GJ} \left[\int_0^1 10^5 dx + 3/5 \times 10^5 \right]$$

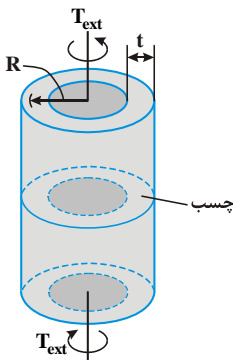
$$\Rightarrow \phi_O = \frac{1}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} (0.02)^3} \left[10^5 \times \frac{1}{2} + 3/5 \times 10^5 \right] = 318/3 \text{ rad}$$

مثال ۱۱: شکل زیر آزمایشی را نشان می‌دهد که به منظور اندازه‌گیری استحکام برشی چسب مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این آزمایش گشتاور

پیچشی مطابق شکل به دو استوانه که با چسب موردنظر به هم متصل شده‌اند، اعمال می‌شود. با فرض توزیع یکنواخت تنش برشی τ در چسب، رابطه

(مهندسی مکانیک - سراسری ۹۵)

تنش برشی با گشتاور اعمالی، ضخامت و شعاع استوانه‌ها کدام است؟

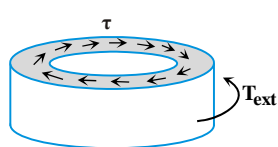


$$(1) \quad \tau = \frac{T_{\text{ext}}}{2\pi R^2 t}$$

$$(2) \quad \tau = \frac{2T_{\text{ext}}}{\pi R^2 t}$$

$$(3) \quad \tau = \frac{T_{\text{ext}}}{4\pi R^2 t}$$

$$(4) \quad \tau = \frac{T_{\text{ext}}}{\pi R^2 t}$$



پاسخ: گزینه «۱» لنگر پیچشی خارجی در سطح چسب‌خورده تولید تنش برشی می‌کند که مقدار آن توسط

رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\sum T = 0 \Rightarrow -T_{\text{ext}} + (\tau A)R = 0 \Rightarrow \tau = \frac{T_{\text{ext}}}{2\pi R t \times R} \Rightarrow \tau = \frac{T_{\text{ext}}}{2\pi R^2 t}$$

مثال ۱۲: معادلات زاویه‌ی پیچش $\theta = \frac{TL}{GJ}$ و تنش برشی $\tau = \frac{T\rho}{J}$ برای یک قطعه‌ی مکانیکی که از قانون «هوک» پیروی می‌کند و تحت گشتاور

(مهندسی ایمنی و بازرسی فنی - سراسری ۹۵)

پیچشی خالص T قرار دارد، تنها برای کدام مقاطع معتبر است؟

(۴) توخالی

(۳) توپُر

(۲) چندضلعی منتظم

(۱) گرد توپُر و توخالی

پاسخ: گزینه «۱» روابط $\theta = \frac{TL}{GJ}$ و $\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنها برای مقاطع مدور توپُر و توخالی صادق است.

مثال ۱۳: یک محور مدور توپر به قطر D و طول L تحت تأثیر گشتاور پیچشی T قرار دارد. در صورتی که سوراخی به قطر $d = \frac{D}{4}$ در طول محور ایجاد شود و گشتاور پیچشی نیز دو برابر شود، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در محور در این حالت چند برابر محور مدور توپر است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم - سراسری ۹۵)

(۴) ۸

(۳) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$

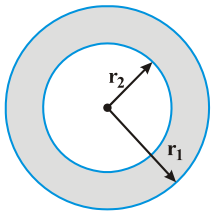
(۱) ۴

پاسخ: هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به داده‌های مسئله می‌توان نوشت:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{TR_2}{J_2}}{\frac{TR_1}{J_1}} = \frac{\frac{2T \times \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32}(D^4 - (\frac{D}{4})^4)}}{\frac{T \times \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32}D^4}} = \frac{2 \times D^4}{(D^4 - \frac{D^4}{16})} = \frac{2D^4}{\frac{15}{16}D^4} = \frac{32}{15}$$

احتمالاً طراح سؤال در محاسبات و ساده‌سازی عبارت نهایی دچار خطای محاسباتی شده است و گزینه‌ی (۲) را صحیح اعلام کرده که نادرست است.

مثال ۱۴: یک محور توخالی فولادی مطابق شکل زیر، دارای شعاع خارجی $r_1 = 12/5 \text{ cm}$ ، شعاع داخلی r_2 و طول 10 m دارای گشتاور ماند قطبی سطح برابر $J = 0/25 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ است. اگر تنش برشی حداکثر این جسم 100 MPa و مدول برشی فولاد 100 GPa باشد، زاویه چرخش θ برحسب رادیان چقدر خواهد بود؟ (مهندسی معدن - سراسری ۹۶)



(۱) ۰/۰۸

(۲) ۰/۰۶

(۳) ۰/۰۴

(۴) ۰/۰۲

پاسخ: گزینه «۱» زاویه پیچش و تنش برشی ماکزیمم در یک محور مدور طبق رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{TL}{GJ} \\ \tau_{\max} &= \frac{TR}{J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\phi}{\tau_{\max}} = \frac{L}{RG} \Rightarrow \phi = 100 \times 10^6 \times \frac{10}{0/125 \times 100 \times 10^9} \Rightarrow \phi = 0/08 \text{ rad}$$

مثال ۱۵: ماکزیمم زاویه مجاز پیچش یک شافت به قطر 1 in ، طول 3 in ، تنش مجاز 10000 psi و $G = 12000000 \text{ psi}$ ، چند رادیان است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی - سراسری ۹۶)

(۴) ۰/۰۴

(۳) ۰/۰۵

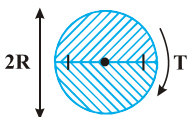
(۲) ۰/۰۷

(۱) ۰/۰۸

پاسخ: گزینه «۳» حداکثر تنش برشی و زاویه‌ی پیچشی در یک محور مدور برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{TL}{GJ} \\ \tau_{\text{all}} &= \frac{TR}{J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\phi}{\tau_{\text{all}}} = \frac{L}{RG} \Rightarrow \frac{\phi}{10000} = \frac{3}{0/5 \times 12 \times 10^6} \Rightarrow \phi = \frac{3 \times 10^5}{6 \times 10^6} = \frac{1}{20} = 0/05 \text{ rad}$$

مثال ۱۶: مقطع دایره‌ای داده شده از دو مقطع نیم‌دایره تشکیل شده است و تحت تنش برشی قرار دارد. در صورتی که حداکثر تنش مجاز برشی میخ‌ها 10 برابر تنش مجاز برش چوب باشد، قطر میخ‌ها کدام است؟ میخ‌ها به فاصله یک متر در طول قرار گرفته‌اند؟ (مهندسی در سوانح طبیعی - سراسری ۹۶)



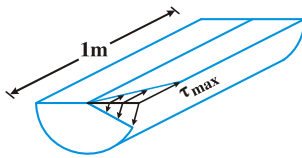
$$D = \sqrt{\frac{R}{4\pi}} \quad (2)$$

$$D = \sqrt{\frac{R}{5\pi}} \quad (1)$$

$$D = \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \quad (4)$$

$$D = \sqrt{\frac{R}{3\pi}} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» نیمی از محور چوبی به همراه توزیع تنش ناشی از پیچش در شکل زیر نشان داده شده است.



$$\frac{1}{2} \tau_{\max} \times (1 \times R) = \tau_s \times \frac{\pi D^2}{4} \quad (1)$$

طبق قانون تعادل می‌توان نوشت:

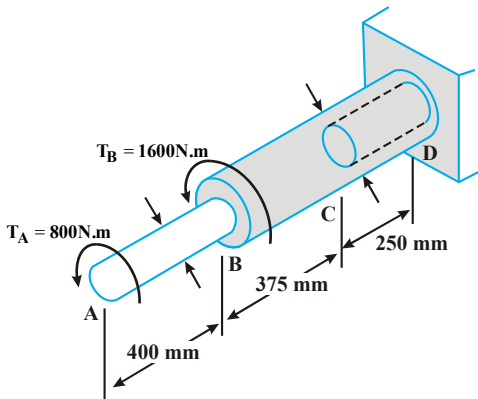
τ_{\max} حداکثر تنش برشی مجاز در چوب و τ_s حداکثر تنش برشی مجاز در میخ است.

$$\tau_s = 10 \tau_{\max} \xrightarrow{(1)} \frac{R}{\frac{1}{2}} = 10 \times \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4R}{20\pi}} = \sqrt{\frac{R}{5\pi}}$$

مثال ۱۷: میله آلومینیومی AB با $G = 24 \text{ GPa}$ به میله برنجی BD با $G = 48 \text{ GPa}$ متصل شده است. اگر لنگر لختی هر بخش از تیر به قرار زیر

(مهندسی مکانیک بیوسیستم - سراسری ۹۶)

باشد، زاویه پیچش در A چند رادیان است؟



$$T_A = 800 \text{ N.m}$$

$$T_B = 1600 \text{ N.m}$$

$$AB = 400 \text{ mm}$$

$$BC = 375 \text{ mm}$$

$$CD = 250 \text{ mm}$$

$$J_{CD} = 0.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = 0.375 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{AB} = 0.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

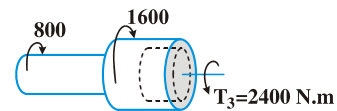
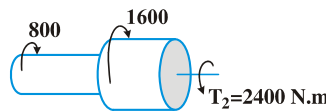
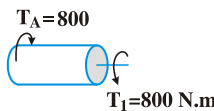
$$0.105 \quad (1)$$

$$0.133 \quad (2)$$

$$0.256 \quad (3)$$

$$0.7 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه زاویه پیچش در مقطع A، ابتدا باید در بخش‌های مختلف میله مرکب برش زده و لنگر داخلی را به دست آورد.

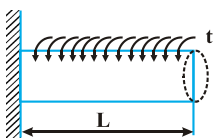


$$\phi_A = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} + \frac{T_2 L_2}{G_2 J_2} + \frac{T_3 L_3}{G_3 J_3}$$

$$\Rightarrow \phi_A = \frac{800 \times 0.4}{24 \times 10^9 \times 0.4 \times 10^{-6}} + \frac{2400 \times 0.375}{48 \times 10^9 \times 0.375 \times 10^{-6}} + \frac{2400 \times 0.25}{48 \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-6}} = \frac{2}{15} \text{ rad} = 0.133 \text{ rad}$$

مثال ۱۸: میله روبه‌رو، به صورت گسترده تحت گشتاور پیچشی قرار گرفته است. زاویه پیچش در انتهای میله کدام است.

(مهندسی معدن - سراسری ۹۸)



$$\theta = \frac{tL^2}{2GJ} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{2tL}{3GJ} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{tL}{GJ} \quad (3)$$

$$\theta = \frac{tL^2}{GJ} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» زاویه پیچش در میله تحت بار گسترده پیچشی برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \int_0^L \frac{T dx}{GJ} \\ T &= tx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi = \frac{t}{GJ} \int_0^L x dx = \frac{tL^2}{2GJ}$$



مدرسان شریف

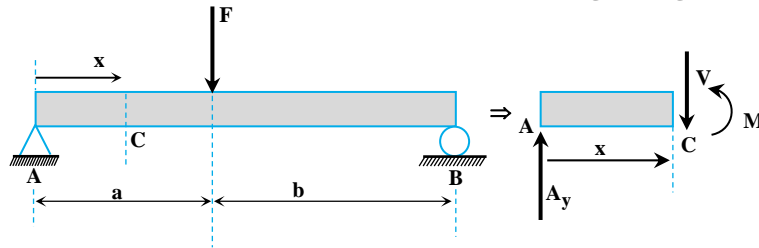
فصل سوم

«خمش»

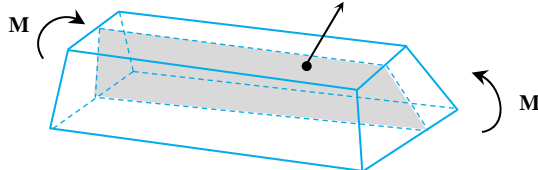
درسنامه (I): خمش ساده، خمش متقارن



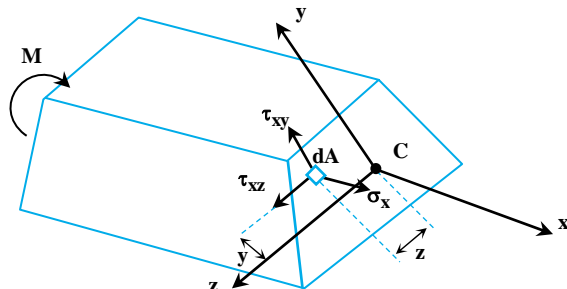
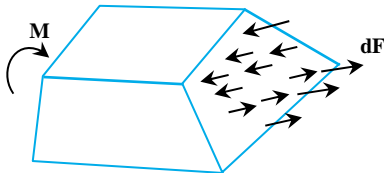
در این فصل تنش‌ها و کرنش‌ها در تیرهایی که تحت گشتاورهای مساوی و مختلف‌الجهت M و M' از دو طرف تیر و در یک صفحه قرار گرفته‌اند با تیرهایی که تحت بارگذاری عرضی قرار گرفته‌اند، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. مطابق شکل زیر اگر یک تیر تحت بارگذاری عرضی قرار گیرد، در هر مقطع دلخواه آن، به منظور حفظ تعادل بخش جدا شده از تیر (بخش AC) نیروی برشی V و یک لنگر خمشی داخلی M وارد می‌شود. در اصل نیروی برشی V و لنگر خمشی M حاصل برآیند نیروهای داخلی توزیع شده در سطح مقطع برش خورده می‌باشند که در درس استاتیک به صورت مؤلفه‌های متمرکز نمایش داده شدند. اما در درس مقاومت مصالح، نیروهای داخلی توزیع شده در سطح مقطع برش خورده ایجاد تنش نموده که به تنش ناشی از نیروی برش، تنش برشی و به تنش ناشی از لنگر خمشی، تنش خمشی گفته می‌شود.



صفحه‌ای که کوپل خمشی M در آن اعمال شده است.



جسم تحت اثر خمش حاصل ($v = 0$)



ابتدا فرض می‌شود که جسم نسبت به صفحه کوپل اعمالی متقارن است، همچنین جسم تحت اثر لنگر خمشی خالص قرار گرفته است، به عبارت دیگر نیروی داخلی برش، در تیر برابر صفر می‌باشد. چنین وضعیتی را می‌توان در شکل روبرو مشاهده نمود. در این شکل، جسم تحت اثر دو کوپل خمشی مساوی و مختلف‌الجهت قرار گرفته است.

اگر بخشی از جسم تحت خمش خالص، جدا شده و دیاگرام آزاد آن، مطابق شکل مقابل رسم شود، در مقطع برش خورده، بارهای گسترده سطحی وجود خواهند داشت که تولید تنش قائم می‌کنند. با توجه به نحوه اعمال لنگر خمشی خارجی M ، انتظار می‌رود که جسم در تارهای فوقانی تحت فشار قرار گرفته و در تارهای تحتانی، تحت کشش قرار گیرند.

در شکل روبرو دستگاه محورهای مختصات در مقطع برش خورده به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مبدأ مختصات منطبق بر مرکز هندسی سطح مقطع و محور طولی جسم در راستای X بوده و محورهای Y و Z در سطح مقطع عرضی جسم واقع شوند. با توجه به این که کوپل خمشی M در راستای محور Z بر جسم اعمال شده، بنابراین توزیع نیروهای داخلی در مقطع برش خورده باید کوپلی مساوی و در جهت مخالف آن ایجاد کند تا تعادل برای تیر برقرار باشد. یک المان دلخواه از سطح مقطع عرضی جسم به فاصله y از محور عرضی Z و فاصله z از محور عرضی Y در نظر گرفته می‌شود. این المان تحت اثر نیروی dF دارای سه مؤلفه تنش σ_x ، τ_{xy} ، τ_{xz} است.

مؤلفه σ_x تنش قائم یا تنش نرمال بوده و τ_{xy} و τ_{xz} مؤلفه‌های تنش برشی می‌باشند. لازم به ذکر است که اندیس اول در تنش برشی، محور عمود بر صفحه المان بوده و اندیس دوم، راستای تنش را نشان می‌دهد. برآیند تنش‌های وارد بر المان‌ها، باید تولید یک لنگر خمشی M مساوی و مخالف با جهت لنگر M خارجی کنند. بنابراین با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی بین نیروهای المان داخلی و کوپل M خارجی، می‌توان نوشت:

(۱) چون نیروی محوری خارجی بر جسم اعمال نمی‌شود، بنابراین باید مجموع نیروهای محوری داخلی مساوی صفر باشد.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int dF_x = 0 \xrightarrow{\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \text{ از طرفی در المان داریم}} \int \sigma_x dA = 0 \quad (۱)$$

(۲) چون نیروی برشی خارجی (بارگذاری عرضی) بر جسم اعمال نمی‌شود، بنابراین باید مجموع نیروهای برشی داخلی (تنش‌های برشی)، برابر صفر باشد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \int F_y = 0 \xrightarrow{\tau_{xy} = \frac{dF_y}{dA}} \int \tau_{xy} dA = 0 \quad (۲)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \int dF_z = 0 \xrightarrow{\tau_{xz} = \frac{dF_z}{dA}} \int \tau_{xz} dA = 0 \quad (۳)$$

(۳) چون تنها لنگر خارجی وارد بر جسم، حول محور عرضی Z می‌باشد، نیروهای المانی داخلی باید به گونه‌ای باشند که لنگر مذکور را خنثی نمایند.

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int z dF_x = 0 \xrightarrow{\sigma_x = \frac{dF_x}{dA}} \int z \sigma_x dA = 0 \quad (۴)$$

مؤلفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{xz} حول محور Y تولید لنگر یا ممان نمی‌کنند، چرا که با این محور متقاطع می‌باشند.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \int y dF_z - \int z dF_y = 0 \xrightarrow{\tau_{xy} = \frac{dF_y}{dA} \quad \tau_{xz} = \frac{dF_z}{dA}} \int y \tau_{xz} dA - \int z \tau_{xy} dA = 0 \Rightarrow \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA = 0 \quad (۵)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M + \int y dF_x = 0 \xrightarrow{\sigma_x = \frac{dF_x}{dA}} \Rightarrow - \int y \sigma_x dA = M \quad (۶)$$

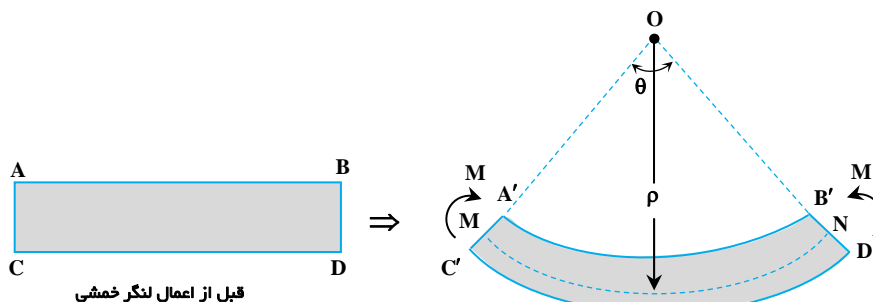
روابط (۲) و (۳) از مجموع روابط در صورتی برقرار می‌باشند که مؤلفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{xz} برابر صفر باشند. بنابراین رابطه (۵) نیز ارضاء شده و شش رابطه فوق به سه رابطه زیر تقلیل می‌یابند.

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (۷)$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad (۸)$$

$$- \int y \sigma_x dA = M \quad (۹)$$

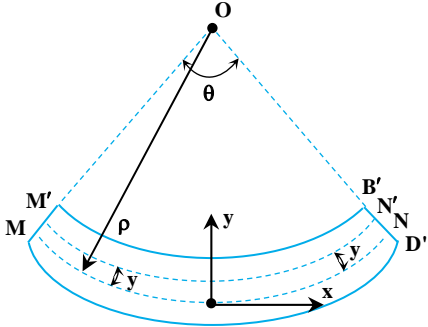
با توجه به آن که کوپل خمشی M در صفحه تقارن جسم اثر می‌کند، بنابراین رابطه (۸) نیز برقرار خواهد بود، اما روابط (۷) و (۹) دارای اهمیت بوده که در ادامه به بحث بیشتری درباره آن پرداخته می‌شود. در اینجا لازم به ذکر است که تنها با استفاده از روابط استاتیک (۷) و (۹) نمی‌توان نحوه توزیع تنش σ_x را در سطح مقطع داخلی جسم تعیین کرد، زیرا که پخش واقعی تنش‌ها از لحاظ استاتیکی نامعین است و تنها با استفاده از تحلیل تغییر شکل‌های به وجود آمده در جسم قادر خواهیم بود به توزیع واقعی تنش دست یابیم. برای تحلیل تغییر شکل، یک تیر مستقیم در نظر گرفته شده است که تحت لنگر خمشی مثبت مطابق شکل زیر می‌باشد:



در این حالت لایه‌های فوقانی تیر تحت فشار ($\sigma_x < 0$) و لایه‌های تحتانی، تحت کشش ($\sigma_x > 0$) قرار می‌گیرند. در تیر یک سطحی که به موازات سطوح فوقانی و تحتانی تیر است (سطح MN)، باید وجود داشته باشد که در روی آن مقدار تنش برابر صفر باشد، به این سطح، **سطح خنثی** یا **تار خنثی** گفته می‌شود. به عبارت دیگر، طول تار خنثی، قبل و بعد از اعمال گشتاور، یکسان باقی می‌ماند. یعنی اگر طول تیر قبل از بارگذاری L بوده، بعد از اعمال بار، طول کمان \widehat{MN} که همان تار خنثی می‌باشد، همچنان برابر L خواهند بود.

در تیر تحت خمش، مقاطع $A'C'$ و $B'D'$ بر خلاف تیر مستقیم موازی نبوده، بلکه امتدادشان یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. به این نقطه مرکز انحناء گفته شده و فاصله این نقطه تا تار خنثی یا سطح خنثی که با ρ نمایش داده شده، **شعاع انحناء** نامیده می‌شود. اکنون مطابق شکل مبدأ دستگاه مختصات روی تار خنثی قرار داده می‌شود. طول تار MN را می‌توان مطابق شکل توسط زاویه مرکزی θ به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\widehat{MN} = \text{طول کمان} = \rho\theta$$



چون تار خنثی بر کمان MN منطبق است، بنابراین طول این کمان با طول اولیه تیر قبل از خمش برابر است. اکنون در یک فاصله y از تار خنثی تار $M'N'$ در نظر گرفته می‌شود. طول این تار بر حسب زاویه مرکزی θ برابر است با:

$$\widehat{M'N'} = (\rho - y)\theta$$

این در حالی است که طول اولیه این کمان قبل از خمش برابر $\rho\theta$ بوده، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تغییر طول تار ناشی از خمش برابر است با:

$$\delta = \widehat{M'N'} - \widehat{MN} = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

از رابطه فوق می‌توان مقدار کرنش محوری در طول تار $M'N'$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{\text{تغییر طول کمان}}{\text{طول اولیه کمان}} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}}$$

چون تار $M'N'$ یک تار طولی دلخواه از تیر بوده، می‌توان نتیجه گرفت که در سرتاسر عضو تحت خمش، کرنش محوری (کرنش قائم) نسبت به فاصله y از تار خنثی، به صورت خطی تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که در بیشترین فاصله از تار خنثی، کرنش محوری دارای حداکثر مقدار باشد. (ϵ_{\max} قدرمطلق کرنش ماکزیمم است.)

$$\epsilon_{\max} = \frac{y_{\max}}{\rho} \xrightarrow{y_{\max} = C} \boxed{\epsilon_{\max} = \frac{C}{\rho}}$$

در رابطه فوق بیانگر حداکثر فاصله سطوح فوقانی و تحتانی تیر، از تار خنثی می‌باشد. از تقسیم روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{\max}} = -\frac{y}{C} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = -\frac{y}{C} \epsilon_{\max}}$$

روابط فوق چون براساس تغییر شکل‌های هندسی نوشته شده و مستقل از نوع جنس ماده و محدوده بارگذاری است، بنابراین برای ناحیه ارتجاعی (الاستیک) و ناحیه خمیری (پلاستیک) صادق خواهند بود.

اما اگر لنگر خمشی وارد بر جسم به گونه‌ای باشد که تنش‌های ایجاد شده در محدوده ارتجاعی باشند، بنابراین قانون هوک برقرار است و می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E\epsilon_x \Rightarrow \sigma_x = E\left(-\frac{y}{\rho}\right) = \frac{Ey}{\rho} \\ \sigma_{\max} &= E\epsilon_{\max} \Rightarrow \sigma_{\max} = E\frac{C}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{y}{C} \sigma_{\max}}$$

از رابطه فوق نیز می‌توان نتیجه گرفت که تنش ناشی از خمش در محدوده ارتجاعی، با تغییر فاصله از تار خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند. اکنون به رابطه استاتیکی $\int \sigma_x dA = 0$ باز می‌گردیم. با توجه به این که (نحوه توزیع) تنش در سطح مقطع عرضی تعیین شد، می‌توان نوشت:

$$\int \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int \frac{-y}{C} \sigma_{\max} dA = 0 \Rightarrow \frac{-\sigma_{\max}}{C} \int y dA = 0 \Rightarrow \int y dA = Q = 0$$

رابطه فوق بیانگر آن است که ممان اول سطح مقطع (ممان استاتیکی)، که آن را با Q نشان می‌دهند، نسبت به تار خنثی برابر صفر می‌باشد. این به معنای آن است که تار خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی جسم عبور می‌کند.

تذکره: برای یک عضو تحت خمش خالص، تا زمانی که مقدار تنش‌ها در محدوده ارتجاعی هستند، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی تیر می‌گذرد.

اما از دیگر رابطه تعادل استاتیکی، می‌توان ارتباط بین مقدار لنگر خمشی و تنش در هر نقطه از مقطع را تعیین نمود.

$$-\int y \sigma_x dA = M \xrightarrow{\sigma_x = \frac{-y}{C} \sigma_{\max}} -\int y \times \frac{-y}{C} \sigma_{\max} dA = M$$

مقدار σ_{\max} و C ثابت بوده و از داخل انتگرال بیرون می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\sigma_{\max}}{C} \int y^2 dA = M$$

اما حاصل انتگرال $\int y^2 dA$ با I نمایش داده شده بوده که به ممان اینرسی یا گشتاور دوم سطح معروف است. بنابراین رابطه فوق به شکل ساده زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sigma_{\max}}{C} I = M \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{MC}{I}$$

یا

$$\sigma_x = \frac{-My}{I}$$

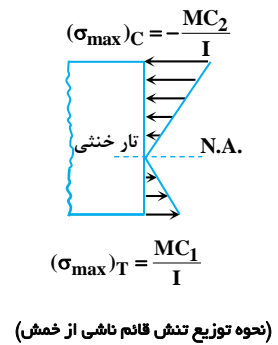
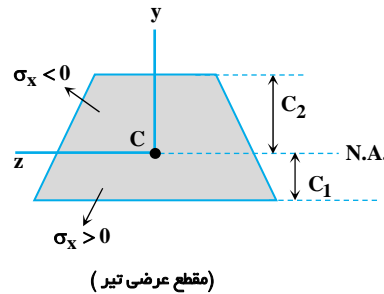
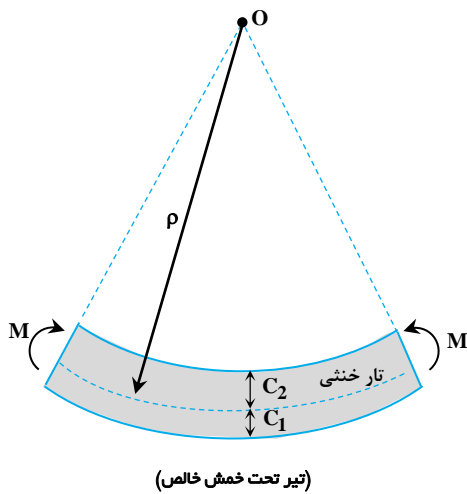
$$\sigma_x = \frac{-y}{C} \sigma_{\max} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = E \varepsilon_{\max} \Rightarrow \frac{MC}{I} = E \frac{C}{\rho} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

به مقدار عکس شعاع انحناء $\frac{1}{\rho}$ ، انحنای تیر گفته می‌شود.

اکنون برای درک بهتر در شکل‌های زیر نحوه توزیع تنش ناشی از خمش، ترسیم شده است.

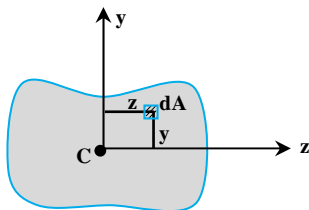


در رابطه $\sigma_x = \frac{My}{I}$ ، ممان اینرسی I حول محور عرضی Z می‌باشد، از طرفی تار خنثی از مرکز سطح عبور نموده و بر محور Z منطبق است، پس می‌توان نتیجه گرفت که در خمش ساده اعضاء (خمش متقارن)، برای محاسبه تنش ناشی از خمش، باید ممان اینرسی حول محور خنثی محاسبه گردد. همچنین در این حالت بردار کوپل M و تار خنثی بر هم منطبق می‌باشند.

در محاسبات مربوط به خمش ساده اعضاء، برای محاسبه تنش ناشی از خمش، باید ممان اینرسی حول تار خنثی محاسبه شود.

یادآوری: ممان اینرسی یا گشتاور دوم سطح یک کمیت همواره مثبت بوده که می‌توان برای یک سطح

دلخواه مانند A آن را به طریق زیر محاسبه نمود:



$$I_z = \int y^2 dA \quad \text{ممان اینرسی حول محور } z$$

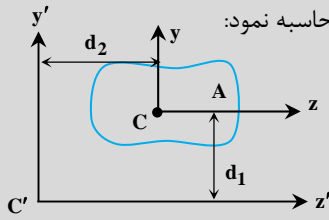
$$I_y = \int z^2 dA \quad \text{ممان اینرسی حول محور } y$$

اما کمیت دیگری نیز تحت عنوان حاصل ضرب اینرسی وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{yz} = \int yz dA \quad \text{حاصل ضرب اینرسی حول محورهای } z, y$$

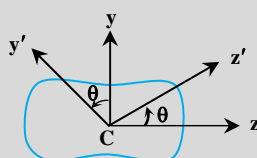
این کمیت برخلاف ممان اینرسی می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر شود.

تذکره ۲: اگر ممان اینرسی و حاصل ضرب اینرسی حول محورهای گذرنده از مرکز سطح مانند Y و Z مشخص باشد با استفاده از قضیه انتقال محورها می‌توان ممان اینرسی و حاصل ضرب اینرسی را حول محورهای موازی آن‌ها مانند Y' و Z' به ترتیب به صورت زیر محاسبه نمود:



$$\begin{cases} I_{Z'} = I_Z + Ad_2^2 \\ I_{Y'} = I_Y + Ad_1^2 \\ I_{Y'Z'} = I_{YZ} + Ad_1d_2 \end{cases}$$

تذکره ۳: اگر محورهای مرکزی Z و Y حول محوری عمود بر صفحه دوران کنند، ممان اینرسی حول محورهای دوران یافته با تغییر زاویه دوران تغییر نموده که می‌توان مقادیر آن را توسط روابط زیر محاسبه نمود:



$$\begin{cases} I_{Z'} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cos 2\theta - I_{ZY} \sin 2\theta \\ I_{Y'} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{I_Z - I_Y}{2} \cos 2\theta + I_{ZY} \sin 2\theta \\ I_{Z'Y'} = \frac{I_Z - I_Y}{2} \sin 2\theta + I_{ZY} \cos 2\theta \end{cases}$$

محورهای اصلی اینرسی: محورهایی در صفحه وجود داشته که ممان اینرسی حول این محورها دارای مقادیر اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) است. به این محورها، محورهای اصلی اینرسی گفته می‌شود. محورهای اصلی اینرسی دارای این ویژگی منحصر به فرد هستند که حاصل ضرب اینرسی سطح مقطع این محورها مساوی صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$I_{YZ} = 0 \Rightarrow I_Y, I_Z = (I_{\max} \text{ یا } I_{\min})$$

اما مقادیر اکسترمم ممان اینرسی را می‌توان توسط روابط زیر محاسبه نمود:

$$I_{\max, \min} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{ZY}^2}$$

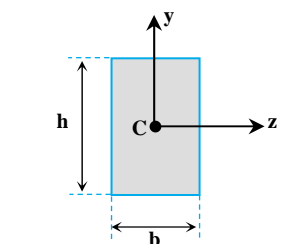
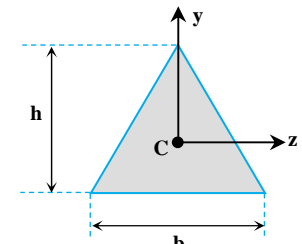
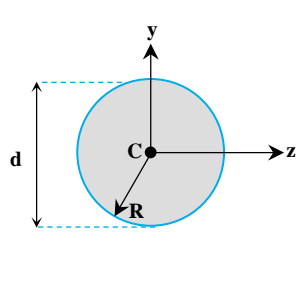
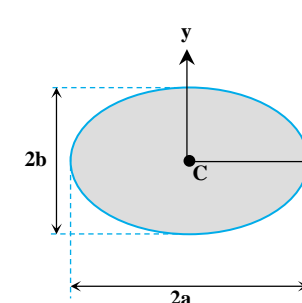
به محوری که ممان اینرسی حول آن دارای مقدار ماکزیمم (I_{\max}) است، محور قوی گفته شده، از طرفی به محوری که ممان اینرسی حول آن دارای مقدار حداقل است (I_{\min}) محور ضعیف گفته می‌شود. ممان اینرسی برای سطوح ساده حول محورهای اصلی با استفاده از روابط قبل محاسبه شده و نتایج آن در جداول خواص سطوح موجود می‌باشد.

ممان اینرسی حول محورهای اصلی را معمولاً با I_x و I_y نمایش می‌دهند. از طرفی زاویه بین محورهای اصلی اینرسی و محورهای Z, Y توسط رابطه زیر

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2I_{ZY}}{I_Z - I_Y}$$

تعیین می‌شود:

ممان اینرسی حول محورهای اصلی برای چند سطح که در این فصل پر کاربرد بوده، در زیر آورده می‌شود. برای آشنایی بیشتر با فرمول‌های ممان اینرسی سطوح مختلف می‌توان به جداول پیوست (B) در انتهای کتاب مراجعه نمود:

	$I_Z = \frac{bh^3}{12}$ $I_Y = \frac{hb^3}{12}$		$I_Z = \frac{bh^3}{36}$ $I_Y = \frac{hb^3}{48}$
	$I_Z = I_Y = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_Z = I_Y = \frac{\pi d^4}{64}$		$I_Z = \frac{\pi ab^3}{4}$ $I_Y = \frac{\pi ba^3}{4}$



مدرسان شریف

فصل چهارم

«برش»

درسنامه (۱): بارگذاری عرضی بر روی تیرها



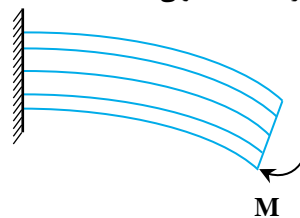
بارگذاری عرضی

در صورتی که تیری تحت اثر لنگر خمشی خالص باشد در مقطع عرضی تیر تنها تنش‌های عمودی به وجود می‌آیند. اما اگر تحت اثر بارگذاری عرضی قرار گیرد علاوه بر تنش‌های عمودی، تحت تأثیر تنش‌های برشی نیز قرار می‌گیرد. این تنش برشی در هر نقطه از تیر در مقاطع عرضی تیر و همچنین در صفحات طولی تیر به وجود می‌آید که از لحاظ عددی با یکدیگر مساوی می‌باشند.

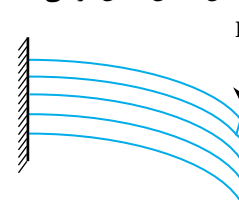
برای درک بهتر پدیده برش در صفحات طولی کافی است مطابق شکل زیر، تیر متشکل از چندین الوار چوبی را یک بار تحت لنگر خمشی خالص و بار دیگر تحت نیروی عرضی F قرار دهیم. همان طور که مشاهده می‌شود در حالت (الف) که تیرها تحت بارگذاری خمشی خالص هستند، الوارها به صورت کمان‌های هم مرکز خم شده‌اند، در حالی که در حالت (ب) که بارگذاری عرضی می‌باشد علاوه بر خمش یک لغزش بین آن‌ها در انتهای الوارها مشاهده می‌شود، این لغزش به دلیل همان تنش برشی ایجاد شده در صفحات طولی است.



تیر متشکل از چند الوار

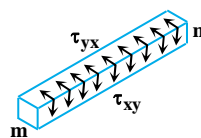
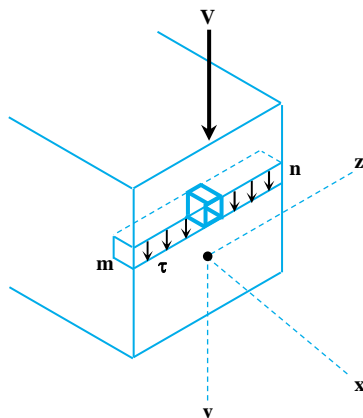


(الف) بارگذاری خمشی خالص

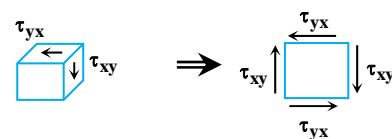


(ب) بارگذاری عرضی

اما دلیل ایجاد تنش برشی در صفحات طولی آن است که اگر تیر مطابق شکل زیر تحت بارگذاری عرضی قرار گیرد در تار $(m - n)$ در صفحه عرضی (صفحه YZ) تنش برشی τ ایجاد می‌شود. به همین دلیل در یک المان دلخواه از این تار نیز، مطابق شکل تنش برش τ ایجاد می‌شود، اما طبق تعادل استاتیکی المان، هرگاه بر وجوه قائم المان تنش برشی اعمال شود، بر وجوه افقی المان نیز همان مقدار تنش برشی ایجاد خواهد شد. یعنی $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در صفحات افقی تیر نیز همان تنش برشی τ ایجاد شده و این تنش تمایل دارد که لایه‌های افقی تیر را روی یکدیگر بلغزاند.

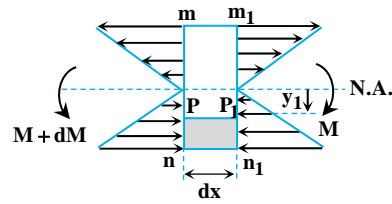
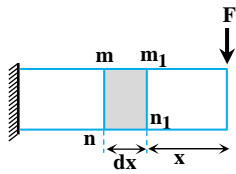


تنش‌های برشی بر روی یک مقطع برش خورده از تیر



تنش‌های برشی بر روی وجوه یک المان دلخواه از تیر

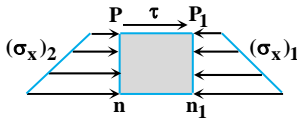
اما برای تعیین رابطه تنش برشی τ و نیروی برش V در تیر کافی است المان mm_1n_1n به طول dx مطابق شکل رسم شود. لنگر خمشی داخلی در مقطع m_1n_1 مساوی M و در مقطع mn مساوی $M + dM$ می‌باشد. در اثر لنگر خمشی، تنش قائم محوری در این دو مقطع ایجاد شده که در شکل زیر توزیع آن رسم شده است. به دلیل متفاوت بودن مقادیر لنگر خمشی در دو مقطع، مقادیر تنش قائم در یک فاصله مشخص از تار خنثی در دو مقطع یکسان نمی‌باشد.



$$M = Fx$$

$$M + dM = F(x + dx)$$

به عنوان مثال اگر در فاصله y_1 از تار خنثی یک تار مانند PP_1 در نظر گرفته شود و برای مقطع PP_1n_1n معادله تعادل در راستای X نوشته شود، می‌توان نتیجه گرفت که در روی تار PP_1 به دلیل متفاوت بودن تنش‌های قائم اعمال شده به وجوه P_1n_1 و Pn ، تنش برشی τ وجود خواهد داشت.



$(\sigma_x)_1$: تنش قائم ایجاد شده بر وجه P_1n_1 ناشی از لنگر M
 $(\sigma_x)_2$: تنش قائم ایجاد شده بر وجه Pn ناشی از لنگر $M + dM$

$$\tau t dx + \int (\sigma_x)_2 dA - \int (\sigma_x)_1 dA = 0$$

اگر t عرض مقطع تیر باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\sigma_x = \frac{-My}{I}$$

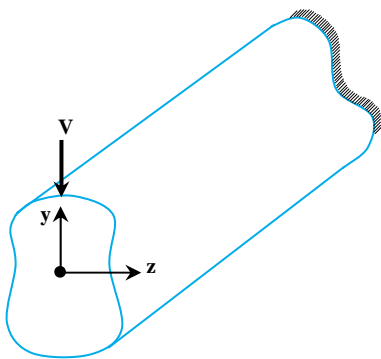
اما تنش در هر نقطه از تیر به فاصله y از تار خنثی مساوی است با:

$$\tau t dx + \int \frac{-(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{-My}{I} dA = 0 \Rightarrow \tau t dx = \frac{dM}{I} \int y dA \Rightarrow \tau t dx = \frac{dM Q}{I} \Rightarrow \tau = \frac{dM Q}{dx I t}$$

بنابراین:

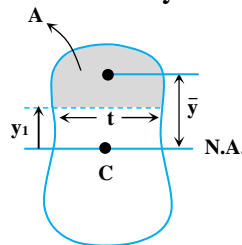
از طرفی $\frac{dM}{dx}$ در هر نقطه از تیر مساوی نیروی برش V در آن نقطه از تیر است، بنابراین رابطه‌ی تنش برشی بر حسب نیروی برشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



که در آن Q ممان استاتیکی یا گشتاور اول سطح بوده که مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = \int y dA = A \bar{y}$$



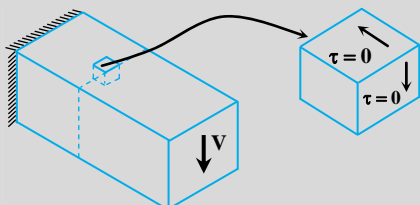
به عنوان مثال تیر شکل فوق را در نظر بگیرید که تحت نیروی برشی V در یک مقطع دلخواه از تیر می‌باشد. τ تنش برشی در مقطع مورد نظر بوده که در آن، Q گشتاور اول سطح بالای نقطه‌ی مورد نظر (سطح هاشور خورده) حول تار خنثی می‌باشد. $(Q = A \bar{y})$ و I ممان اینرسی کل سطح مقطع عرضی حول تار افقی گذرنده از مرکز سطح (تار خنثی) بوده و t عرض سطح مقطع در نقطه مورد نظر می‌باشد.

توجه: در تیرهایی با مقاطع مثلث یا نیم‌دایره توزیع تنش به دست آمده از رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ دارای دقت بالایی نمی‌باشد. البته در مقاطع دایره‌ای مقدار تنش برشی در روی تار خنثی دارای دقت قابل قبولی است.

لازم به ذکر است که در شکل فوق، تار خنثی (همانند بحث خمش خالص) منطبق بر یکی از محورهای اصلی مرکزی می‌باشد. بنابراین در این حالت تار خنثی، محور اصلی مرکزی بوده که بر نیروی برشی عمود است.

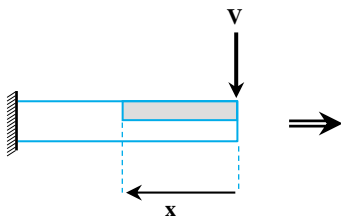
اما در صورتی که، نیروی برش در امتداد محورهای اصلی مرکزی نباشد، باید ابتدا نیروی برش را در امتداد محورهای اصلی تجزیه نموده و تنش برشی ناشی از مؤلفه‌های نیروی برشی را محاسبه نمود.

تذکره: در سطوح بالایی و پایینی تیر تنش برشی صفر است. زیرا نیرویی بر آن سطوح اثر نمی‌کند.



به عنوان مثال در تیر نشان داده شده یک المان از سطح فوقانی تیر مطابق شکل روبرو در نظر گرفته می‌شود، وجه فوقانی المان مربوط به سطح آزاد تیر بوده که تحت هیچ‌گونه تنش نیست، بنابراین در روی این وجه $\tau = 0$ می‌باشد و همان طور که قبلاً اشاره شد تنش برشی روی وجه افقی هر مقدار باشد روی وجه عمودی المان نیز همان مقدار خواهد بود. بنابراین روی چهار وجه این المان تنش برشی صفر است. ($\tau = 0$)

تذکره ۲: برآیند تنش برشی τ در یک طول x از تیر مساوی نیروی افقی H بوده که می توان آن را با انتگرال گیری زیر به دست آورد:



$$H = \int \tau dA = \int_0^x \frac{VQ}{It} \times t dx = \frac{VQ}{I} x$$

بنابراین مقدار نیروی برشی طولی به وجود آمده در تیر ناشی از بارگذاری عرضی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$H = \frac{VQ}{I} x$$

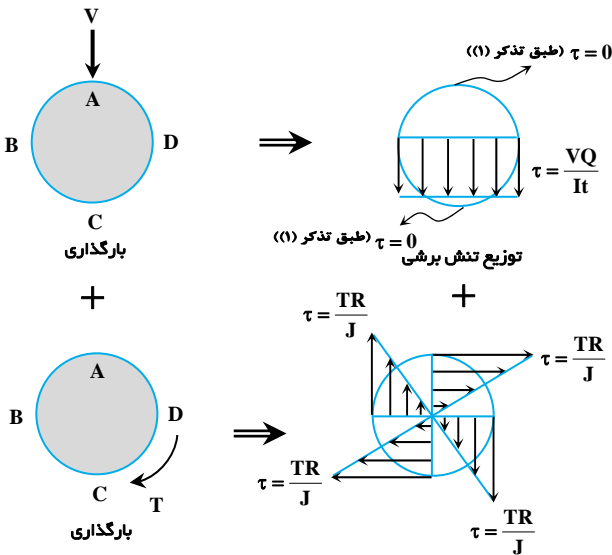
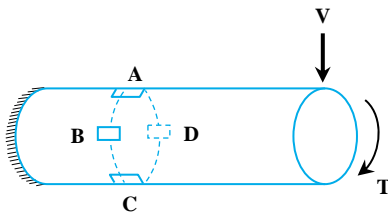
x طولی از تیر می باشد که نیروی برشی افقی H بر آن اثر نموده است.

از حاصل تقسیم نیروی برشی افقی بر طول x از تیر، نیروی برشی واحد طول یا جریان برش q به دست می آید. این جریان برش بین لایه های طولی تیر وجود داشته و از تقسیم آن بر عرض سطح مقطع تیر تنش برشی به وجود می آید.

$$q = \frac{VQ}{I}$$

توجه: اگر تیری علاوه بر آنکه تحت اثر نیروی برشی قرار گیرد، تحت اثر کوپل پیچشی نیز باشد برای محاسبه تنش برشی در هر نقطه آن باید دقت لازم به عمل آورده شود.

در صورتی که تنش ها هم جهت بودند با هم جمع شده و در صورت مختلف الجهد بودن تنش ها، از یکدیگر کاسته شوند. به عنوان مثال تیر شکل روبرو تحت اثر نیروی برشی V و لنگر پیچشی T قرار گرفته است. توزیع تنش ناشی از این بارگذاری ها به صورت روبرو بوده و مقادیر تنش برشی در هر یک از المان های A و B و C و D را می توان توسط روابط زیر محاسبه نمود:



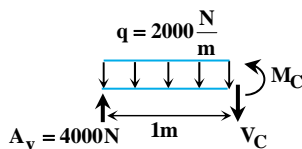
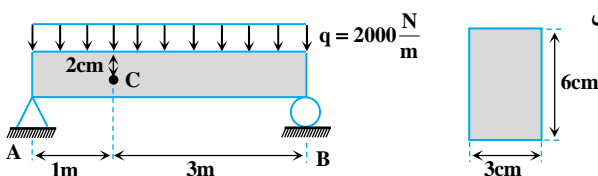
→ جهت تنش برشی) : $\tau_A = 0 + \frac{TR}{J} = \frac{TR}{J}$ تنش برشی در المان A

$\tau_B = \frac{VQ}{It} - \frac{TR}{J}$ (↓) تنش برشی در المان B

$\tau_C = 0 + \frac{TR}{J} = \frac{TR}{J}$ (←) تنش برشی در المان C

$\tau_D = \frac{VQ}{It} + \frac{TR}{J}$ (↓) تنش برشی در المان D

مثال ۱: در تیر بارگذاری شده شکل روبرو تنش قائم و برشی در نقطه C مساوی چه مقداری می باشد؟

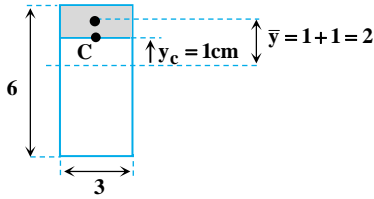


پاسخ: ابتدا در فاصله ۱ متری از تکیه گاه A برش زده، سپس با نوشتن معادلات تعادل

نیروی برشی و گشتاور خمشی در مقطع C به دست آورده می شود.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C = 4000 - 2000 \times 1 = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C = 4000 \times 1 - 2000 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3000 \text{ N.m}$$



و اما تنش قائم در بالای تار خنثی و از جمله در نقطه C از نوع فشاری بوده و مساوی است با:

$$\sigma_C = -\frac{My_C}{I} = -\frac{(3000 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{mm}) \times 10 \text{ mm}}{\frac{1}{12} \times 30 \times 60^3 \text{ mm}^4} \Rightarrow \sigma_C = -55/5 \text{ MPa}$$

و اما تنش برشی در نقطه C مساوی است با:

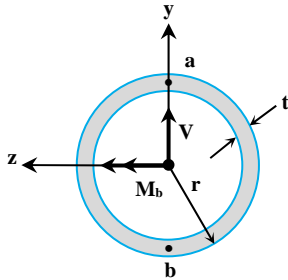
$$\tau_C = \frac{V_C Q_C}{I t} = \frac{2000 \text{ N} \times (A \bar{y})}{(\frac{1}{12} \times 30 \times 60^3 \text{ mm}^4) \times 30 \text{ mm}} = \frac{2000 \times (20 \times 30) \times 20}{(\frac{1}{12} \times 30 \times 60^3) \times 30} = 1/48 \text{ MPa}$$

در رابطه فوق برای محاسبه ممان استاتیکی Q باید مساحت سطح بالای نقطه C محاسبه شود و سپس در فاصله بین مرکز سطح هاشور خورده از تار خنثی (2cm) ضرب شود.

با مقایسه بین مقادیر تنش برشی و تنش قائم در نقطه C می‌توان دریافت که مقدار تنش قائم به مراتب بزرگ‌تر و بحرانی‌تر بوده و بنابراین در برخی از محاسبات مربوط به تیرها به منظور ساده کردن محاسبات از مقدار تنش برشی صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۲: در مقطع جدار نازک نشان داده شده یک ممان خمشی M_b و یک نیروی برشی V در جهات نشان داده شده عمل می‌کنند. تنش برشی در

نقاط a و b در امتداد محور y چقدر است؟



$$\tau = \frac{AV}{\pi r^2 t} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{4V}{\pi r^2 t} \quad (2)$$

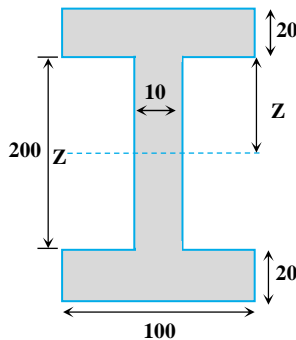
$$\tau = \frac{2V}{\pi r^2 t} \quad (3)$$

$$\tau = 0 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» تنش به وجود آمده ناشی از لنگر خمشی، تنش قائم بوده و تأثیری بر مقدار تنش برشی در نقاط a و b ندارد. از طرفی تنش برشی به وجود آمده در نقاط a و b ناشی از نیروی برشی مساوی صفر است، چون $Q = 0$ در نقاط بالا و پایین سطح مقطع قرار دارند. (در این مسئله تار خنثی عمود بر نیروی برشی و در امتداد لنگر خمشی است)

مثال ۳: ماکزیمم مقدار تنش برشی متعامد در تیری به مقطع نشان داده شده در شکل با $I_{zz} = 90 \times 10^6 \text{ mm}^4$ در صورتی که نیروی برشی موجود

در مقطع 150 kN باشد چند MPa است؟



$$40 \quad (1)$$

$$45 \quad (2)$$

$$80 \quad (3)$$

$$90 \quad (4)$$

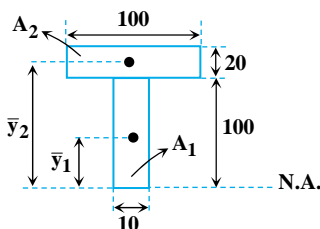
پاسخ: گزینه «۲» در مقطع I، ضخامت مقطع در روی تار خنثی حداقل بوده، از طرفی ممان استاتیکی Q سطح بالای تار خنثی نیز حداکثر مقدارش

را خواهد داشت. بنابراین نسبت $\frac{Q}{t}$ در روی تار خنثی حداکثر بوده و در نتیجه تنش برشی نیز در روی تار خنثی ماکزیمم می‌شود. بنابراین باید در رابطه

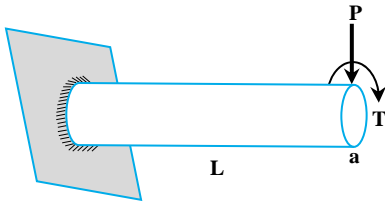
تنش برشی Q سطح بالای تار خنثی که شامل دو مستطیل است را محاسبه نمود.

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2)}{It}$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{(150 \times 10^3)(100 \times 10 \times 50 + 100 \times 20 \times 110)}{90 \times 10^6 \times 10} = 45 \text{ MPa}$$



مثال ۴: میله‌ای استوانه‌ای همزمان تحت نیروی عرضی قائم P و کوپل پیچشی T قرار دارد. طول میله L و شعاع آن a می‌باشد. تنش برشی ماکزیم حاصل از نیروی برشی و کوپل پیچشی در این میله را به دست آورید.



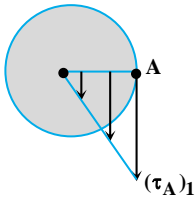
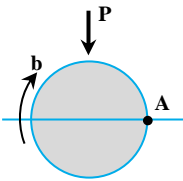
$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi a^3} \quad (۲)$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{P}{\pi a^2} \quad (۱)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\pi a^2} \left(\frac{4P}{3} + \frac{2T}{a} \right) \quad (۴)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\pi a^2} \left(P + \frac{2T}{a} \right) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» تنش برشی در نقطه A مساوی تنش برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر پیچشی است که این دو تنش در نقطه A هم‌جهت بوده و با هم جمع می‌شوند. بنابراین تنش برشی در این نقطه ماکزیم است و طبق اصل جمع آثار می‌توان مقدار آن را به دست آورد.



$$\tau_{\max} = (\tau_A)_1 + (\tau_A)_2$$

$$(\tau_A)_1 = \frac{TR}{J} = \frac{Ta}{\frac{\pi}{2} a^4} = \frac{2T}{\pi a^3} \quad (۱)$$

$$(\tau_A)_2 = \frac{VQ}{It}$$

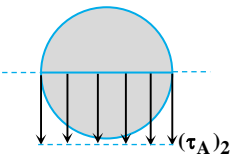
برای محاسبه Q در نقطه A باید سطح بالای تار خنثی هاشور خورده و ممان استاتیک آن حول تار خنثی نوشته شود.

$$Q = A\bar{y} = \frac{\pi a^2}{2} \times \frac{4a}{3\pi} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\Rightarrow (\tau_A)_2 = \frac{V \times \frac{2}{3} a^3}{\frac{\pi}{4} a^4 \times 2a} \quad (t = 2a \text{ برابر قطر دایره است})$$

$$\Rightarrow (\tau_A)_2 = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi a^2} = \frac{4}{3} \frac{P}{A} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{2T}{\pi a^3} + \frac{4}{3} \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2} \left(\frac{2T}{a} + \frac{4}{3} P \right)$$



مثال ۵: یک مقطع از یک تیر که تحت اثر نیروی برشی V قرار گرفته است، به شکل مدور و توخالی نظیر مقطع یک لوله می‌باشد. چنانچه سطح تحمل تنش برشی مقطع برابر A باشد، ماکزیم تنش برشی مقطع فوق برابر است با:

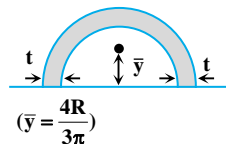
$$\frac{2V}{A} \quad (۴)$$

$$\frac{3V}{2A} \quad (۳)$$

$$\frac{4V}{3A} \quad (۲)$$

$$\frac{V}{A} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» طبق توضیحات متن درس، تنش برشی ماکزیم در لوله جدار نازک در روی تار خنثی بوده چرا که Q در روی تار خنثی حداکثر می‌باشد.



$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} \quad Q = A\bar{y} = \pi R t \times \frac{2R}{\pi} = 2R^2 t$$

فاصله \bar{y} در رابطه فوق را می‌توان از جداول خواص سطوح موجود در پیوست B کتاب استخراج نمود.

برای محاسبه ممان اینرسی مقطع لوله می‌توان از ممان اینرسی مقطع دایره توپر دیفرانسیل‌گیری کرده و سپس به جای dR ، ضخامت مقطع t قرار داده شود که نتیجه ساده شده آن برابر است با:

$$\text{حلقه } I = d \left(\frac{\pi}{4} R^4 \right) = \pi R^3 dR = \pi R^3 t$$

$$\Rightarrow \text{حلقه } I = \pi R^3 t \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{V \times 2R^2 t}{\pi R^3 t \times 2t} = \frac{V}{\pi R t} = \frac{V}{\frac{1}{2} (2\pi R t)} = \frac{V}{\frac{1}{2} A} = \frac{2V}{A}$$