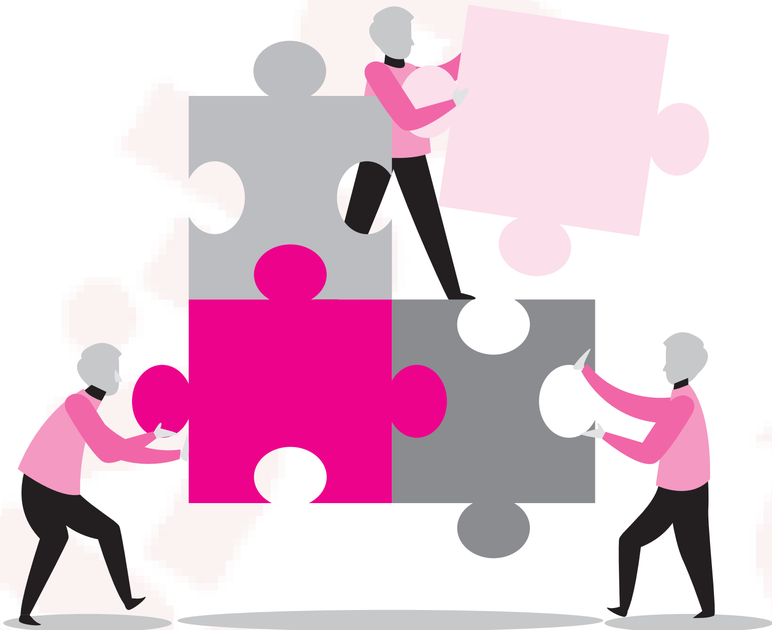
جمع‌بندی ریاضی تجربی

به سبک بابک سادات

جمع بندی و پیش‌بینی کل ریاضی کنکور

با ۶۰ سؤال احتمالی



مولف: مهندس بابك سادات

فهرست

فصل اول
تابع

سؤال احتمالی اول: مقدار تابع و پیدا کردن مجهول

تیپ ۱: پیدا کردن ضرایب درجه ۲ با داشتن ۳ نقطه
تیپ ۲: پیدا کردن ضرایب درجه ۲ با یک نقطه و رأس
تیپ ۳: تقاطع خط و منحنی و پیدا کردن مقادیر مجهول
تیپ ۴: پیدا کردن مجهول در توابع نمایی از روی ضابطه
تیپ ۵: پیدا کردن مجهول در توابع نمایی از روی نمودار
تیپ ۶: توابع چند ضابطه‌ای
تیپ ۷: مقدار توابع قدرمطلقی (عددی)
تیپ ۸: مقدار توابع جزء صحیح یا براکتی
تیپ ۹: مقدار براکت به صورت متغیری
تیپ ۱۰: ترکیب قدر و براکت به صورت متغیری

سؤال احتمالی دوم: انواع و اقسام معادلات

تیپ ۱: معادلات درجه ۱ و ۲
تیپ ۲: معادله گنگ
تیپ ۳: معادله درجه ۳ $(ax^3+bx^2+cx+d=0)$
تیپ ۴: معادله قدرمطلقی
تیپ ۵: معادله براکتی (جزء صحیح)
تیپ ۶: ترکیب قدر و براکت
تیپ ۷: معادله گویا
تیپ ۸: معادله گویای مسئله‌ای
تیپ ۹: حل معادله با تغییر متغیر
تیپ ۱۰: تعداد ریشه‌های معادله و روش تقاطع

سؤال احتمالی سوم: دسته سهمی‌های m دار

تیپ ۱: مسائلی که فقط با شرط Δ حل میشن (فقط یک دسته سهمی)
تیپ ۲: تقاطع خط و منحنی و این بار هم فقط شرط Δ
تیپ ۳: شرط a اضافه میشه به شرط Δ
تیپ ۴: فقط شرط S و P
تیپ ۵: شرط Δ + شرط S و P

سؤال احتمالی چهارم: نمودار

تیپ ۱: نمودار x^2 و $|x|$ و انتقال آن‌ها: $f(x\pm c)\pm d$
تیپ ۲: نمودار تابع x^3 و انتقال آن
تیپ ۳: انقباض و انبساط عرضی
تیپ ۴: انقباض و انبساط طولی
تیپ ۵: نمودار رادیکالی و انتقال آن
تیپ ۶: نمودارهای قدرمطلقی مهم
تیپ ۷: گلدون و سرسره
تیپ ۸: مربع کامل های مهم و معروف که میرن زیر رادیکال
تیپ ۹: اصغر آقا بفرما
تیپ ۱۰: دامنه و برد از روی نمودار
تیپ ۱۱: نمودار تابع $[f(x)]$
تیپ ۱۲: مهم‌ترین توابع براکتی و رسم توابعی به فرم $[f(x)] \begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix} d$
تیپ ۱۳: نمودار توابع چند ضابطه‌ای و یکنوایی

سؤال احتمالی پنجم: انواع و اقسام نامعادلات

تیپ ۱: نامعادلات هموگرافیک
تیپ ۲: نامعادلات کسری با ریشه‌های مشترک مخرج
تیپ ۳: هموگرافیک‌های نامتقاطع
تیپ ۴: نامعادلات گویایی که یک طرف مخالف صفره
تیپ ۵: نامعادلات گویایی که دو طرف مخالف صفره
تیپ ۶: ترکیب هموگرافیک با قدرمطلق
تیپ ۷: نامعادله قدرمطلقی
تیپ ۸: نامعادلاتی که با نمودار سریع حل میشن

سؤال احتمالی ششم: انواع تابع با نمایش‌های مختلف + اعمال روی توابع و تساوی دو تابع

تیپ ۱: تابع بودن یا نبودن؛ مسئله این است
تیپ ۲: یک به یک بودن در زوج‌های مرتب
تیپ ۳: یکنوایی در زوج مرتب
تیپ ۴: اعمال بر روی توابع در زوج‌های مرتب
تیپ ۵: تعیین دامنه از روی ضابطه
تیپ ۶: انواع تابع
تیپ ۷: تساوی دو تابع

سؤال احتمالی هفتم: ترکیب توابع

تیپ ۱: فرم اصلی و کلاسیک تابع مرکب
تیپ ۲: تابع اصلی و مرکب معلوم
تیپ ۳: تابع داخلی و مرکب معلوم
تیپ ۴: دامنهٔ تابع مرکب
تیپ ۵: برد تابع مرکب
تیپ ۶: تابع مرکب با زوج مرتب و نمودار

سؤال احتمالی هشتم: تابع وارون

تیپ ۱: ساخت تابع وارون
تیپ ۲: تعویض X و Y
تیپ ۳: وارون از روی نمودار
تیپ ۴: ترکیب وارون و مرکب
تیپ ۵: محدودیت دامنه و وارون درجه ۲
تیپ ۶: ترکیب وارون درجه ۲ و تقاطع
تیپ ۷: داستان‌های چهار x^2 و چهار $\sqrt{x}$ و لرچاق

سؤال احتمالی نهم: محاسبات رادیکالی و گویاسازی کسرها

تیپ ۱: $\sqrt[n]{a}$ و مقادیر دقیق و تقریبی
تیپ ۲: مربع کامل‌سازی در جمله‌های به فرم $a \pm b\sqrt{c}$
تیپ ۳: گویا کردن مخرج کسرها

کد ۱ سؤال احتمالی اول: مقدار تابع و پیدا کردن مقادیر مجهول

تیپ ۱: پیدا کردن ضرایب درجه ۲ با داشتن ۳ نقطه

همیشه برای تعیین n مجهول به n تا معادله نیاز داریم. یه درجه دو بهت می‌دن با ضرایب مجهول و ۳ تا نقطه که با صدق دادن اون نقاط داخل معادله به ۳ تا معادله می‌رسی. اگر طول یکی از نقاط صفر بود اول اون نقطه رو صدق بده تا C به دست بیاد و بمونه ۲ تا مجهول پس یادت باشه همیشه از صفر شروع کن.

تست

۱- فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$، بر سهمی $y=ax^2+bx+c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (تجربی ۹۹)

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۲,۱۵)$

تیپ ۲: پیدا کردن ضرایب درجه ۲ با یک نقطه و رأس

رأس سهمی خودش دو تا معادله است چون هم طولش میشه، $x=\frac{-b}{2a}$ و هم خودش یک نقطه است که صدق می کنه.

تست

۲- فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3,1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $(5,-7)$ ۲) $(5,-9)$ ۳) $(2,5)$ ۴) $(1,5)$

تیپ ۳: تقاطع خط و منحنی و پیدا کردن مقادیر مجهول

وقتی خط و سهمی روی یک نقطه همدیگرو قطع می کنن یعنی هر دوتاشون دارن از اون نقطه می گذرن و مختصات اون نقطه تو معادله هر دوشون صدق می کنه. البته اول باید نقطه رو تو معادله‌ای جاگذاری کنی که تعداد مجهول هاش کمتره.

تست

۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+2x=b$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع‌اند، طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر این منحنی و خط، کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) $-1,2$ ۲) $-1,3$ ۳) $0,-1$ ۴) $0,2$

تیپ ۴: پیدا کردن مجهول تو توابع نمایی از روی ضابطه

اینجا هم همون صدق دادن نقطه است با این تفاوت که باید معادله نمایی حل کنی. این چند تا مثال رو ببین و با آمادگی برو سراغ حل تست پایین:

$(\frac{1}{2})^a=1\Rightarrow a=0$ و $(\frac{1}{2})^a=\frac{1}{8}\Rightarrow a=3$ و $(\frac{1}{2})^a=8\Rightarrow a=-3$

همیشه می گیم توان منفی غریبه. 2^{-3} میشه $\frac{1}{2^3}$ و برعکس $(\frac{1}{2})^{-3}$ میشه 2^3.

تست

۴- نمودار یک تابع به صورت $f(x)=-2+(\frac{1}{2})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

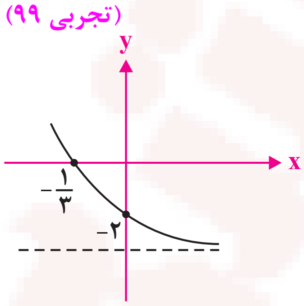
تیپ ۵: پیدا کردن مجهول تو توابع نمایی از روی نمودار

فرق این سؤال با سؤال قبلی اینه که نقاط رو از روی نمودار می‌بینی و جاگذاری می کنی. همین ☺

تست

۵- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=-4+2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸



تیپ ۶: {توابع چند ضابطه‌ای}

اولین مدل سؤالی که می‌تونه تو این توابع مطرح بشه مقدار تابع است. دومی یکنوایی و سومی و چهارمی هم که خیلی رایج بوده پیوستگی و مشتق‌پذیری. باید از اولیش خوب یادبگیری تا به چهارمی برسی.

کافیه به نقطه مرزی توجه کنی و بدونی که هر نقطه مربوط به کدوم ضابطه است. ضمناً وقتی مثلاً میگه $f(f(5))$ اول از داخل شروع کن و $f(5)$ رو به دست بیار. مثلاً اگر $f(5)=-2$ شد حالا برو سراغ $f(-2)$. ☺

تست

۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & , x>3 \\ 2x+3 & , x\leq 3 \end{cases}$ باشد حاصل $f(f(5))+f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

تیپ ۷: {مقدار توابع قدر مطلقی (عددی)}

هرچی از قدرمطلق خارج میشه قطعاً بزرگ‌تر مساوی صفره و دو حالت داره: یا عدده / یا متغیر و عبارته

اگر عدد بود که تکلیفش معلومه: $|5|=5$ ، $|-3|=3$

اگر متغیر یا عبارتی شامل x بود خودش دو حالت پیدا می‌کنه. اگر داخلش مثبت بود خودش میاد بیرون و اگر داخلش منفی بود یه منفی توش ضرب می‌کنیم که مثبت بشه. اگر عبارت رو u در نظر بگیریم داریم:

$$|u|=\begin{cases} u & , u\geq 0 \\ -u & , u<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1|=\begin{cases} x-1 & , x\geq 1 \\ -x+1 & , x<1 \end{cases}$$

تست

۷- اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ باشد حاصل $f(f(-144))$ کدام است؟ (تجربی ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

تیپ ۸: {مقدار توابع جزء صحیح یا براکتی}

هرچه که از جزء صحیح یا به قول معروف براکت خارج میشه عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی عدد داخلشه؛ یعنی اگر عدد داخل براکت صحیح بود خودش میاد بیرون و اگر غیرصحیح بود عدد صحیح قبلیش: $[-3/7]=-4$ و $[-3]=-3$ و $[5/39]=5$ و $[5]=5$

دقت کن که روی محور، عدد صحیح قبل از $-3/7$، -4 می‌شه.

تست

۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2[x]$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است) (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

تیپ ۹: {مقدار براکت به صورت متغیری}

براکت همیشه از ما عدد می‌خواد. هرجا گیر کردی یه عدد بهش بده و از شرش خلاص شو. همین ☺

تست

۹- برای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تیپ ۱۰: ترکیب قدر و براکت به صورت متغیری

اولاً همینجا مربع کامل‌های مهم و معروف رو بشناس و هرجا دیدی سریع از چپ به راست تبدیل کن:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2 \text{ و } x^2+4x+4=(x+2)^2 \text{ و } x^2+6x+9=(x+3)^2 \text{ و } 4x^2+4x+1=(2x+1)^2$$

تو هر ۴ تای بالا علامت جمله وسط می‌تونه منفی باشه یعنی مثلاً:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$\sqrt{u^2}=|u| \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

حالا به اینجا که می‌رسیم قدرمطلق از ما علامت می‌خواد. اگه $x\geq 1$ باشه خودش میاد بیرون و اگر کوچک‌تر باشه قرینش. پس کافیه تو بازه‌ی داده شده عدد مناسب رو بهش بدیم.

راستی این هم معادله براکتی:

$$[u]=k \Rightarrow k\leq u<k+1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0\leq x<1$$

تست

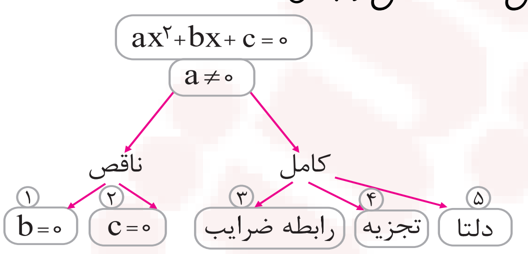
۱۰- اگر $[x]=1$ باشد آنگاه حاصل $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $2x-3$

کد ۲ سؤال احتمالی دوم: انواع و اقسام معادلات

تیپ ۱: معادلات درجه ۱ و درجه ۲

روش حل و کل توضیحات رو تو ویدئوی اول کتاب در نهایت فصاحت و بلاغت براتون تدریس کردم. تو این تیپ که تا حالا سؤال کنکور نبوده می‌خوام مطمئن بشم که حل معادله درجه ۱ و درجه ۲ به بهترین و سریع ترین حالت ممکن رو بلدی.



تست

۱۱- ریشه مثبت هر یک از معادلات زیر و نقاط تلاقی خط $y=x+2$ با محورها تشکیل یک مثلث می‌دهند. بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

$2x^2-3x=2$ و $x^2-2x=8$ و $x^2+5x=6$ و $x^2-\sqrt{3}x=0$ و $x^2-9=0$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

تیپ ۲: { معادله گنگ }

برای حل این معادلات کافیه رادیکال رو یک طرف معادله تنها گیرش بندازی و بعد طرفین رو به توان ۲ برسونی. البته حتماً باید حواست باشه که اون طرف نامنفی باشــه و با این شرط به توان ۲ برسونی. اگر دو طرف رادیکال داشتی هم که دیگه بهتر چون هیچ شرطی لازم نداره. ضمناً دامنه رادیکال هم فراموش نشه، زیر رادیکال نباید منفی باشه.

مثال ۱: $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}\xrightarrow{\text{طرفین توان ۲}}۴x=۳x-۳\Rightarrow x=-۳$

این جواب قبول نیست، چون زیر رادیکال‌ها رو منفی می‌کنه. پس این معادله جواب نداره!

مثال ۲: اول رادیکال سمت چپ این طرف که هم تنها بشه و هم ضریبش مثبت باشه:

$$۲x=۱-\sqrt{۲-x}$$
$$\sqrt{۲-x}=۱-۲x$$

حالا با شرایط $۱-۲x\geq ۰$ یعنی $x\leq \frac{۱}{۲}$ طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$۲-x=(۱-۲x)^۲\Rightarrow ۲-x=۴x^۲-۴x+۱$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}x_۱=۱\ ,\ x_۲=\frac{-۱}{۴}$$

$x_۱=۱$ قبول نیســت چون تو شــرطمون یعنی $x\leq\frac{۱}{۲}$ صـدق نمی‌کنه ولی $x_۲=\frac{-۱}{۴}$ قبوله چون هم تو شرطمون صدق می‌کنه و هم زیر رادیکال رو منفی نمی‌کنه.

مثال ۳:

$$x+\sqrt{x}=۶$$

اول x رو میاریم سمت راست که $\sqrt{x}$ تنها بشه:

$$\sqrt{x}=۶-x$$

حالا با شرط $۶-x\geq ۰$ یعنی $x\leq ۶$ طرفین به توان ۲:

$$x=x^۲-۱۲x+۳۶$$
$$\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰\Rightarrow \begin{cases}x_۱=۴\\x_۲=۹\end{cases}$$

$\boxed{x_۲=۹}$ قبول نیست چون تو شرطمون صدق نمی‌کنه، پس جواب می‌شه، فقط $\boxed{x=۴}$.

تست

۱۲- اگر $۲=۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

تیپ ۳: { معادله درجه ۳ $(ax^۳+bx^۲+cx+d=۰)$ }

ممکنه امسال برای اولین بار این معادله به صورت مستقل تو کنکور مطرح بشه که یکی از سه حالت زیره:

۱) خودش یکی از ریشه‌ها رو می‌ده. مثلاً می‌گه $x=۲$ یه ریشه معادله است. بنابراین عامل $(x-۲)$ رو داره.

۲) جمع ضرایب صفره؛ پس یکی از ریشه‌ها یکه و عاملش $x-۱$.

۳) $a+c=b+d$؛ پس یکی از ریشه‌ها میشه ۱- و عاملش هم $x+۱$.

تست

۱۳- حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه سوم $x^۳+۶x^۲+۱۱x+۶=۰$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

تیپ ۴: معادله قدرمطلقی

این معادلات تو کنکور دو حالت کلی دارن بچه‌ها:

۱) $|u|=v$ یا $|u|=|v|$

۲) $|u|\pm|v|=$ یک عدد غیر صفر

$*|u|=|v| \Rightarrow u=\pm V$ (بدون شرط) $\rightarrow$ مثلاً: $|x-۱|=|۲x-۵|$

$\Rightarrow x-۱=\pm(۲x-۵)\begin{cases} x-۱=۲x-۵ \Rightarrow x=۴ \\ x-۱=-۲x+۵ \Rightarrow x=۲ \end{cases} \Rightarrow$ هر دو قبوله

$*|u|=v \Rightarrow u=\pm v(v\geq ۰) \rightarrow$ مثلاً $|x-۱|=۲x-۵$

$\rightarrow$ حل دقیقاً مثل بالا $\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \xrightarrow{v\geq ۰} ۲(۴)-۵=۸ \Rightarrow & \text{پس } x=۴ \text{ قبوله} \\ x=۲ \xrightarrow{v\geq ۰} ۲(۲)-۵=-۱ \Rightarrow & \text{پس } x=۲ \text{ قبول نیست} \end{cases}$

این حالت رو هم توی تست پایین کامل بهتون یاد می‌دم: $|u|+|v|=$ عدد غیرصفر

تست

۱۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|۲x-۱|+|x+۲|=۳$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

تیپ ۵: معادله براکتی (جزء صحیح)

مثال ۱: $[x]=۲ \Rightarrow ۲\leq x<۳$

مثال ۲: $[۲x-۱]=۳ \Rightarrow [۲x]-۱=۳ \Rightarrow [۲x]=۴ \Rightarrow ۴\leq ۲x<۵ \Rightarrow ۲\leq x<\frac{۵}{۲}$

مثال ۳: $[x+[x]]=۲ \Rightarrow [x]+[x]=۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow ۱\leq x<۲$

$[x]$ چون صحیح بود مثل عدد (۱-) تو مثال ۲ از داخل براکت بیرون اومد.

قبل از رفتن تو تست‌ها لازمه یک مقایسه مهم و بسیار زیبا بین ویژگی‌های قدر مطلق و براکت رو نشونتون بدم.

قدر مطلق	براکت
عدد صحیح به شکل ضرب و تقسیم بیرون میاد لزوماً درست نیست $|x+۲|\neq|x|+۲$	عدد صحیح به شکل جمع و تفریق بیرون میاد $[x\pm۲]=[x]\pm۲$
برعکس حالت بالا بهش می‌گیم jumping $|۲x|=|۲||x|=۲|x|$	برعکس حالت بالا $[۲x]\neq۲[x]$
تک تک بزرگتره، وقتی هم‌علامتن مساویه $|x|+|y|\geq|x+y|$	تک تک کوچیکتره، وقتی جمع اعشاریا به یک نمی‌رسه مساویه! $[x]+[y]\leq[x+y]$

تست

۱۵- مجموعه جواب معادله‌ی $[x+۳]+[x-۱]=۱۰$ به صورت $[a,b)$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

تیپ ۶: {ترکیب قدر و براکت}

تو تیپ ۱۰ سؤال اول گفتم بهتون وقتی $[u]=k$ میشه داخل براکت بین k و $k+1$ بوده یعنی $k\le u<k+1$. حالا داخل براکت هر عبارتی می‌تونه باشه. مثل تست زیر:

تست

۱۶- اگر مجموعه جواب معادله‌ی $[|x|+1]=1$ به صورت بازه‌ی (a,b) باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تیپ ۷: {معادله گویا}

به هر معادله‌ای که به صورت کسری باشه و البته متغیر یعنی x تو مخرج کسر حضور داشته باشه می‌گن معادله گویا. مثلاً معادله‌ی $\frac{2x+1}{3}=x-1$ گویا نیست و یک معادله درجه اوله. کافیه طرفین رو در عدد ۳ ضرب کنیم: $2x+1=3x-3\Rightarrow\boxed{x=4}$

حالا اگه تو همین معادله یکی از xها می‌رفت تو مخرج، یه معادله گویا داشتیم و لازم بود که عملیات طرفین وسطین رو برای خروج از بحران کسر انجام بدیم:

مثال ۱:

$$\frac{x+2}{x}=x$$

$$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0\xrightarrow{a+c=b}\underline{x_1=-1}\ ,\ \underline{x_2=2}$$

حتماً بعد از حل هر معادله گویا چک کنید که جواب یا جواب‌های به دست‌اومده مخرج کسرتون رو صفر نکنن که اینجا مشکلی نیست.

مثال ۲:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x}$$

گام اول: سمت چپ مخرج مشترک:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x(x-1)}\Rightarrow\frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

گام دوم: حالا که به دو تا کسر که حالت مطلوبمونه رسیدیم چک کنیم ببینیم آیا ساده‌سازی داریم؟! بله؛ عبارت‌های $x-1$ تو مخرج‌ها رو می‌تونیم با هم ساده کنیم. پس داریم: $\frac{4x-2}{x+1}=\frac{2-x}{x}$

گام سوم: حالا دیگه هیچ دو عبارت یکسانی برای ساده‌شدن نداریم و آماده‌شده برای طرفین وسطین، البته بهتره که به جای $2-x$ بنویسیم: $-x+2$

$$(4x-2)x=(x+1)(-x+2)\Rightarrow 4x^2-2x=-x^2+2x-x+2\Rightarrow 5x^2-3x-2=0$$

$$\xrightarrow[\text{ضرایب صفره}]{\text{جمع}}\begin{cases}x_1=1 & \times\\ x_2=\frac{-2}{5} & \checkmark\end{cases}$$

فقط حواست باشه که $x=1$ قبول نیست، چون مخرج رو صفر می‌کنه.

مثال ۳:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}=\frac{x^2-16}{x-6}$$

تذکر مهم: همونطور که تو گام دوم مثال قبلی گفتم اول باید تا حد امکان عبارت‌های یکسان رو ساده کنیم. پس گام اول میشه تجزیه:

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-6)}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-6}$$

سه حرکت مهم بزن‌بزن در ساده‌سازی معادلات گویا
۱) صورت و مخرج بزن‌بزن خداحافظی با ریشه!
۲) مخرج و مخرج بزن‌بزن خداحافظی با ریشه!
۳) صورت و صورت بزن‌بزن ولی ریشه رو نگهدار!

حالا بریم این موارد سه‌گانه رو تو مثال خوب خودمون ببینیم:

۱) از تو صورت و مخرج کسر سمت چپ $(x-1)$ ها رو با هم ساده می‌کنیم و با $x=1$ هم به عنوان ریشه مخرج خداحافظی می‌کنیم.

۲) داخل مخرج‌ها هر دو $(x-6)$ رو با هم می‌زنیم و از $x=6$ که ریشه مخرج‌هامونه هم خداحافظی می‌کنیم.

۳) $\frac{x-4}{1}=\frac{(x-4)(x+4)}{1}$ باقی مونده که $(x-4)$ ها رو با هم می‌زنیم ولی دیگه با $x=4$ مثل دو حالت قبلی خداحافظی نمی‌کنیم بلکه به عنوان یک جواب معادله اون رو حفظ می‌کنیم.

پس تا اینجا یک جواب معادله شد $x=4$ و معادله به صورت $x+4=1$ باقی موند که جوابش میشه $\boxed{x=-3}$

دقت داشته باشید وقتی عبارت‌ها رو به شکل ضرب ساده می‌کنیم، عدد ۱ باقی می‌مونه به جاشون نه صفر!

پس معادلمون دو تا جواب داشت: $x=4\,,\,-3$ که هر دو قبولن چون هیچ کدوم مخرج‌ها رو صفر نمی‌کنن!

تست

۱۷- معادله‌ی $3=\frac{x}{x-2}+\frac{2(x+1)}{x-4}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

تیپ ۸: معادله گویای مسئله‌ای

مسئله رو که به زبون ریاضی می‌نویسی تبدیل به یک معادله گویا میشه. برای این تیپ ۲ تا تست در نظر گرفتم که هر دو تا خیلی مهم هستن و البته از نظر فیزیکی متفاوت.

تست

۱۸- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۹- بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

تیپ ۹: حل معادله با تغییر متغیر

کلاً تو هر معادله‌ای که یک قسمت شلوغی تکرار شده بود اون قسمت رو t بگیر. به این کار می‌گن تغییر متغیر. بریم یه معادله تغییر متغیری معروف رو با هم ببینیم که تا به حال تو کنکور مطرح نشده.

تست

۲۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $7=\frac{7}{\sqrt{x-3}+1}+\sqrt{x-3}$ کدام است؟

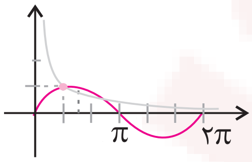
۱) ۴۲ ۲) ۸ ۳) ۳۹ ۴) ۱۹

تیپ ۱۰: { تعداد ریشه‌های معادله و روش تقاطع }

تو این روش برای حل معادله $f(x)=g(x)$ دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ رو در یک دستگاه رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تقاطع دو منحنی، تعداد جواب‌های معادله رو بهمون می‌ده.

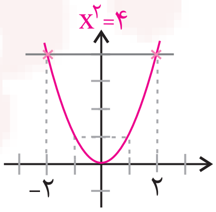
مثال ۱: تعداد ریشه‌های معادله $\frac{1}{x}-\mathrm{Sin}x=0$ رو در بازه $[0,2\pi]$ پیدا کنید.

اول معادله رو به صورت $\mathrm{Sin}x=\frac{1}{x}$ می‌نویسیم که بتونیم دو طرف رو تو یک دستگاه رسم کنیم:

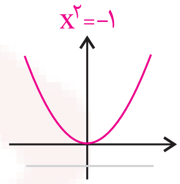


طبق نمودار می‌بینید که تا قبل از 2π دو منحنی همدیگرو تو دو تا نقطه قطع کردن پس معادله دو تا جواب داره.

مثال ۲: چرا معادله $x^2+1=0$ ریشه نداره و $x^2-4=0$ دو تا ریشه قرینه داره؟!



تو دو نقطه ۲ و ۲- دارن همدیگرو قطع می‌کنن.



همدیگرو هیچ جا قطع نمی‌کنن

تست

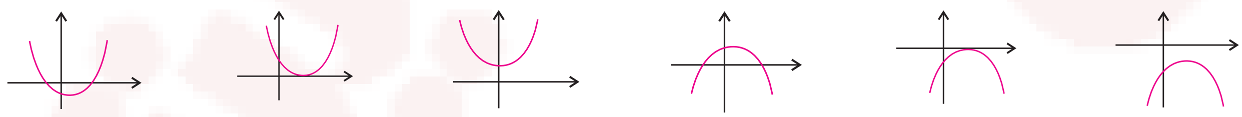
۲۱- تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x-3|-\sqrt{x-1}=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

کد ۳ سؤال احتمالی سوم: دسته سهمی‌های mدار

تیپ ۱: { مسائلی که فقط با شرط Δ حل می‌شن (فقط یک دسته سهمی) }

مهم‌ترین نامعادله تو کنکور نامعادله‌ی درجه دومه که قبلش باید به انواع فرم‌های سهمی مسلط باشی.



۱) $a>0$، $\Delta>0$: بین دو ریشه منفی

۲) $a>0$، $\Delta=0$: همواره نامنفی

۳) $a>0$، $\Delta<0$: همواره مثبت

۴) $a<0$، $\Delta>0$: بین دو ریشه مثبت

۵) $a<0$، $\Delta=0$: همواره نامثبت

۶) $a<0$، $\Delta<0$: همواره منفی

تست

۲۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

تیپ ۲: تقاطع خط و سهمی و این بار هم فقط شرط Δ

$$\begin{cases} y=ax^{۲}+bx+c \\ y=mx+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\text{این} \\ y=\text{اون} \end{cases} \to \text{اون}=\text{این} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=mx+h \Rightarrow ax^{۲}+\underbrace{bx-mx}+c-h=۰$$

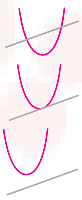
کافیه برای تبدیل معادله به یک درجه دوم مرتب، تو جملات دوم و سوم از x فاکتور بگیریم:

به این معادله می‌گیم معادله تقاطع که سه حالت داره: $\to \boxed{ax^{۲}+(b-m)x+c-h=۰}$

۱) اگه $\Delta>۰$ باشه یعنی خط و سهمی تو دو تا نقطه همدیگرو قطع می‌کنن.

۲) اگر $\Delta=۰$ باشه یعنی خط و سهمی تو یک نقطه به هم مماسن.

۳) اگر $\Delta<۰$ باشه یعنی خط و سهمی همدیگرو قطع نمی‌کنن.



مثال: به ازای کدام مقادیر m سهمی به معادله $y=۲x^{۲}+۱۷x+۸$ با خطوط $y=mx$ نقطه مشترکی ندارد؟

باز هم اول با هم قطع می‌دیم: $۲x^{۲}+۱۷x+۸=mx$

معادله تقاطع $\Rightarrow ۲x^{۲}+۱۷x-mx+۸=۰ \Rightarrow \boxed{۲x^{۲}+(۱۷-m)x+۸=۰}$

حالا چون گفته قطع نکنن Δ باید منفی باشه؛ پس داریم: $b^{۲}-۴ac<۰$

$$(۱۷-m)^{۲}-۴(۲)(۸)<۰ \Rightarrow (m-۱۷)^{۲}<۶۴$$

اولاً $(a-b)^{۲}=(b-a)^{۲}$ و چون $(m-۱۷)^{۲}$ از $(۱۷-m)^{۲}$ بهتر بود تغییر دادم.

ثانیاً چون نامعادله ناقص بود عدد ثابت رو به سمت راست منتقل کردم. حالا کافیه از طرفین جذر بگیرم.

$$\Rightarrow \sqrt{(m-۱۷)^{۲}}<\sqrt{۶۴} \Rightarrow |m-۱۷|<۸ \Rightarrow -۸<m-۱۷<۸ \Rightarrow \boxed{۹<m<۲۵}$$

تست

۲۳- به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y=۲x^{۲}+(m+۱)x+m+۶$، بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) -۴ ۲) ۴ و -۱۲ ۳) -۴ و ۱۲ ۴) ۱۲

تیپ ۳: شرط a اضافه می‌شه به شرط Δ

تو این تیپ از شما سؤال میشه که به ازای کدام مقادیر فلان دسته سهمی مثلاً بالای محور xهاست یا پایین محور xهاست و... برای این تست‌ها باید به تیپ ۱ مسلط باشی.

تست

۲۴- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $۱<m<۵$ ۲) $۲<m<۵$ ۳) $۲<m<۴$ ۴) $۲<m<۶$

تیپ ۴: {فقط شرط S و P}

همه معادلات درجه دوم ریشه‌های صحیح و خوبی ندارن. گاهی اوقات ریشه‌های معادله درجه دوم اعداد گنگ و داغونی هستن ولی در هر صورت جمع و ضرب و تفریقشون بدون نیاز به خود ریشه‌ها به دست میاد. از روش دلتا یاد گرفتیم که ریشه‌های معادله اینجوری محاسبه می‌شن: $x_1\,,\ x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

اولاً از این به بعد به جای $x_1\,,\ x_2$ بگیم α,β. پس دیگه معادله هر چی باشه α,β ریشه‌هاشه. $\alpha+\beta$ رو با S و $\alpha\beta$ رو با P نشون می‌دیم.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\alpha-\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

تذکر: برای تفاضل چون در حالت کلی نمی‌دونیم α بزرگتره یا β از قدر مطلق استفاده می‌کنیم یعنی می‌گیم: $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

حالا تفاضل که زیاد کاربرد نداره تو کنکور ولی S و P چهار تا کاربرد داره که توی فصل ۶ به ترتیب با هم بررسی می‌کنیم.

تست

۲۵- معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

تیپ ۵: {شرط Δ + شرط S و P}

تو تست بهت می‌گه به ازای کدام مقادیر؛ معادله دو ریشه مثبت یا دو ریشه منفی یا دو ریشه مختلف‌العلامت داره. ممکنه بیان مسئله به صورت نموداری باشه. مثلاً یه سهمی محور xها را در طرفین مبدأ قطع می‌کنه یا از هر ۴ ناحیه عبور می‌کنه یعنی دو ریشه مثبت و منفی.

پس تو این تیپ می‌بینیم بدون اینکه معادله رو حل کنیم، می‌تونیم به علامت ریشه‌ها برسیم. شرایط علامتی ریشه‌ها رو براساس علامت S و P با هم ببینیم: (۱) شرایط دو ریشه مثبت: Δ و S و P هر سه مثبت. (۲) شرایط دو ریشه منفی: P و Δ مثبت و S منفی.(۳) شرایط دو ریشه مختلف‌العلامت: اینجا نه شرط دلتا لازمه و نه شرط S. فقط کافیه P منفی باشه که ما همیشه اینجوری می‌گیم: $\frac{c}{a}$ منفی لازم و کافی. از این کاربرد معمولاً سوال مستقیم مطرح می‌شه که البته قلق خاص خودش رو داره.

تست

۲۶- معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m، کدام است؟

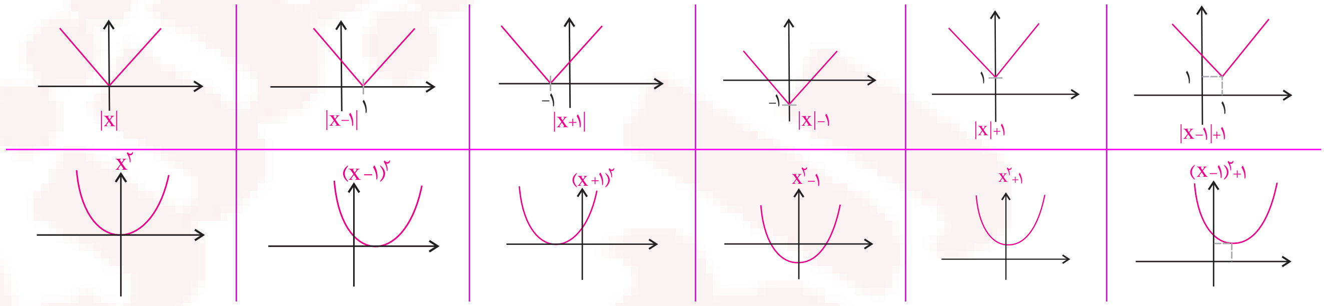
(خارج تجربی ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

کد ۴ سؤال احتمالی چهارم: نمودار

تیپ ۱: { نمودار x^2 و $|x|$ و انتقال آن‌ها: $f(x\pm c)\pm d$ }

به طور کلی در انتقال شـکل اصلـی تابع حفظ می‌شـه و فقط تغییر مکان طولی و عرضی انجام می‌شه. بنابراین شیب‌ها و خواص فیزیکی ثـابـت بوده و تنهـا جابه‌جایی افقی و عمودی داریم؛ c تغییر در دامنه و در راســـتای محور xها و d تغییر در بُرد و در راستای محور yهاست. اگر نمودار تابع f(x) نسبت به محور xها قرینه بشه منفی پشت f میاد و میشه −f(x) ولی اگر نسبت به محور yها قرینه بشه منفی پشت x میاد و میشه f(-x) .



تست

۲۷- نمودار تابع با ضـابطه‌ی $f(x)=x^2-2x;(x>1)$، مفروض اسـت. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلـه‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

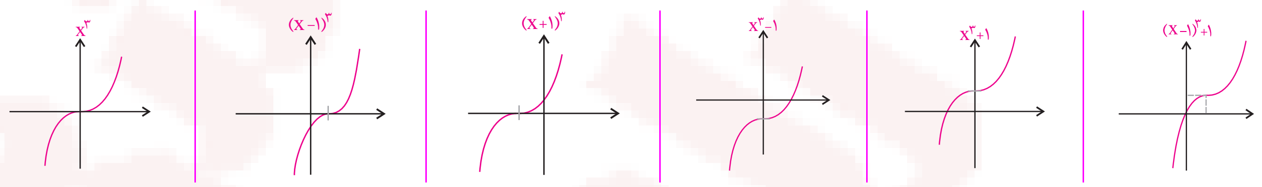
۲۸- نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) (۲ و ۵-) ۲) (۳ و ۵-) ۳) (۳ و ۲-) ۴) (۵ و ۲-)

۲۹- نمودار $y=|x|$ را ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. در پایان، نمودار حاصل را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع به وجود آمده کدام است؟

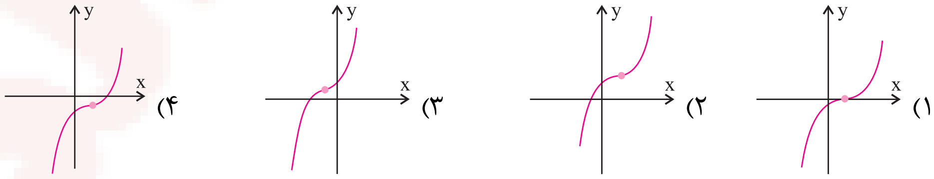
۱) $y=|x-2|-1$ ۲) $y=1-|x-2|$
۳) $y=1-|x+2|$ ۴) $y=-1-|x+2|$

تیپ ۲: { نمودار تابع x^3 و انتقال آن‌ها }



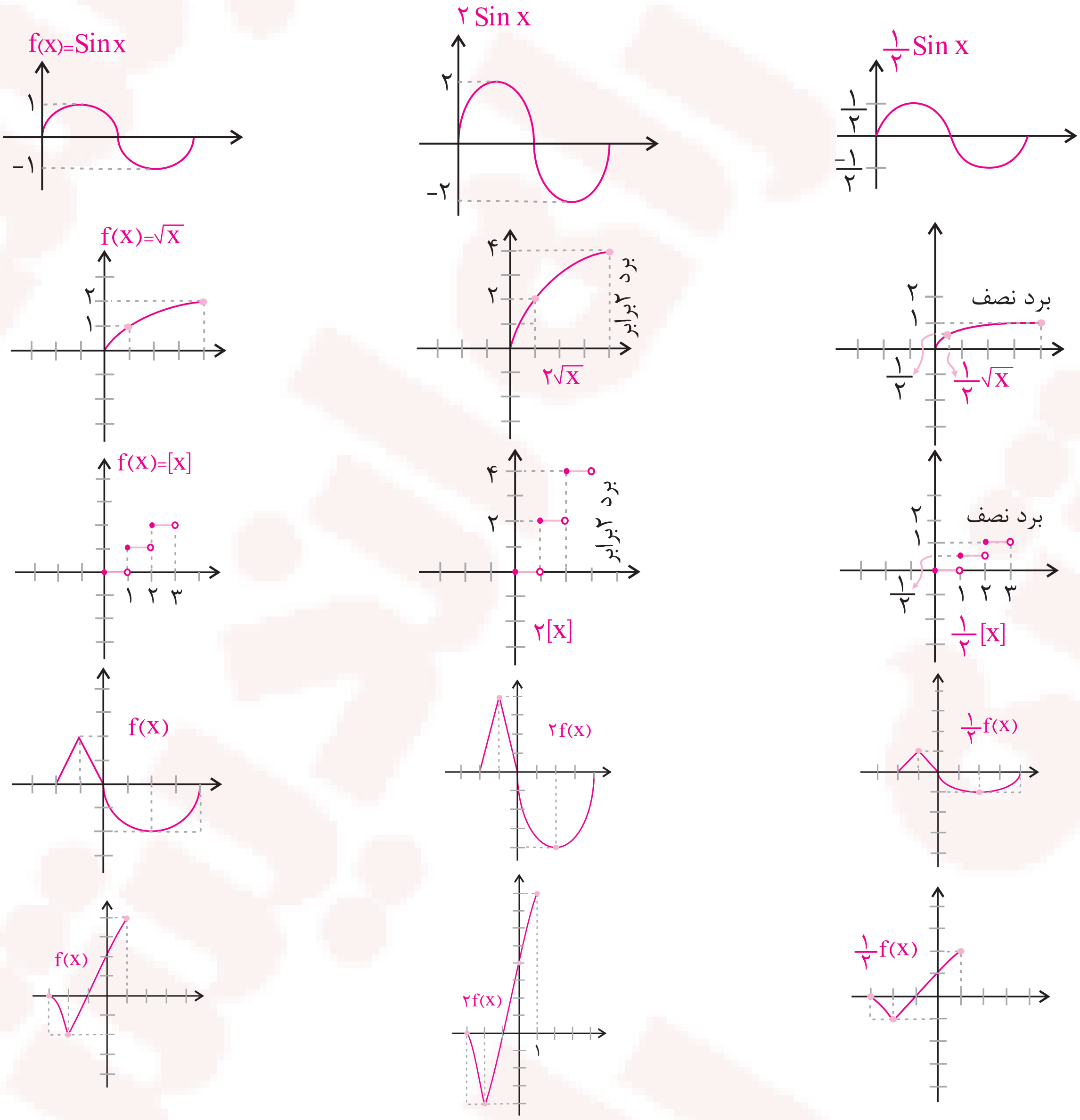
تست

۳۰- نمودار تابع $f(x)=x^{3}+3x^{2}+3x+2$ کدام است؟



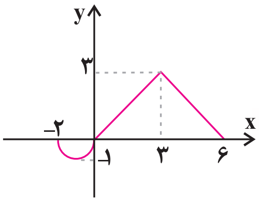
تیپ ۳: انقباض و انبساط عرضی

حالا نوبت به تغییرات a و b تو فرم $af(bx\pm c)\pm d$ رسید. همونطور که تو بخش قبلی c روی دامنه و d روی برد تأثیر داشت اینجا b روی دامنه و a روی برد اثر داره. بریم روی بهترین مثال‌های ممکن تغییرات رو مشاهده کنیم و از a شروع کنیم و b رو تو تیپ بعدی بررسی می‌کنیم.



تست

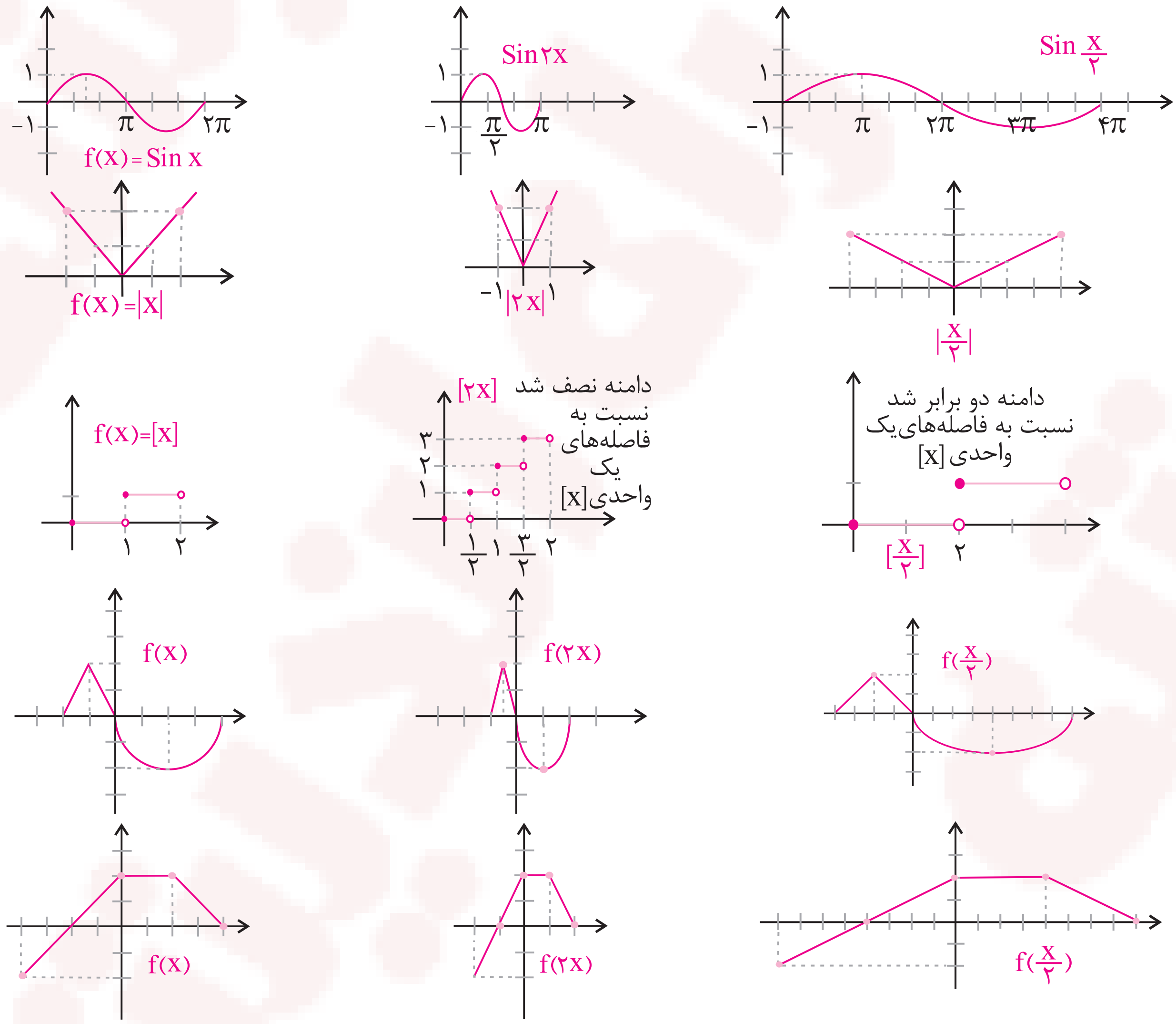
۳۱- شکل مقابل نمودار تابع $y=3f(x+2)$ است. نمودار تابع $y=f(x)$ در چند نقطه نمودار تابع $y=1$ را قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تیپ ۴: انقباض و انبساط طولی

* اگر دقت کرده باشین تو هر ۵ تابع تیپ ۳ فقط $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$ رو بررسی کردیم و با تغییرات روی برد دیدیم که دامنه کوچک‌ترین تغییری نداشت. حالا بریم سراغ تغییرات انقباضی و انبساطی بر دامنه یعنی b.

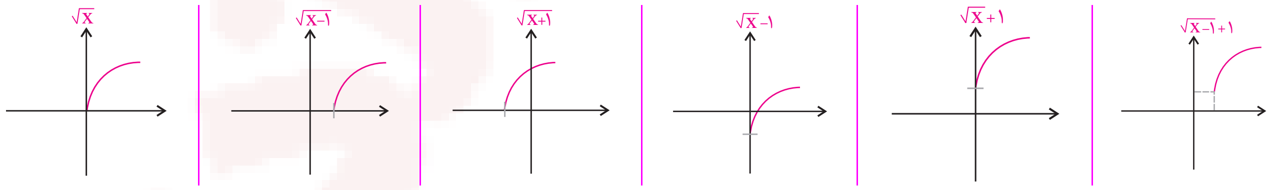


تست

۳۲- نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{2}x\right|-2$ را ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی ۹۳)

۱) -۳/۵ ۲) -۳ ۳) -۲/۵ ۴) -۲

تیپ ۵: { نمودار رادیکالی و انتقال آن }



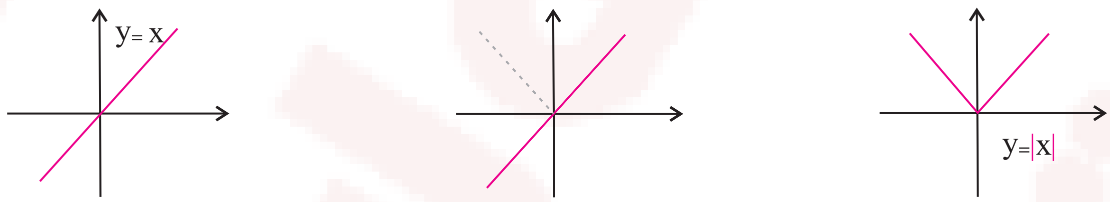
تست

۳۳- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

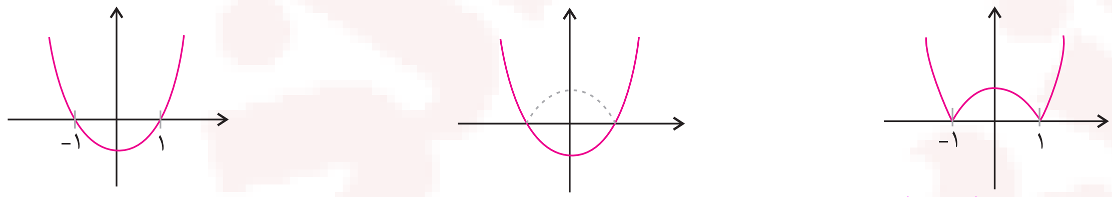
۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

تیپ ۶: { نمودارهای قدرمطلقی مهم }

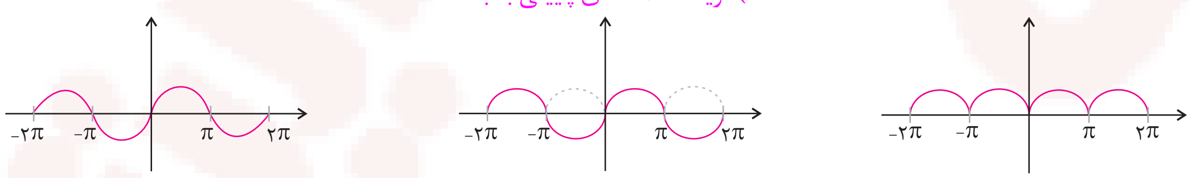
این نمودارها در کل ۵ دسته هستن که دو دسته به شدت اهمیت داره در درس شما. دسته اول توابعی که به صورت $|f(x)|$ هستن یعنی کل تابع داخل قدرمطلق قرار می‌گیره. برای رسم این توابع اول خود تابع $f(x)$ رو رسم می‌کنیم و کل قسمت‌هایی رو که زیر محور xهاست به بالا قرینه می‌کنیم. به مثال‌های زیر که خیلی هم مهم هستن توجه کنید:



مرحله آخر) حذف پایین   مرحله ۲) قرینه به بالا   مرحله ۱) خودش



۳) حذف پایین $y=|x^2-1|$ ۲) قرینه قسمت‌های پایینی به بالا   ۱) اول خودش $y=x^2-1$



۳) حذف پایین $y=|\sin x|$ ۲) قرینه قسمت‌های پایین به بالا   ۱) اول خودش $y=\sin x$

* دقت کنید تابع $\sin x$ دامنش $\mathbb{R}$ یعنی کل اعداد حقیقیه ولی ما در بازه‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسمش کردیم.

دسته دوم توابع قدرمطلقی بسیار مهمی هستن که اتفاقاً کاربردشون از بالایی‌ها هم بیشتره.

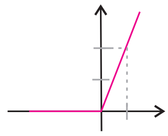
در این توابع یک بخش دارای قدرمطلق و یک بخش فاقد قدرمطلقه. مهم‌ترین این توابع رو براتون رسم می‌کنم.

اساس رسم این توابع مهم‌ترین خاصیت قدرمطلقه که تو تیپ ۷ سؤال یک یاد گرفتین:

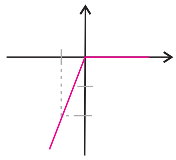
$$|u|=\begin{cases} u & , \ u\geq 0 \\ -u & , \ u<0 \end{cases}$$

مثال ۱ : $f(x)=x+|x|=x+\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} 2x & , x\ge 0 \\ 0 & , x<0 \end{cases}$

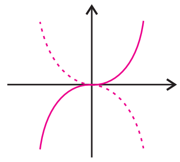
اسم این کار رو می‌ذاریم شرط‌بندی.



مثال ۲ : $f(x)=x-|x|=x-\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} 0 & , x\ge 0 \\ 2x & , x<0 \end{cases}$

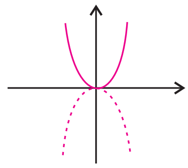


مثال ۳ : $f(x)=x|x|=x\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2 & , x\ge 0 \\ -x^2 & , x<0 \end{cases}$



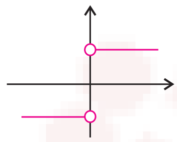
تذکر مهم ۱: اکثر بچه‌ها این تابع رو با لر یعنی x^3 اشتباه می‌گیرن ولی غافلند از اینکه این از لر چاق‌تره و بر همین اساس ما اسمشو گذاشتیم لر چاق!

مثال ۴ : $f(x)=x^2|x|=x^2.\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^3 & , x\ge 0 \\ -x^3 & , x<0 \end{cases}$



تذکر مهم ۲: از قضا بچه‌های عزیزمون این رو هم با x^2 اشتباه می‌گیرن ولی باید بدونید که x^2 از ایشون تپل‌تر تشریف دارن!

مثال ۵ : $f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} \frac{x}{x}=1 & , x>0 \\ \frac{x}{-x}=-1 & , x<0 \end{cases}$

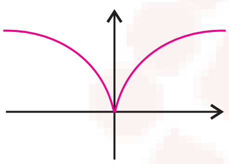


تست

۳۴- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

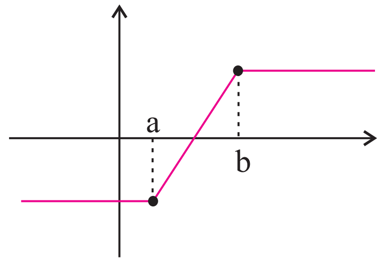
راستی امکان داره از $f(|x|)$ هم سؤال بیاد یه وقت. اول خود $f(x)$ رو می‌کشی. هرچی سمت چپه پاک می‌کنی و هرچی راسته کپی می‌کنی تو چپ معروف‌ترین تابع $\sqrt{|x|}$ هستش که البته چیزی تو چپ نداره و تو توابع نمایی و لگاریتمی بیشتر کاربرد داره این مدل و تو فصل ۷ می‌بینیم:



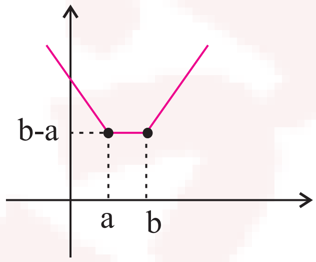
نمودار $\sqrt{|x|}$

تیپ ۷: گلدون و سرسره

$g(x)=|x-a|-|x-b|$



$f(x)=|x-a|+|x-b|$



تست

۳۵- نمودارهـای دو تابع $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=x+7$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هســتند. اندازهٔ پاره خط AB، کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۹)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $10\sqrt{2}$

۳۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|-|x-2|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

تیپ ۸: مربع کامل‌های مهم و معروف که می‌رن زیر رادیکال

تو تیپ ۱۰ سؤال احتمالی اول بررسی کردیم ولی نمودارشون موند برای اینجا.

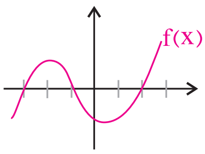
تست

۳۷- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $y=\frac{1}{2}x+2$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

تیپ ۹: اصغر آقا بفرما

مثال: نمودار تابع $f(x)$ داده شده.



ما تو محلمون به $f(x)$ می‌گیم، اصغر آقا. حالا بریم سراغ سوالات!

۱) دامنه اصغرآقا $=\mathbb{R}$

کلاً اصغر آقا هیچ مشکلی نداره یعنی نمودارش هیچ جا قطع نشده پس دامنش میشه $\mathbb{R}$! تو فصل حد یاد می‌گیریم این مسائل رو که اصلاً تابع پیوسته چیه و از این حرف‌ها! ضمناً بد نیست الان بدونید این اصغر آقا یک تابع درجه سوم بوده که تو فصل کاربرد مشتق نمودارش رو بهتون یاد می‌دم. کلاً چندجمله‌ای‌ها دامنشون میشه $\mathbb{R}$!

۲) $\sqrt{f(x)}$ یا $\sqrt{\text{اصغرآقا}}$

اینجا درسته که خود اصغر مشکلی نداره ولی رادیکال به اصغر آقا می‌گه؛ *اصغر آقا بفرما، اگه بالایی بفرما!*

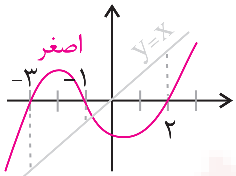
یعنی جاهایی که اصغر زیر محور xها رفته برای رادیکال مورد قبول نیست. پس جواب می‌شه: $[-3,-1]\cup[2,+\infty)$

شاید با خودت بگی ای بابا از -3 تا -1 که xهامون منفی هستن! در جوابت باید بگم همونطور که قبلاً هم اشاره کردیم علامت x مهم نیست بلکه علامت y اهمیت داره. تو اون بازه yها مثبت هستن.

۳) $\sqrt{x.f(x)}$ یا $\sqrt{x\,(\text{اصغرآقا})}$

حالا اصغر آقا با خانوم x ازدواج می‌کنه و دوتایی با هم باید برن زیر سقف رادیکال.

بنابراین لازمه که هم‌علامت (هم‌دل) باشن که بتونن زیر سقف جدید زندگی خوبی رو با هم داشته باشن.



بهترین راه برای حل اینجور مسائل رسم نموداره. نمودار اصغر یا همون $f(x)$ رو که خودش بهمون داده. نمودار $y=x$ رو هم که بلدیم خودمون. حالا جفتش رو تو یه دستگاه رسم می‌کنیم.

همونطور که تو نمودار می‌بینید قبل از ۳- هر دو پایین و منفی هستن. هم اصغر و هم خانومش! پس منفی در منفی می‌شه + و می‌تونن زیر رادیکال برن.

بین $[-۳,-۱]$ قبول نیست چون اصغر بالا و خانومش پایینه! دوباره $[-۱,۰]$ قبوله چون هر دو پایین هستن. بین $[۰,۲]$ هم که قبول نیست چون اصغر پایینه و خانومش بالا! ۲ به بعد هم هر دو مثبتن و اجازه ورود دو نفره به زیر رادیکال رو دارن! پس جواب آخر:

$(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰]\cup[۲,+\infty)$

۴) $\sqrt{\dfrac{x}{f(x)}}$

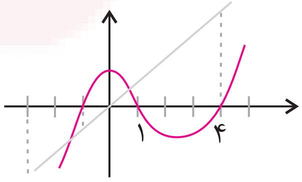
جواب این سوال مثل حالت قبلیه با این تفاوت ناچیز که $f(x)$ نباید صفر باشه. چون مخرجه پس ریشه‌های $f(x)$ از بازه خارج می‌شن:

$(-\infty,-۳)\cup(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$

دقت داشته باشید $x=۰$ هست و بازه رو باید بست چون صورت رو صفر می‌کنه نه مخرج!

۵) $\sqrt{x\ \ f(x-۲)}$

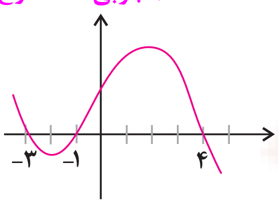
حالا اصغر آقا یا همون $f(x)$ باید ۲ واحد بره جلو و بعد با خانوم x ازدواج کنه.



بنابراین نمودار جدید رو رسم می‌کنیم: جواب $=(-\infty,-۱]\cup[۰,۱]\cup[۴,+\infty)$

تست

۳۸- شکل روبرو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

تیپ ۱۰: {دامنه و برد از روی نمودار}

قطعاً بهترین روش برای تعیین دامنه و برد هر تابعی اینه که نمودارش رو بلد باشیم. تصویر نمودار در امتداد محور xها میشه دامنه و در امتداد محور yها میشه برد.

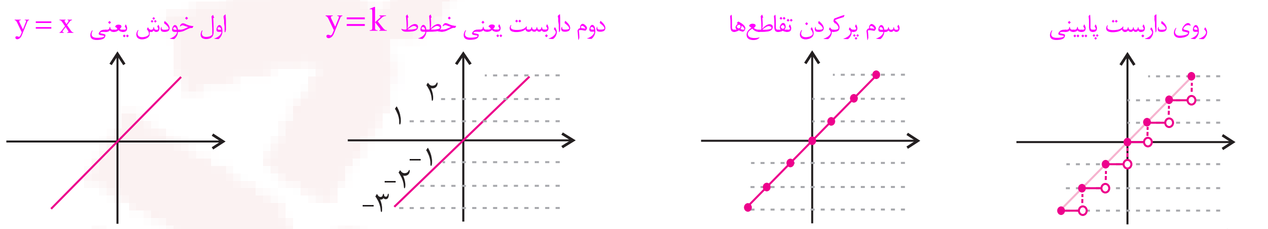
تست

۳۹- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=-x^۳+۲$ بازه‌ی $[-۱,۳]$ باشد، برد آن به صورت $[a,b]$ می‌باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

تیپ ۱۱: { نمودار $[f(x)]$ }

برای رسم این نمودار به روش زیر عمل می‌کنیم:



قطعاً همتون با من موافقید که نمودار این تابع شبیه پلکانه و به همین خاطر بهش میگن تابع پلّه‌ای!

تست

۴۰- نمودار تابع $y=\left[x^2\right]$ روی بازه $x\in(-2,2)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است؟ (تجربی ۹۱ خارج)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تیپ ۱۲: { مهم‌ترین توابع براکتی و رسم توابعی به فرم $[f(x)] \overset{\pm}{\underset{\div}{\times}} g(x)$ }

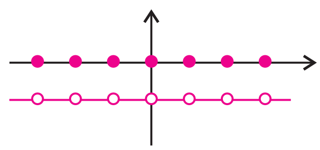
تو قدرمطلق شرط‌بندی می‌کردیم. اینجا بازه‌بندی می‌کنیم. مهم‌ترین تابع تو این تیپ $f(x)=x-[x]$ هستش که مثلاً تو بازه $[-1,2)$ بازه‌بندی می‌کنم و هر خط رو تو بازه خودش برات رسم می‌کنیم.

$$-1\le x<0 \Rightarrow y=x-(-1) \Rightarrow y=x+1$$
$$0\le x<1 \Rightarrow y=x-0 \Rightarrow y=x$$
$$1\le x<2 \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow y=x-1$$

حالا هر خط رو تو بازه خودش بر می‌داریم. نمودارش رو تو تست اول ببین:

تابع دوم که خیلی مهمه $g(x)=[x]+[-x]$ هستش که xها رو $\mathbb{Z}$ و نا $\mathbb{Z}$ می‌کنه. هر x عضو $\mathbb{Z}$ صحیح که بهش بدی جوابش صفره و هر x ناصحیح بهش بدی جوابش (۱-).

پس داریم:



$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , x\in z\\ -1 & , x\notin z\end{cases}$$

تست

۴۱- نمودار تابع $y=x-[x], x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟ (تجربی ۸۳)

۱) (۴ ،۱) ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) (۵ ،۱) ۴) $(5,\sqrt{2})$

۴۲- از معادله‌ی $[x]+[-x]=x-[x]$ کدام مقادیر برای x قابل قبول است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

تیپ ۱۳: {نمودار توابع چند ضابطه‌ای و یکنوایی}

گاهی اوقات توابع رو به صورت چند ضابطه‌ای از شما می‌خوان که به همون شکلی که تو دو درسنامه‌ی قبلی بهتون یاد دادم، رسم می‌کنید با این تفاوت که هر نمودار در دامنه خودش! به چند تا مثال زیر توجه کنید.

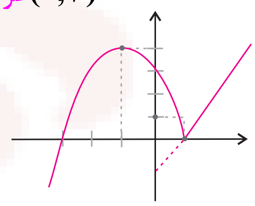
مثال ۱:

$$f(x)=\begin{cases}-x^{۲}-۲x+۳ & , x\leq ۱\\ x-۱ & , x>۱\end{cases}$$

اول سهمی $\Rightarrow \begin{cases} x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)}=-۱\\ y_{۲}=-(-۱)^{۲}-۲(-۱)+۳=۴\end{cases}$

$$-x^{۲}-۲x+۳=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases}x_۱=۱\\ x_۲=-۳\end{cases}$$

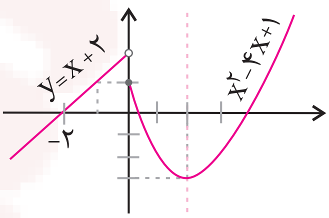
عرض از مبدا سهمی $(۰,۳)$



مثال ۲:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۴x+۱ & , x\geq ۰\\ x+۲ & , x<۰\end{cases}$$

سهمی تو xهای مثبت و خط تو xهای منفی. (همین سهمی تو مثال ۱ در درسنامه‌ی قبلی رسم شد).

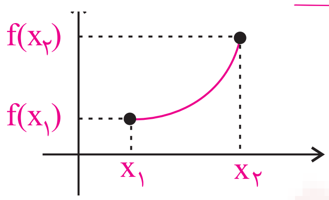


تست

۴۳- برد تابع $y=\begin{cases}x^{۲}-۴x & x>۱\\ ۲x-۳ & x<-۱\end{cases}$ کدام است؟

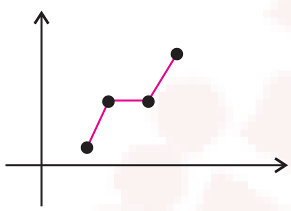
۱) $(-\infty,-۵)\cup(-۴,+\infty)$
۲) $(-۵,-۴]$
۳) $(-\infty,-۵)\cup[-۳,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۵)\cup[-۴,+\infty)$

تعریف تابع صعودی اکید به زبون ریاضی: به ازای هر $x_۲>x_۱$؛ $f(x_۲)>f(x_۱)$ باشه.

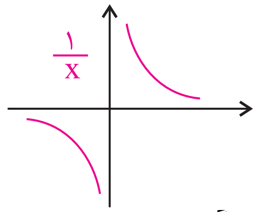


تعریف تابع صعودی اکید به زبون خودمونی: با افزایش x؛ y ها هم زیاد بشن.

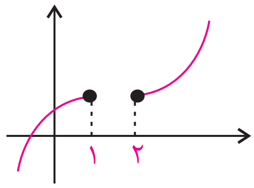
اگر $f(x_۲)\geq f(x_۱)$ باشه دیگه اکیداً صعودی نیست و فقط صعودیه مثل این نمودار:



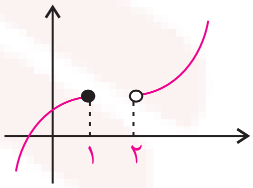
بنابراین اگر صعود کنه یا ثابت باشه می‌شه صعودی، برعکس اگر نزول کنه یا ثابت باشه می‌شه نزولی. رمز عملیات هم میشه یا ثابت یعنی اینکه به تابع ثابت از نظر یکنوایی می گن هم صعودی و هم نزولی ولی به تابعی که یه جاهایی صعودی و یه جاهایی نزولی باشه می گن نه صعودی و نه نزولی یا غیریکنوا.



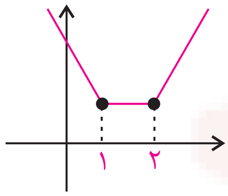
اکیداً نزولی: $(-\infty,\text{۰})$
اکیداً نزولی: $(\text{۰},+\infty)$
ولی بر کل دامنه نه صعودی و نه نزولی
در عین حال که یک‌به‌یک است ولی غیریکنواست.



این دیگه صعودی اکید نیست و فقط صعودیه. در واقع یکنوای اکید نیست و فقط یکنواست، چون به ازای هر $x_2>x_1$؛ $f(x_2)$ بزرگ‌تر از $f(x_1)$ نیست.
$\text{۲}>\text{۱}$ ولی $f(\text{۲})=f(\text{۱})$



بر کل دامنه اکیداً صعودی است. پس اکیداً یکنوا هم هست. ضمناً یک تابع اکیداً یکنوا قطعاً یکنوا و یک‌به‌یک هم هست.



اکیداً نزولی: $(-\infty,\text{۱})$
نزولی: $(-\infty,\text{۲})$
اکیداً صعودی: $(\text{۲},+\infty)$
صعودی: $(\text{۱},+\infty)$
نه صعودی نه نزولی یا غیریکنوا $(-\infty,+\infty)$

تست

۴۴- اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-5 & , \quad x>3\\ \frac{4}{5}x+\frac{8}{5} & , \quad -2\le x\le 3\\ x^2+6x+8 & , \quad x<-2\end{cases}$$
باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

کد ۵ سؤال احتمالی پنجم: انواع و اقسام نامعادلات

تیپ ۱: نامعادلات هموگرافیک

معروف‌ترین نامعادله سال‌های اخیر اینه که تابع کسری رو میذارن بین دو تا عدد. شما تو این جور مواقع نامعادله رو تبدیل به معادله کن. راستی حواست باشه ریشه مخرج رو اخراجش کنی.

تست

۴۵- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\text{۱}<\frac{x+1}{2x-1}<\text{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $(\text{۰/۶},\text{۱/۵})$ ۲) $(\text{۰/۸},\text{۱/۲})$ ۳) $(\text{۱},\text{۲})$ ۴) $(\text{۰/۸},\text{۲})$

تیپ ۲: نامعادلات کسری با ریشه‌های مشترک مخرج

مثل تیپ ۱ تبدیل به معادله کن. فقط اینجا بررسی گزینه‌ها حول ریشه مخرج رو هم اضافه کن. نقاط تقاطع یا همون جواب‌های معادله قطعاً جزو نقاط مرزی هستن. ریشه غیرمشترک هم همینطور اما اگر ریشه مخرج مضاعف بود و پایین دو طرف تکراری بود باید بررسی بشه.

تست

۴۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲} > \frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$ **به صورت بازه، کدام است؟** **(تجربی خارج ۹۸)**

۱) $(-۴,۲)\cup(۲,۴)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

۴۷- نامعادله‌ی $۱ \le \frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}$ **در بازه‌ی $(-\infty,a)$ برقرار است، بیشترین مقدار a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

تیپ ۳: همو‌گرافیک‌های نامتقاطع

تو این حالت جواب فقط حول ریشه‌های مخرجه. چون ریشه‌ها ساده هستن و مشترک هم نیستن.

تست

۴۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{۱}{x-۳} > \frac{۱}{x-۱}$ **به کدام صورت است؟** **(تجربی ۸۳)**

۱) $x<۳$ ۲) $۱<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $-۲<x<۳$

تیپ ۴: نامعادلات گویایی که یک طرف نامعادله صفره

۱) صورت معلوم العلامت و مخرج درجه ۱ ← کافیه علامت مخرج رو تعیین کنی.

۲) صورت و مخرج هر دو درجه ۱ ← علامت $\frac{a}{b}$ علامت ab ! یعنی وقتی مثلاً تقسیمشون منفیه ضربشون منفیه.

۳) مجموع درجات صورت و مخرج بیشتر از ۲ ← جدول تعیین علامت.

چند مثال از حالت ۱:

مثال ۱: کسری که صورتش مثبته زمانی مثبت می‌شه که مخرجش هم مثبت باشه:
$$\frac{۱}{x-۲}>۰ \xrightarrow{\text{صورت که+}} x-۲>۰ \Rightarrow x>۲$$

مثال ۲: کسری که صورتش مثبته زمانی منفی میشه که مخرجش منفی باشه:
$$\frac{x^۲+۱}{x-۲}<۰ \xrightarrow{\text{صورت+}} x-۲<۰ \Rightarrow x<۲$$

مثال ۳: اینم مثل مثال یک حل میشه. صورت همواره مثبته (کد ۳)
$$\frac{x^۲-۲x+۳}{x-۲}>۰ \xrightarrow{\text{صورت همواره+}} x-۲>۰ \Rightarrow x>۲$$

چند مثال از حالت ۲:

مثال ۱:
$$\frac{x+۱}{x-۲}<۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲$$

مثال ۲:
$$\frac{(x-۱)^۲}{x^۲-۳x+۲}<۰ \Rightarrow \frac{\cancel{(x-۱)}(x-۱)}{\cancel{(x-۱)}(x-۲)}<۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)<۰ \Rightarrow ۱<x<۲$$

حواستون باشه همیشه می‌تونید صورت و مخرج کسر رو با هم ساده کنید ولی اگر لازم بود باید ریشه مخرج رو از دامنه خارج کنید.

مثال از حالت ۳:

x	$-\infty$		۱		۲		۴		$+\infty$
		−	۰	+	∞	−	۰	+	

$$\frac{x^۲-۵x+۴}{x-۲}\le ۰ \Rightarrow \text{جواب آخر}: (-\infty,۱]\cup(۲,۴]$$

دسته دوم نامعادلاتی که هیچ طرف صفر نداریم و سمت راست نامعادله یک عدد غیر صفر و یا یک عبارت xدار قرار می گیره. قبل از اینکه وارد حالت‌های ۴، ۵ و ۶ بشم می‌خوام عبارت‌های همواره نامنفی مهم و معروف رو براتون بگم. راستی فرق همواره مثبت با همواره نامنفی اینه که تو همواره مثبت $y>۰$ و هیچ وقت صفر نمیشه ولی تو همواره نامنفی $y\ge ۰$ و گاهی هم صفر می‌شه. البته هر همواره نامنفی که با یک مقدار مثبت ثابت جمع بشه، تبدیل به همواره مثبت می‌شه، پس همواره مثبت‌ها رو با هم ببینیم.

همواره مثبت‌ها

۱. هر چیزی که به توان زوج و یا فرجه زوج برسه نامنفیه و وقتی با یک مقدار مثبت جمع بشه، می‌شه همواره مثبت.
۲. هر چیزی که داخل قدرمطلق باشه، همواره نامنفیه و وقتی با یک مقدار مثبت جمع بشه همواره مثبت می‌شه.
۳. تمام درجه دوم‌هایی که $a>0$ و $\Delta<0$ باشه همواره مثبت هستن.
۴. تمام عبارت‌های نمایی به صورت a^x همواره مثبت هستن.

تست

۴۹- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-3x-4}{x-1}<0$ به صورت $(-\infty,a)\cup(b,c)$ است. $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تیپ ۵: {نامعادلات گویایی که دو طرف مخالف صفره}

اگر علامت مخرج ثابت بود طرفین وسطین کن. در غیر این صورت همه به چپ و مخرج مشترک.

تذکر: تو حل نامعادلات گویا می‌تونیم طرفین کسرها رو در عبارات همواره مثبت ضرب کنیم و جهت عوض نمیشه. اگر در همواره منفی ضرب کنیم براساس اصولی که تو نامساوی‌ها خوندیم، جهت عوض می‌شه. طرفین وسطین‌کردن تو نامعادلات کسری در واقع همین ضرب طرفین در مخرج‌هاست. مثلاً وقتی نامعادله $\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$ رو به ما می‌دن مخرج همواره مثبته و می‌تونیم طرفین رو تو (x^2+4) ضرب کنیم: $(x^2+4)\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2(x^2+4)$ حالا اون (x^2+4) تو صورت و مخرج سمت چپ با هم می‌رن و انگار که طرفین وسطین کردیم.

راستی طرفین وسطین چی بود؟ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. به a، d طرفین و به b، c وسطین می‌گیم و داریم: $\boxed{ad=bc}$

حالا می‌تونم با خیال راحت حالت‌های ۴ تا ۶ رو بهتون یاد بدم. همونطور که گفتیم تو این دسته هیچ کدوم از طرفین نامعادله صفر نیست.

۴) مخرج همواره مثبت؛ طرفین وسطین واجب و جهت عوض نمی‌شه.
۵) مخرج همواره منفی؛ طرفین وسطین واجب و جهت عوض می‌شه.
۶) مخرج دارای علامت متغیر؛ طرفین وسطین حرومه. همه رو میاریم سمت چپ و مخرج مشترک می‌گیریم.

مثال از حالت ۴:

$$\frac{2x^2-x}{x^2+2}>1\Rightarrow 2x^2-x>x^2+2$$

$$\Rightarrow x^2-x-2>0\Rightarrow\begin{cases}\text{گام اول}: x^2-x-2=0\xrightarrow{a+c=b}x_1=-1\ ,\ x_2=2\\ \text{گام دوم}: \text{جواب میشه خارج دو ریشه}\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2\end{cases}$$

مثال از حالت ۵:

$$\frac{x^2-2}{-3x^2-1}>1\Rightarrow x^2-2<-3x^2-1\Rightarrow 4x^2<1\Rightarrow x^2<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{-1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

مثال از حالت ۶: اینجا دیگه مخرج درجه اوله و جزء همواره مثبت‌ها نیست.

مثال ۱:

$$\frac{x^2+1}{x-1}<2$$

پس دیگه طرفین وسطین حرومه و باید ۲ رو بیاریم سمت چپ و مخرج مشترک بگیریم:

$$\frac{x^2+1}{x-1}-2<0\Rightarrow\frac{x^2+1-2(x-1)}{x-1}<0\Rightarrow\frac{x^2-2x+3}{x-1}<0$$

رسیدیم به یکی از سه حالت اول این حالت، شماره چنده بچه‌ها؟! اشتباه نکنین این حالت ۳ نیست چون صورت دلتاش منفیه و همواره مثبته. این حالت شماره‌ی یکه و داریم: کسری که صورتش مثبته زمانی منفی می‌شه که مخرجش منفی باشه و تمام!

$$x-1<0\Rightarrow \boxed{x<1}$$

مثال ۲:

$$\frac{x^2-2}{x}\le 1\Rightarrow \frac{x^2-2}{x}-1\le 0\Rightarrow \frac{x^2-2-x}{x}\le 0\Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x}\le 0\Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x}\le 0\xrightarrow{\text{حالت شماره ۳}}$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	

$(-\infty,-1]\cup(0,2]$

جواب آخر:

پس همونطور که دیدیم تو حالت ۶ بعد از مخرج مشترک‌گیری با یکی از حالت‌های ۳ گانه اول مواجه می‌شیم و به یکی از اون سه راه، حلش می‌کنیم.

تست

۵۰- در مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{x-2}<\frac{x}{5+2x}$ ، چند عدد صحیح قرار می‌گیرد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۵۱- نامعادله‌ی $-1<\frac{2x-9}{|x^2+1|}$ در کدام بازه، برقرار است؟

۱) $(2,6)$ ۲) $(-4,2)$ ۳) $(-2,4)$ ۴) $(-1,5)$

تیپ ۶: ترکیب هموگرافیک با قدرمطلق

هم می‌تونی مثل تیپ ۱ عمل کنی و هم می‌تونی با خاصیت جامپینگ به شکل تیپ ۵ تبدیلش کنی.

تست

۵۲- مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1$ کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $(-3,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1)$

۳) $(-3,-\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

تیپ ۷: نامعادله قدرمطلقی

کافیه تبدیل به معادلش کنی یا از طریق روش کلی نامعادلات قدرمطلقی حلش کنی.

به طور کلی ۵ حالت وجود داره:

❋ قدر همو می‌دونن با همدیگه می‌مونن، با خوب و بد هم می‌سازن، بدون شرط

$\boxed{\text{Tip۱}}$ $|f|=|g|\Rightarrow f=\pm g$

مثال ۱:

$$|x-1|=|2x-5|\Rightarrow x-1=\pm(2x-5)\Rightarrow \begin{cases} x-1=2x-5\Rightarrow x=4\\ x-1=-2x+5\Rightarrow x=2\end{cases}$$

❋ اینجا فرض می‌کنیم مثل بالاست ولی شرط می‌ذاریم که g نباید منفی بشه:

$\boxed{\text{Tip۲}}$ $|f|=g\Rightarrow f=\pm g$

مثال ۲:

$$|x-1|=\underbrace{2x-5}_{g}\Rightarrow \text{مثل بالا}\Rightarrow \begin{cases} x=4\to g(4)=2(4)-5>0\Rightarrow \text{پس قبوله}\\ x=2\to g(2)=2(2)-5<0\Rightarrow \text{پس قبول نیست}\end{cases}$$

مثال ۳: $\boxed{Tip3}\ |u|<a \Rightarrow -a<u<a$

$|x-1|<2 \Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$

مثال ۴: $\boxed{Tip4}\ |u|>a \Rightarrow u>a$ یا $u<-a$

$|x-1|>2 \Rightarrow x-1>2$ یا $x-1<-2 \Rightarrow x>3$ یا $x<-1$

این تنها حالتیه که طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم: $\boxed{Tip5}\ |u|>|v| \to u^2>v^2$

مثال ۵: $|x-1|>|x-2| \Rightarrow (x-1)^2>(x-2)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1>x^2-4x+4 \Rightarrow 2x>3 \Rightarrow \boxed{x>\frac{3}{2}}$

تست

۵۳- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+|x| \le \frac{1}{2}x+3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۵ خارج)

۱) $[-4,2]$ ۲) $[-6,1]$ ۳) $[-6,2]$ ۴) $[-2,6]$

تیپ ۸: نامعادلاتی که با نمودار سریع حل می‌شن

کافیه نمودار دو طرف نامعادله راحت باشه. سریع رسمش کن و ببین کجاها به هم می‌خورن.

تست

۵۴- مجموعه جواب نامعادله $x^2-2x<|x-2|$ به صورت کدام بازه‌ها است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

۱) (۱، ۲-) ۲) (۱، ۱-) ۳) (۲، ۱-) ۴) (۲، ۱)

۵۵- در بازه‌ی (a,b)، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

(خارج تجربی ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

کد ۶ سؤال احتمالی ششم: انواع تابع با نمایش‌های مختلف + اعمال روی توابع و تساوی دو تابع

تیپ ۱: تابع بودن یا نبودن؛ مسئله این است

به ازای هر ورودی فقط یک خروجی داریم. پس مؤلفه اول تکراری نداریم. تمام.

تست

۵۶- رابطه‌ی $\{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟ (تجربی ۸۵ خارج)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

تیپ ۲: یک به یک بودن تو زوج‌های مرتب

تو تیپ بالا اگر مؤلفه دوم‌ها تکراری بودن اشکالی نداشت ولی اینجا اشکال داره.

تست

۵۷- اگر تابع $f(x)=\{(۱,a^۲),(a^۲+۱,۳),(a^۳,-a),(a-۱,۰),(۵,۳)\}$ یک‌به‌یک باشـد، مجموعه‌ی مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $\{۲,-۲\}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $\{-۲\}$ ۴) $\varnothing$

تیپ ۳: یکنوایی تو زوج مرتب

اول xها رو از کوچیک به بزرگ به صف کن و بعد روند yهاشون رو ببین.

تست

۵۸- اگر تابع $f=\{(۱,m),(۵,۷m+۲),(۳,۲m+۱)\}$ صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۵},+\infty)$ ۳) $[-۱,-\frac{۱}{۵})$ ۴) $(-\infty,-۱)$

تیپ ۴: اعمال بر روی توابع تو زوج‌های مرتب

برای اینکه دو تا تابع بتونن با همدیگه جمع بشن، از همدیگه کم بشن، تو همدیگه ضرب بشن یا به همدیگه تقسیم بشن لازمه که مؤلفه‌های اول مشترک داشته باشن و تغییرات فقط روی مؤلفه دوم انجام می‌شه.

تست

۵۹- اگر $f=\{(۲,۴),(۴,۶),(۵,۰)\}$ و $g=\{(۵,-۲),(۷,۰),(۶,۱),(۲,۰)\}$ ، تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۴),(۵,۰),(۰,۵)\}$ ۲) $\{(۲,۲),(۵,-۲)\}$
۳) $\{(۲,۰),(۵,۰)\}$ ۴) $\{(۰,۲),(۱,۵),(۲,۶)\}$

تیپ ۵: تعیین دامنه از روی ضابطه

تو بحث تعیین دامنه و یا ورودی‌های مجاز باید بدونید که اولاً مخرج هیچوقت نباید صفر بشه و ثانیاً زیر رادیکال با فرجه زوج هیچوقت نباید منفی بشه. بریم چند تا مثال خوب با هم ببینیم:

اول توابع کسری: مخرج رو مساوی صفر قرار می‌دیم و ریشه‌های مخرج رو از دامنه خارج می‌کنیم، دامنه توابع زیر رو مشخص می‌کنیم:

۱) $y=\frac{x}{x-۱}\to\mathbb{R}-\{۱\}$

۲) $y=\frac{x}{x^۲-۳x+۲}\to\mathbb{R}-\{۱,۲\}$

۳) $y=\frac{x}{x^۲-۱}\to\mathbb{R}-\{\pm۱\}$

۴) $y=\frac{x}{x^۲+۱}\to x^۲+۱\neq۰\Rightarrow\mathbb{R}$

حالا توابع رادیکالی با فرجه زوج:

۱) $y=\sqrt{x}\Rightarrow x\geq۰$

۲) $y=\sqrt{x-۲}\Rightarrow x\geq۲$

۳) $y=\sqrt{-x}\Rightarrow -x\geq۰\Rightarrow x\leq۰$

۴) $y=\sqrt{\frac{x}{x-۲}}\Rightarrow\frac{x}{x-۲}\geq۰\xrightarrow{a \atop b}x(x-۲)\geq۰\Rightarrow x\leq۰$ یا $x>۲$

چون ۲ ریشه مخرجه!

۵) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۲}} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \\ x > ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > ۲$

تست

۶۰- اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

تیپ ۶: {انواع توابع}

تابع خطی که میشه $f(x)=ax+b$ ؛ تابع ثابت $f(x)=c$ و تابع همانی $f(x)=x$. این سه تا رو باید بلد باشی برای حل سؤالات انواع توابع. ضمناً $f(x)=x$ همون نیمسازه ناحیه اول و سومه و $f(x)=-x$ نیمسازه ناحیه دوم و چهارم.

تست

۶۱- در مورد تابع خطی f می‌دانیم $f(۲)=۵$ و $f(-۱)=-۱$. این تابع محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۲- f تابعی ثابت و g تابع همانی است. اگر دامنه‌ی این دو تابع $\mathbb{R}$ باشد و $f(-۱)=۳$ ، حاصل $f(g(۲))+g(f(۳))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

تیپ ۷: {تساوی دو تابع}

توجه: یک نتیجه‌گیری مهم و ورود به بحث **تساوی دو تابع:**

برای اینکه دو تابع مساوی باشن دو شرط لازمه:
- ۱) ضابطه‌ها یکی باشن $f=g$
- ۲) دامنه‌ها یکی باشن $D_f=D_g$

با توجه به دو شرط بالا، دو تابع مثال ۴ و ۵ تیپ ۵ با هم مساوی نیستن چون علی‌رغم دارابودن شرط $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ در قوانین رادیکال‌ها به دلیل عدم داشتن دامنه‌های یکسان دو تابع مساوی محسوب نمی‌شن.

این بحث رو در توابع خاص که بهشون می‌رسیم مثل مثلثاتی (تو فصل مثلثات)، کسری‌های خاص (تو فصل حد) و لگاریتمی‌ها (تو فصل لگاریتم) مفصل بررسی می‌کنیم.

تست

۶۳- در کدام گزینه، دو تابع داده شده با هم مساوی هستند؟

۱) $f(x)=x+۱ \ , \ g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$

۲) $f(x)=۱ \ , \ g(x)=\frac{|x|}{x}$

۳) $f(x)=۱ \ , \ g(x)=\frac{x-۱}{x-۱}$

۴) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{۱-x} \ , \ g(x)=\sqrt{x(۱-x)}$

کد ۷ سؤال احتمالی هفتم: ترکیب توابع

$$\xrightarrow{} x \rightarrow \underbrace{g(x)}_{\text{تابع داخلی}} \rightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{تابع اصلی}} \rightarrow \underbrace{f(g(x))}_{\text{تابع مرکب}}$$

تیپ ۱: {فرم اصلی و کلاسیک تابع مرکب}

تو این قسمت می‌خوام بهتون یاد بدم تابع $f(g(x))$ چه جوری ساخته می‌شه بچه‌ها.

خُب قبلاً $f(x)$ داشتیم. مثلاً می‌گفتیم $f(x)=\sqrt{x}$ حالا اگه بخوایم $f(g(x))$ رو داشته باشیم، باید تو f به جای x، $g(x)$ بذاریم یعنی $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$ و $g(x)$ هر تابعی می‌تونه باشه. مثلاً اینجا اگر $g(x)=\text{Sinx}$ بود $f(g(x))$ می‌شه $\sqrt{\text{Sinx}}$. اگر $g(x)=x^۲-۳x$ بود $f(g(x))$ می‌شد $\sqrt{x^۲-۳x}$. اگر $g(x)=x^۲$ بود؛ $f(g(x))=\sqrt{x^۲}=|x|$. حالا اگه تو همین مثال $f(x)$ و $g(x)$ جاشون عوض می‌شد یعنی:

$$f(x)=x^۲,g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f(g(x))=(\sqrt{x})^۲=x\rightarrow\left((\sqrt{x})^۲=x \text{ ولی } \sqrt{x^۲}=|x|\right)$$

همونطور که می‌دونید تابع x هیچ مشکلی نداره یعنی نه مخرجی داره که بخواد صفر بشه و نه رادیکال فرجه زوجی داره که بخواد زیرش منفی بشه، پس دامنش می‌شه $\mathbb{R}$ ولی این جواب برای دامنه fog غلطه و دامنه fog تو این حالت $\mathbb{R}$ نیست.

دامنه fog رو فقط باید با توجه به تعریف قسمت قبلی تعیین کنیم:
$$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

حالا کافیه موارد بالا رو جاگذاری کنیم:
$$D_g:x\geq ۰\ ,\ D_f=\mathbb{R}\Rightarrow D_{fog}=\{x\geq ۰|\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}$$

$\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ که حل نمی‌خواهد پس کافیه: $x\geq ۰$ باشه. بنابراین دامنه fog شد $[۰,+\infty)$.

حالا بریم چند تا مثال خوب از ساخت و تعیین دامنه تابع مرکب با هم ببینیم:

مثال ۱:

$$\left.\begin{matrix}f(x)=\sqrt{x-۱}\\ g(x)=\dfrac{x+۱}{x+۲}\end{matrix}\right\rangle fog=f(g(x))=\sqrt{\dfrac{x+۱}{x+۲}-۱}\ ,\ D_f=x\geq ۱\quad ,\quad D_g:x\neq -۲$$

$$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\left\{\underbrace{x\neq -۲}_{\text{I}}\left|\underbrace{\dfrac{x+۱}{x+۲}\geq ۱}_{\text{II}}\right.\right\}$$

حالا برای اینکه بتونیم از I و II اشتراک بگیریم باید اول جواب II رو به دست بیاریم. تو نامساوی‌ها حالت شماره چند بود؟! آفرین.

حالت شماره ۶. عدد ۱ رو میاریم این ور و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+۱}{x+۲}-۱\geq ۰\Rightarrow\frac{x+۱-x-۲}{x+۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{-۱}{x+۲}\geq ۰\xrightarrow{\text{رسیدیم به حالت ۱}}x+۲<۰\Rightarrow\boxed{x<-۲}$$

جواب آخر همینه چون خودبه‌خود $x=-۲$ هم از دامنه خارج شد.

مثال ۲:

$$\begin{cases}g(x)=\sqrt{x-۲}\\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x+۹}{۱-x}}\end{cases}\rightarrow gof=g(f(x))=\sqrt{\sqrt{\dfrac{x+۹}{۱-x}}-۲}\quad(۱-x=-x+۱)$$

$$D_f=\frac{x+۹}{-x+۱}\geq ۰\xrightarrow{\text{شماره ۲}}-۹\leq x<۱\ ,\ D_g:x\geq ۲$$

$$D_{gof}=D_{g(f(x))}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\left\{\underbrace{-۹\le x<۱}_{I} \middle| \underbrace{\sqrt{\frac{x+۹}{-x+۱}}\ge ۲}_{II}\right\}$$

$$II\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{x+۹}{-x+۱}\ge ۴\xrightarrow{\text{شماره ۳}}\frac{x+۹}{-x+۱}-۴\ge ۰\Rightarrow\frac{x+۹+۴x-۴}{-x+۱}\ge ۰$$

$$\Rightarrow\frac{۵x+۵}{-x+۱}\ge ۰\Rightarrow\frac{۵(x+۱)}{-x+۱}\ge ۰\xrightarrow{\text{شماره ۲}}\boxed{-۱\le x<۱}\xrightarrow{\text{اشتراک } II,I}\boxed{-۱\le x<۱}$$

مثال ۳:

$$f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_f\}=\left\{x\ne ۰ \middle| \underbrace{\frac{۱}{x}\ne ۰}_{\text{این که همیشه برقراره}}\right\}\Rightarrow D_{fof}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

مثال ۴:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{۹-x^۲}\to ۹-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۹\Rightarrow -۳\le x\le ۳\\ g(x)=\sqrt{x+۱}\to x+۱\ge ۰\Rightarrow x\ge -۱\end{cases}$$

$$fog=f(g(x))=\sqrt{۹-(x+۱)}=\sqrt{۸-x}$$

$$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in Dg | g(x)\in D_f\}=\left\{\underbrace{x\ge -۱}_{I} \middle| \underbrace{-۳\le\sqrt{x+۱}\le ۳}_{II}\right\}$$

باز هم باید (II) رو حل کنیم و اشتراک بگیریم با (I). $\sqrt{x+۱}\ge -۳$ که بدیهیه.

کافیه $\sqrt{x+۱}\le ۳$ رو حل کنیم. طرفین رو به توان ۲ می‌رسـونیم: $x+۱\le ۹\Rightarrow\boxed{x\le ۸}$ حالا که با (I) اشـتراک بگیریم جواب می‌شه: $\boxed{-۱\le x\le ۸}$

تست

۶۴- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادله $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷ خارج)

۱) $-۱,-۷$ ۲) $۱,-۷$ ۳) $-۱,۷$ ۴) $۱,۷$

۶۵- اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-۱$ ۴) $x+۱$

۶۶- اگر $f(x)=x^۲+۳x$ و $g(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(-۴,۱)$ ۲) $(-۳,۲)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۴)$

تیپ ۲: {تابع اصلی و مرکب معلوم}

تا اینجا f و g رو داشتیم و از روشون fog و gof می‌نوشتیم. حالا اگه fog و f رو بهمون داده باشن چه جوری تابع داخلی رو به دست بیاریم. خب اولاً خیالمون راحته که اصلش دستمونه و مطمئنیم که fog از کجا اومده. از fog می‌پرسیم که f(g) کی بودی تو؟! و fog جواب می‌ده: بگفتا من fی ناچیز بودم؛ بگفتا من fی با x بودم؛ ولیکن مدتی با g نشستم. حالا این مرکبی هستم که هستم. پس می‌گه تو f به جای xهاش g گذاشتن که به این شکل در اومده. بریم مثال رو ببینیم و یاد بگیریم:

مثال:

$$f(x)=x-۱\quad,\quad f(g(x))=۲x+۵$$

$f(g)$ چه جوری به وجود اومده؟ اول $f(x)$ بوده که به جای xش؛ g گذاشتن:

$$g-۱=f(g(x)) \Rightarrow g-۱=۲x+۵ \Rightarrow g=۲x+۶$$

تست

۶۷- اگر توابع f و g به عنوان ماشیـن به صورت $x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow ۲x$ باشند و $g(x)=۳x+۴$ مقدار $f(۵)$ کدام است؟ (تجربی ۹۱ خارج)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸- اگر $g(f(x))=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲}{۷-x}$ ، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱-

تیپ ۳: {تابع داخلی و مرکب معلوم}

مثلاً $f(x-۱)=۲x+۵$ کافیه به جای $x-۱$ براریم t و سمت راست رو هم بر حسب t بنویسیم:

$$x-۱=t \Rightarrow x=t+۱ \Rightarrow f(t)=۲(t+۱)+۵ \Rightarrow \boxed{f(t)=۲t+۷}$$

تست

۶۹- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $x^۲-x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۱$ ۳) $x^۲-۲x+۱$ ۴) $x^۲-x+۱$

تیپ ۴: {دامنه تابع مرکب}

دامنه تابع مرکب رو باید از تعریفش به دست بیاریم نه اینکه بسازیمش.

تست

۷۰- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ دامنه تابع $f(۳-x)$، کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۷۱- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$، دامنه‌ی تابع gof شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

۷۲- اگر $D_g=[-۲,۳]$ و $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ ، دامنه‌ی تابع $y=gof(x)$ کدام است؟

۱) $[-۷,۲۷]$ ۲) $[-۷,۲۸]$ ۳) $[-۲۷,۸]$ ۴) $[-۳,۸]$

تیپ ۵: {برد تابع مرکب}

همیشه گفتم بهترین راه برای تعیین برد رسم شکل و تسلط بر دامنه و برد روی نموداره بچه‌ها.

تست

۷۳- اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، بُرد تابع gof، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

تیپ ۶: {تابع مرکب با زوج مرتب و نمودار}

اینجا دیگه مثل اعمال روی توابع نیست که لازم بود مؤلفه‌های اول یکی باشه. اینجا برای ساخت $f(g(x))$ باید x تو دامنه g باشه و $g(x)$ تو دامنه f:

$g=\{(-1,0),(0,1),(3,2),(8,3),(15,4),(24,5)\}$

$f=\{(0,2),(1,\sqrt{3}),(2,\sqrt{2}),(3,1),(4,0)\}$

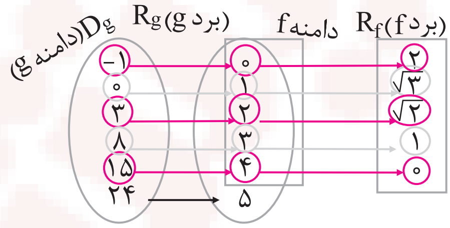
همین حالت رو می‌تونید به صورت زوج مرتبی هم ببینید:

همونطور که بالا هم گفتیم ۲۴ عضو دامنه g بود ولی چون $f(24)$ یعنی ۵؛ عضو مولفه‌های اول f یعنی دامنه f نبود تابع مرکب تشکیل نشد. حالا تابع مرکبمون چی شد؟ x از تابع داخلی یعنی g، y از تابع اصلی یعنی f.

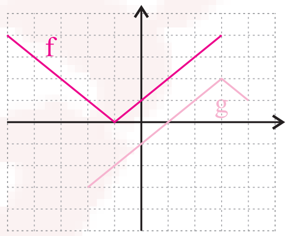
$$fog=f(g(x))=\{(-1,2),(0,\sqrt{3}),(3,\sqrt{2}),(8,1),(15,0)\}$$

الان می‌تونیم روی نمودار وِن کل ماجرا رو ببینیم

(دامنه رو با D[1] و بُرد رو با R[2] نشون می‌دیم).



مثال: با توجه به نمودار مقابل موارد خواسته‌شده رو به دست بیارید؟



الف) $f(g(0))=?$

ب) $f(g(4))=?$

پ) $g(f(3))=?$

ت) $g(f(-4))=?$

الف) $f(g(0))$ $\quad g(0)=-1$ $\quad f(-1)=0$

ب) $f(g(4))$ $\quad g(4)=1$ $\quad f(1)=2$

پ) $g(f(3))$ $\quad f(3)=4$ $\quad g(4)=1$

ت) $g(f(-4))$ $\quad f(-4)=3$ $\quad g(3)=2$

تست

۷۴- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

کد ۸ سؤال احتمالی هشتم: **تابع وارون**

تیپ ۱: {ساخت تابع وارون}

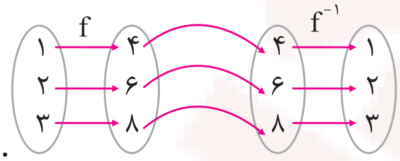
اگه ازتون بخوان که یک عدد رو وارون کنید، می‌برینش تو مخرج، مثلاً وارون ۲ میشه $\frac{1}{2}$ یا وارون ۳- می‌شه $\frac{-1}{3}$. حالا آیا می‌تونیم به همین ترتیب بگیم که وارون x^2 هم می‌شه $\frac{1}{x^2}$ یا وارون x^3 می‌شه $\frac{1}{x^3}$!؟

---

۱. Domain

۲. Range

قطعاً جواب منفیه. راستی دلیلش چیه بچه‌ها ؟! دلیلش اینه که هر عدد یک مولفه بیشتر نداره و وارون‌شدن عدد، همون معکوس شدنه ولی تو تابع هر نقطه شامل دو مولفه است. (x, y) و ضمناً وارون تابع $y=x^2$ می‌شه $x=y^2$ و یا وارون $y=x^3$ می‌شه $x=y^3$.
پس وارون‌شدن تو تابع به معنای عوض‌شدن جای x و y هستش. مثلاً اگر داشته باشیم:
$f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۸)\}$ تابع وارون f که با f^{-1} نمایش داده می‌شه، به این صورته $f^{-1}=\{(۴,۱),(۶,۲),(۸,۳)\}$ حالا اگه f^{-1}, f رو با هم ترکیب کنیم، چی می‌شه بچه‌ها:



$$f^{-1}(f(x))=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

یعنی هر x ای وارد f بشه و بعد وارد f^{-1} دوباره خودش خارج می‌شه و داریم:
هر چی f زحمت کشیده و رشته؛ تو f^{-1} پنبه می‌شه.

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x \rightarrow x \rightarrow \boxed{f^{-1}} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x$$

به همین ترتیب $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

تست

۷۵- قرینه خط به معادله $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ خط d می‌نامیم، عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

تیپ ۲: تعویض x و y

تو تست قبلی دیدیم که وقتی جای x و y عوض بشه ضابطه وارون شده. حالا می‌شه این کار رو فقط با یک نقطه انجام داد. یعنی اینکه وقتی نقطه (a,b) روی f قرار داره پس نقطه (b,a) روی f^{-1} قرار می‌گیره.

تست

۷۶- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۷۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۹)

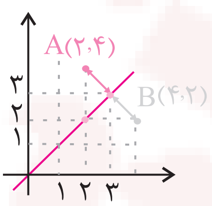
۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۷۸- ضابطه وارون تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$ ۲) $y=\frac{۱-|x|}{|x|}, |x|>۱$ ۳) $y=\frac{x}{|x|-۱}, |x|>۱$ ۴) $y=\frac{|x|-۱}{x}, |x|<۱$

تیپ ۳: وارون از روی نمودار

همونطور که مستحضر هستید روی خط $y=x$ یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم x و yها با هم برابرن و همان x ای که وارد تابع $y=x$ می‌شه همان y هم ازش خارج می‌شه. به همین خاطرِ که به $y=x$ می‌گن تابع همانی.



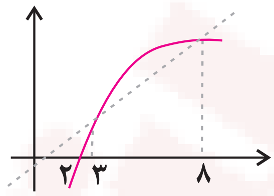
در نمودار مقابل نقطه (۳ و ۳) رو در نظر بگیرید. اگر از این نقطه به سمت بالا حرکت کنیم y زیاد می‌شه و x کم می‌شه و برعکس، اگر به سمت پایین حرکت کنیم x زیاد می‌شه و y کم! حالا اگر به شکل عمود بر نیمساز و به یک اندازه حرکت کنیم دقیقاً جای x و y عوض می‌شه.

یعنی یک پله بریم بالا به نقطه $A(۲,۴)$ می‌رسیم و اگه یک پله بیاییم پایین، نقطه $B(۴,۲)$ در واقع نقطه B معکوس نقطه A است و برعکس. یک تابع از نقاط بی‌شماری تشکیل شده که اگر این کار رو با تک تک نقاط انجام بدیم، نمودار تابع وارون شکل می‌گیره. پس اگر نمودار یک تابع رو نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرینه کنیم، می‌شه نمودار تابع وارون.

تست

۷۹- شکل روبرو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟

(تجربی ۹۴)



۱) $[۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

تیپ ۴: ترکیب وارون و مرکب

رسیدیم به مهم‌ترین سؤال ترکیبی فصل تابع که دیگه تقریباً مد شده و هر سال یک سؤال کنکور از این تیپ مطرح می‌شه.

تست

۸۰- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۲۰)$، کدام است؟

(ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

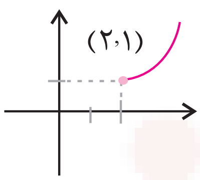
تیپ ۵: محدودیت دامنه و وارون درجه ۲

شرط وارون‌پذیری یک‌به‌یک بودنه. سهمی قبل از رأس و بعدش یک‌به‌یکه.

مثال: با محدودکردن دامنه تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید:

گام اول: $x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(۱)}=۲ \rightarrow y_s=f(۲)=(۲)^{۲}-۴(۲)+۵=۱ \Rightarrow s\,(۲,۱)$

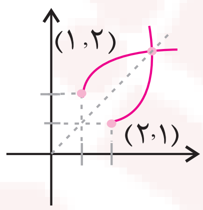
گام دوم: رسم سهمی بعد از رأس



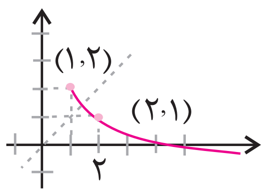
گام سوم: وارون‌کردن نقطه (۱، ۲) و رسم نمودار تابع وارون همونطور که می‌بینید.

ضابطه وارون رادیکال x ایه که یک واحد جلو و دو واحد بالا رفته یعنی

$f^{-1}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$



حالا اگه صورت سؤال ضابطه وارون رو برای قبل از رأس خواست کافیه فقط یه منفی پشت رادیکال بذاریم:



x^2-4x+5

$f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}+2$

این هم ضابطه وارون برای xهای قبل از رأس که دامنه f، $(-\infty,2]$ بود و همین بازه شد برد تابع f^{-1}. برد f هم که $[1,+\infty)$ بود شد دامنه تابع وارون.

تست

۸۱- با فرض $x\le 3$ ، ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=x^2-6x+1$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=3-\sqrt{x+8}$
۲) $f^{-1}(x)=-3+\sqrt{x+8}$
۳) $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x+8}$
۴) $f^{-1}(x)=-3-\sqrt{x+8}$

۸۲- اگر تابع $f(x)=x^2-6x-1$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

تیپ ۶: ترکیب وارون درجه ۲ و تقاطع

اگر بتونی با توجه به تیپ ۵ ضابطه وارون درجه ۲ رو سریع و از روی شکل به دست بیاری چنین مسائلی برات تبدیل به آب خوردن میشه.

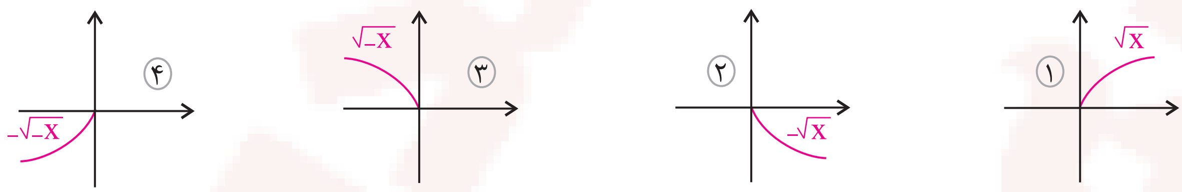
تست

۸۳- اگر $f(x)=x^2-2x-3;x\ge 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-1}, g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ (تجربی ۹۸)

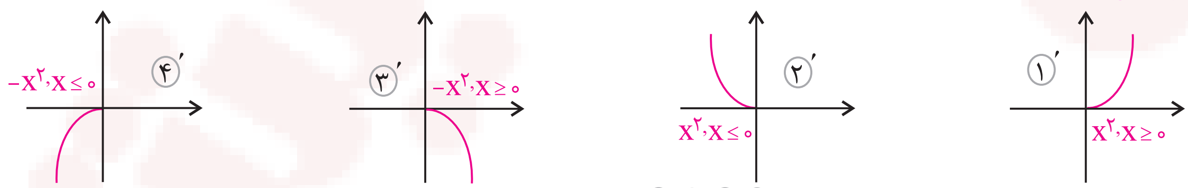
۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

تیپ ۷: داستان‌های چهار x^2 و چهار $\sqrt{x}$ و لر چاق

اگه یادتون باشه تو بخش انتقال بهتون گفتم چهار تا $\sqrt{x}$ داریم و نمودارشون رو اونجا دیدین. حالا اینجا می‌خوایم بریم ببینیم اون ۴ تا $\sqrt{x}$ معکوس چه توابعی هستن. اول اون چهار تا $\sqrt{x}$ رو با هم ببینیم:



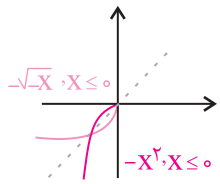
حالا بریم سراغ ۴ تا x^2؛

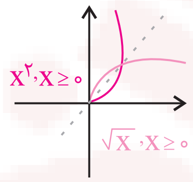


دقیقاً حالت‌های ①′،②′،③′و④′ معکوس حالت‌های ①،②،③و④ هستن.

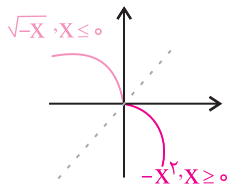
دقت داشته باشید چون تو تابع معکوس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه‌سازی انجام می‌شه اگر نمودار تو این دو ناحیه یعنی ناحیه اول یا سوم باشه، معکوسش هم تو همون ناحیه قرار می‌گیره (شماره‌های ① و ④) و اگر نمودار تابع تو ناحیه دوم یا چهارم باشه، وارونش روبروش قرار می‌گیره. مثلاً ②′ تو ناحیه دومه و وارونش میره تو ناحیه ۴ یا ③′ که تو ناحیه چهارمه و معکوسش میفته تو ناحیه ۲.

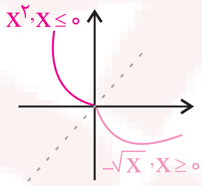
اول شماره ۱ و ۴ رو ببینیم که هر دو تابع صعودی و در ناحیه اول و سوم هستن:





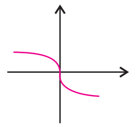
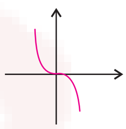
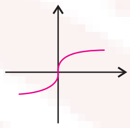
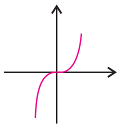
حالا بریم سراغ شماره‌های ۲ و ۳ که چون نزولی هستن و در نواحی ۲ و ۴، وارونش میفته تو ناحیه روبروش.





تست

۸۴- اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

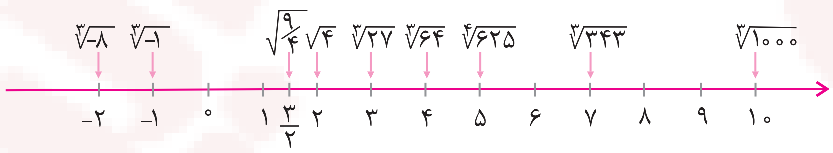
۸۵- ضابطه وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-x^2$ ۲) x^2 ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

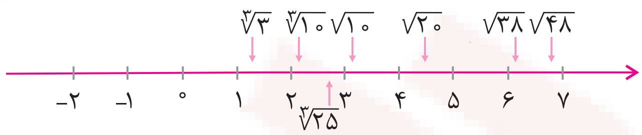
کد ۹ سؤال احتمالی نهم: محاسبات پیشرفته رادیکالی و گویاسازی کسرها

تیپ ۱: $\{\sqrt[n]{a}$ و مقادیر دقیق و تقریبی$\}$

اگه ریشه‌ی عددی گویا بشه به صورت دقیق روی محور اعداد حقیقی یا حتی گویا نشونش داد مثل اعداد زیر:



ولی اگه ریشه‌ی عددی گنگ باشه نمی‌تونیم به شکل دقیق روی محور اعداد حقیقی نمایش بدیم و مجبوریم به صورت تقریبی مشخص کنیم.



بهترین راه تشخیصِ حدودی این اعداد گنگ هم همین محور اعداد حقیقیه. مثلاً وقتی بهت می‌گن $\sqrt{۲}$ حدوداً چنده؟ شما می‌گی $\sqrt{۱}=۱$ و $\sqrt{۴}=۲$ پس $\sqrt{۲}$ بین ۱ و ۲ قرار می‌گیره و مقدار تقریبیش هم خیلی معروفه و برابر ۱/۴، $\sqrt{۳}$ هم همین شرایط رو داره و مقدار تقریبیش برابره با ۱/۷. اگه بخوایم این موضوع رو به زبون ریاضی نشون بدیم اینجوری میشه:

$\sqrt{۱}<\sqrt{۲}<\sqrt{۴}\Rightarrow ۱<\sqrt{۲}<۲\Rightarrow \sqrt{۲}\simeq ۱/$ خورده‌ای

پس در واقع باید دو تا عدد مربع کامل قبلی و بعدیش رو پیدا کنی.

$\sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}\Rightarrow ۲<\sqrt{۷}<۳\Rightarrow \sqrt{۷}\simeq ۲/$ خورده‌ای

البته مشخصه که $\sqrt{۱۰}$ به ۳ نزدیکتره تا به ۴ ولی $\sqrt{۱۵}$ برعکسه!

$\sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}\Rightarrow ۳<\sqrt{۱۵}<۴\Rightarrow \sqrt{۱۵}\simeq ۳/$ خورده‌ای

حالا بریم سراغ ریشه‌ی سوم یا فرجه‌ی ۳!

$\sqrt[۳]{۱}<\sqrt[۳]{۳}<\sqrt[۳]{۸}\Rightarrow ۱<\sqrt[۳]{۳}<۲\Rightarrow \sqrt[۳]{۳}\simeq ۱/$ خورده‌ای

$\sqrt[۳]{۸}<\sqrt[۳]{۱۰}<\sqrt[۳]{۲۷}\Rightarrow ۲<\sqrt[۳]{۱۰}<۳\Rightarrow \sqrt[۳]{۱۰}\simeq ۲/$ خورده‌ای

$\sqrt[۴]{۸۱}<\sqrt[۴]{۸۲}<\boxed{?}$

راستی اصلاً عدد سمت راست چه اهمیتی داره.

$\sqrt[۴]{۸۲}$ یه ذره از $\sqrt[۴]{۸۱}$ یعنی ۳ بزرگتره که می‌شه: ۳ و خورده‌ای!

$\sqrt[۳]{-۲۷}<\sqrt[۳]{-۱۷}<\sqrt[۳]{-۸}\Rightarrow -۳<\sqrt[۳]{-۱۷}<-۲\Rightarrow \sqrt[۳]{-۱۷}\simeq -۲/$ خورده‌ای

توجه: ریشه‌ی nام اعداد بین صفر و یک از خودشون بزرگتره.

در واقع اعداد تو محدوده‌ی صفر و یک مثل آب تو محدوده‌ی ۰ تا ۴ درجه رفتارشون غیر عادیه.

$\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}=\frac{۱}{۱۰}\quad,\quad \sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۰۰۰}}=\frac{۱}{۱۰}\quad,\quad \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲۷}}=\frac{۱}{۳}$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{۲۷}$ را با تقریب ۰/۱ را محاسبه کنید.

جواب: برای پیداکردن مقدار تقریب $\sqrt[n]{a}$، اول باید مشخص کنیم که $\sqrt[n]{a}$ بین کدوم دو عدد صحیح یا گویا قرار داره، اونوقت عدد نزدیکتر به خواسته‌ی سوال را امتحان می‌کنیم. ۲۷ بین دو عدد مربع کامل ۲۵ و ۳۶ قرار گرفته که اولی $۵^۲$ و دومی $۶^۲$ بوده.

$۵^۲=۲۵<۲۷<۳۶=۶^۲\Rightarrow ۵<\sqrt{۲۷}<۶$

حالا چون ۲۷ به ۲۵ نزدیکتره تا ۳۶ پس اعداد اعشاری نزدیک ۵ رو بررسی می‌کنیم:

$(۵/۱)^۲=۵/۱\times ۵/۱=۲۶/۰۱$

$(۵/۲)^۲=۵/۲\times ۵/۲=۲۷/۰۴$

حالا بین این ۲ تا عدد به دست اومده ۲۷/۰۴ به عدد ۲۷ نزدیکتره. پس $\sqrt{۲۷}$ با تقریب ۰/۱ میشه ۵/۲.

تیپ ۲: مربع کامل‌سازی در جمله‌های به فرم $a\pm b\sqrt{c}$

مربع کامل‌سازی در جمله‌های به فرم $a\pm b\sqrt{c}$:

$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab$

اول می‌خوام $۱+\sqrt{۲}$ رو به توان ۲ برسونم:

$(۱+\sqrt{۲})^۲=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$

حالا اگه $۳+۲\sqrt{۲}$ رو به ما داده بود چه جوری به صورت $(۱+\sqrt{۲})^۲$ بنویسیمش؟!

می‌گیم با توجه به اتحاد اول $۲\sqrt{۲}=۲ab$. پس $ab=(۱)\sqrt{۲}\Rightarrow a=۱\ ,\ b=\sqrt{۲}$ و چون بین دو جمله علامت جمعِ، پس $(a+b)^۲$ بوده یعنی $(۱+\sqrt{۲})^۲$.

بریم چند تا مثال با هم ببینیم:

$$*7+4\sqrt{3}\Rightarrow 4\sqrt{3}=2\times 2\sqrt{3}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow(2+\sqrt{3})^2$$

$$*4+2\sqrt{3}\Rightarrow 2\sqrt{3}=2(1)\sqrt{3}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow(1+\sqrt{3})^2$$

$$*3-2\sqrt{2}\Rightarrow 2\sqrt{2}=2(1)\sqrt{2}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow(1-\sqrt{2})^2$$

$$*6+2\sqrt{5}\Rightarrow 2\sqrt{5}=2(1)\sqrt{5}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow(1+\sqrt{5})^2$$

$$*4-2\sqrt{3}\Rightarrow 2\sqrt{3}=2(1)\sqrt{3}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow(1-\sqrt{3})^2$$

$$*11-6\sqrt{2}\Rightarrow 6\sqrt{2}=2(3)\sqrt{2}=2ab\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow(3-\sqrt{2})^2$$

تذکر: اگه عبارت زیر رادیکال عدد اولی نبود اینجوری می‌شه:

$$a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

مثلاً $5+2\sqrt{6}$ چی بوده؟

$$2\sqrt{6}=2\sqrt{ab}\Rightarrow ab=6\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$$

پس در واقع $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ بوده.

مثال ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(1+\sqrt{2})^{2n}=99+b\sqrt{2}$، آیا نتیجه می‌شود که $(3-2\sqrt{2})^n=99-b\sqrt{2}$؟ در صورت نتیجه‌گیری عدد b کدام است؟

۱) نتیجه نمی‌شود. **۲) ۷۰** **۳) ۷۲** **۴) ۷۴**

جواب: با توجه به درسنامه‌ی بالا داریم:

$$3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$$

$$(1+\sqrt{2})^{2n}(1-\sqrt{2})^{2n}=\left((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right)^{2n}=(-1)^{2n}=1\Rightarrow(99+b\sqrt{2})(99-b\sqrt{2})=1\Rightarrow(99)^2-2b^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=4900\Rightarrow b=70\Rightarrow -2b^2=1-(99)^2=(1-99)(1+99)=(-98)(100)$$

مثال ۲: حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}.(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})$، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ **۲) ۲** **۳) $1+\sqrt{3}$** **۴) $2\sqrt{3}$**

جواب: اولاً تکلیف $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ رو روشن کنیم: $\sqrt[3]{2\times 2^{\frac{1}{2}}}=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. حالا بفرستیمش توی اون دو تا رادیکال واسه مأموریت! وقتی $\sqrt{4}$ بره زیر رادیکال‌ها تبدیل به ۲ می‌شه. پس داریم:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=\overset{\ominus}{|1-\sqrt{3}|}+\overset{\oplus}{|1+\sqrt{3}|}=\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

تیپ ۳: گویاکردن مخرج کسرها

مفهوم گویاکردن:

به زبان ریاضی گویاکردن مخرج کسر یعنی کسر به حالتی در بیاد که مخرجش فاقد عدد گنگ باشه. از اونجایی که با این مفهوم تقریباً همه جا سـر و کار داریم پس خوب بهش دقت کن. **حالت اول**؛ زمانی که مخرج کسـر شامل یک یا چند رادیکال به فرم ضرب باشه، برای گویاکردن، صورت و مخرج کسر رو توی رادیکال مخرج ضرب می‌کنیم. به مثال زیر توجه کن!

$$\frac{۲}{\sqrt{۷}}=\frac{۲}{\sqrt{۷}}\times\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۷}}=\frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$$

یادآوری: $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$

توی همین حالت اول اگه فرجه‌ای غیر از ۲ داشته باشیم چه اتفاقی میفته؟

اگه عامل مخرج به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشه کافیه که عبارت کسر رو در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم. دلیلش رو با هم ببینیم:

$$\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^{n-m}}=a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{n-m}{n}}=a^{\frac{n}{n}}=a^۱=a$$

به عنوان مثال:

$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{۱۶}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۲^۴}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۲^۳.۲}}=\frac{۸}{۲\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{۸\sqrt[۳]{۴}}{۴}=۲\sqrt[۳]{۴}$$

حالت دوم: زمانی که مخرج کسـر رادیکال با فرجه‌ی زوج و به صورت جمع یا تفریق عبارتی باشد، باید صورت و مخرج کسر رو در مزدوج این عامل رادیکالی ضرب و تقسیم کنیم.

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۳}+۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+۲}\times\frac{\sqrt{۳}-۲}{\sqrt{۳}-۲}=\frac{\sqrt{۳}-۲}{(۳-۴)}=\frac{\sqrt{۳}-۲}{-۱}=۲-\sqrt{۳}$$

یادآوری: اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

حالت سوم: توی حالت قبل فرجه ۲ رو بررسی کردیم اگه فرجه ۳ باشه چه اتفاقی میفته؟

تو این حالت از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم:

یادآوری: اتحاد چاق و لاغر

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

$$\begin{cases}(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a+b\\(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a-b\end{cases}$$

مثال:

$$۱)\ \frac{۴}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۴}{\sqrt[۳]{۳}-۱}\times\frac{(\sqrt[۳]{۳^۲}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}{(\sqrt[۳]{۳^۲}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}=\frac{۴(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}{\underbrace{۳-۱}_{۲}}=۲(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)$$

$$۲)\ \frac{۲}{(\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}\times\frac{(\sqrt[۳]{x}-۳)}{(\sqrt[۳]{x}-۳)}=\frac{۲(\sqrt[۳]{x}-۳)}{x-۲۷}$$

تست

۸۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$

۸۷- اگر $A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۸۸- اگر $A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}$ باشد، حاصل $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخنامه فصل اول

۱- گزینه ۱

سه نقطهٔ $A(-۲,۵)$ و $B(۰,۵)$ و $C(۱,۱۱)$ رو توی معادله سهمی $y=f(x)=ax^۲+bx+c$ صدق می‌دیم.

وصیت سادات: هر وقت مجهولی معلوم شد بذار سر جاش:

$$B\in f\Rightarrow f(۰)=۵\Rightarrow ۰+۰+c=۵\Rightarrow \boxed{c=۵}$$

از این پس به جای c، مقدار ۵ را می‌گذاریم:

$$C(۱,۱۱)\in f\Rightarrow f(۱)=۱۱\Rightarrow a+b+۵=۱۱$$
$$\Rightarrow a+b=۶\ (I)$$
$$A(-۲,۵)\in f\Rightarrow f(-۲)=۵\Rightarrow ۴a-۲b+۵=۵$$
$$\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow ۴a=۲b\Rightarrow b=۲a\ (II)$$
$$\begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\begin{cases}a+b=۶\\b=۲a\end{cases}\Rightarrow a+۲a=۶\Rightarrow\boxed{a=۲}\Rightarrow\boxed{b=۴}$$
$$\boxed{\Rightarrow y=f(x)=۲x^۲+۴x+۵}$$

راستی بچه‌ها یه روش نموداری خیلی باحال هم دارم واسه این تیپ که تو QR-Code اول فصل می‌تونی ببینی.

$$y=f(-۱)=۲-۴+۵=۳\Rightarrow(-۱,۳)\in f$$

۲- گزینه ۲

$$f(x)=ax^۲+bx+c\ ;\ Max(-۱,۹)\ ;\ A(۳,۱)\in f$$

۱- از این‌که طول نقطه‌ی رأس سهمی رو داده $x=-۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$-\frac{b}{۲a}=-۱\Rightarrow\boxed{b=۲a}\ (I)$$
$$(۳,۱)\in f\Rightarrow f(۳)=۱\Rightarrow\boxed{۹a+۳b+c=۱}\ (III)$$
$$(-۱,۹)\in f\Rightarrow f(-۱)=۹\Rightarrow\boxed{a-b+c=۹}\ (II)$$

برای حل این دستگاه سه معادله و سه مجهولی اول (I) رو تو (II) و (III) جاگذاری می‌کنیم:

$$\begin{matrix}(II)\\(III)\end{matrix}\begin{cases}a-(۲a)+c=۹\\۹a+۳(۲a)+c=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=۹\\۱۵a+c=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-۱\\c=\frac{۱۷}{۲}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\boxed{f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱۷}{۲}}$$
$$\Rightarrow f(۵)=-\frac{۱}{۲}\times۲۵-۵+\frac{۱۷}{۲}=-۹$$

این تیپ هم با روش خفن نموداری به راحتی و سرعت خیلی زیاد حل می‌شه.

۳- گزینه ۳

طبق وصیت اینارو بذار سرجاش:

$$y+۲x=b\xrightarrow{(۱,۰)}\boxed{b=۲}$$
$$x^۳+ax+۲=f(x)\Rightarrow ۰=۱+a+۲\Rightarrow\boxed{a=-۳}$$
$$-۲x+۲=x^۳-۳x+۲\Rightarrow x^۳-x=۰\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

وقتی می‌گه محور طول‌ها رو قطع می‌کنه یعنی $y=۰$ و اگه می‌گفت محور عرض‌ها رو قطع می‌کنه $x=۰$ می‌شه. همونطور که گفتم از خط شروع می‌کنیم که فقط یک مجهول داره.

۴- گزینه ۴

$$f(x)=-۲+(\tfrac{۱}{۲})^{Ax+B}$$

اول نقاط مشترک دو تابع رو به‌دست میاریم:

$$y=x^۲-x\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow y=۰\Rightarrow A(۱,۰)\\x=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow B(۲,۲)\end{cases}$$
$$A\in f\Rightarrow -۲+(\tfrac{۱}{۲})^{A+B}=۰$$
$$\Rightarrow(\tfrac{۱}{۲})^{A+B}=۲\Rightarrow A+B=-۱\ (۱)$$
$$B\in f\Rightarrow -۲+(\tfrac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲$$
$$\Rightarrow(\tfrac{۱}{۲})^{۲A+B}=۴\Rightarrow ۲A+B=-۲\ (۲)$$
$$\begin{cases}A+B=-۱\\۲A+B=-۲\end{cases}\xrightarrow{(-)}A=-۱,B=۰$$

پس ضابطه تابع f شد: $f(x)=-۲+(\tfrac{۱}{۲})^{-x}$.

$$f(۳)=-۲+(\tfrac{۱}{۲})^{-۳}=-۲+۸=۶$$

-۵ گزینه ۲

$f(x)=-۴+۲^{ax+b}$

۱) نقطه برخورد با محور x ها نقطه $A(-\frac{۱}{۳},۰)$

۲) نقطه برخورد با محور yها نقطه $B(۰,-۲)$ و تو تیپ ۱ بهتون گفتم که از صفر شروع کن؛

$B(۰,-۲)\in f \Rightarrow f(۰)=-۲$

$\Rightarrow -۲=-۴+۲^{b} \Rightarrow ۲^{b}=۲ \Rightarrow \boxed{b=۱}$

$A(-\frac{۱}{۳},۰)\in f \Rightarrow f(-\frac{۱}{۳})=۰ \Rightarrow ۰=-۴+۲^{-\frac{a}{۳}+۱}$

$\Rightarrow ۲^{-\frac{a}{۳}+۱}=۴ \Rightarrow -\frac{a}{۳}+۱=۲ \Rightarrow \boxed{a=-۳}$

$f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱}$

$\Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{۵+۱}=-۴+۶۴=۶۰$

-۶ گزینه ۴

$f(۵) \rightarrow$ ضابطه بالا: $۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$

$f(f(۵))=f(۲) \rightarrow$ ضابطه پایین: $۲(۲)+۳=۷$

$f(۱) \rightarrow$ ضابطه پایین: $۲(۱)+۳=۵ \Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۲$

اینو از بالا به دست آورده بودیم. جمعشون هم که میشه ۹.

-۷ گزینه ۲

$f(-۱۴۴)=\sqrt{-۱۴۴+۲(۱۴۴)}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$

$f(۱۲)=\sqrt{۱۲+۲(۱۲)}=\sqrt{۳(۱۲)}=\sqrt{۳۶}=۶$

تو ریاضی تعریف نشده زمانی اتفاق می‌افته که زیر رادیکال منفی یا مخرج یک کسر صفر بشه.

-۸ گزینه ۲

از داخلی‌ترین پرانتز شروع می‌کنیم:

$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^{۲}-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲=۱$

$f(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^{۲}-۲[-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

راستی حواستون به تقریب‌های مهم روی رادیکال‌ها باشه:

$\sqrt{۲}=۱/۴$ و $\sqrt{۳}=۱/۷$. از $\sqrt{۵}$ به بعد هم ۰/۲، ۰/۲ به ۲ اضافه میشه یعنی $\sqrt{۵}=۲/۲$، $\sqrt{۶}=۲/۴$ ، $\sqrt{۷}=۲/۶$ ، $\sqrt{۸}=۲/۸$

-۹ گزینه ۳

کافیه به $n=۳$ اکتفا کنیم:

$$\left[\sqrt{۴(۳)^{۲}-۳(۳)+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۳^{۲}-۲(۳)}\right]$$

$$=[\sqrt{۲۸}]-۲[\sqrt{۳}]=۵-۲=۳$$

-۱۰ گزینه ۱

$[x]=۱ \Rightarrow ۱\leq x<۲$

حالا مثلاً به x میدیم ۱/۵ ولی قبلش باید رادیکالها رو درست کنیم:

$$\sqrt{(x-۱)^{۲}}+\sqrt{(x-۲)^{۲}}=\underbrace{|x-۱|}_{+}+\underbrace{|x-۲|}_{-}$$

$$=x-۱-x+۲=۱$$

-۱۱ گزینه ۱

طبق ۵ کد بالا در معادله درجه ۲ سؤال رو طرح کردم و یکی‌یکی جلو می‌ریم:

۱) $b=۰ \Rightarrow x^{۲}=۹ \Rightarrow \sqrt{x^{۲}}=\sqrt{۹} \Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm ۳$

۲) $c=۰ \Rightarrow x(x-\sqrt{۳})=۰ \Rightarrow x=۰$ و $x=\sqrt{۳}$

۳) معادله کامله پس همه بیان چپ : $x^{۲}+۵x-۶=۰ \Rightarrow$ جمع ضرایب صفره $\Rightarrow x_{۱}=۱$ و $x_{۲}=\frac{c}{a}=-۶$

۴) معادله کامله پس همه به چپ : $x^{۲}-۲x-۸=۰ \Rightarrow$ رابطه بین ضرایب نیست پس تجزیه $\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x_{۱}=۴$ و $x_{۲}=-۲$

۵) $۲x^{۲}-۳x-۲=۰ \Rightarrow$

$\Delta=b^{۲}-۴ac=۲۵ \Rightarrow$

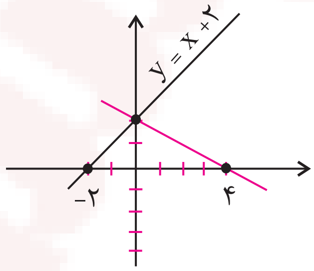
$x_{۱}$ و $x_{۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm ۵}{۴} \Rightarrow x_{۱}=۲$ و $x_{۲}=-\frac{۱}{۲}$

من اسم این معادله رو گذاشتم دوسلدروف که دلتاش ۲۵ میشه و حل سریعشون رو تو تیپ بعدی بهتون یاد می‌دم.

تو معادلات بالا بزرگ‌ترین ریشه مثبت، $x=۴$ بود. کافیه نمودارش رو بکشین:

مساحت مثلث هم که میشه: (ارتفاع × قاعده) تقسیم بر ۲:

$S=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$



۱۲- گزینه ۴

با شرط $2-3a\ge 0$ یعنی $a\le \frac{2}{3}$ طرفین رو به توان ۲ برسون:

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2 \Rightarrow \sqrt{2a^2+4a}=2-3a \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$2a^2+4a=4-12a+9a^2 \Rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4(7)(4)}}{14}=\frac{16\pm\sqrt{144}}{14}$$

$$=\frac{16\pm 12}{14}=2,\frac{2}{7}$$

۲ کوچک‌تر از $\frac{2}{3}$ نیست و می‌مونه $\frac{2}{7}$.

$$\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}\xrightarrow{a=\frac{2}{7}}1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

یه روش خیلی باحال هم برای این تیپ دارم که تو ویدئو بهتون یاد دادم بچه‌های عزیزم.

۱۳- گزینه ۲

روش تجزیه رو تو ویدئوی اول فصل توضیح دادم.

$$a+c=b+d \Rightarrow x_1=-1 \Rightarrow (x+1)(x^2+5x+6)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب}=-6$$

* اگر جمعشون رو می‌خواست نیازی به این کارها نبود و می‌شه:

$$\frac{-b}{2a}=-3$$

۱۴- گزینه ۲

ریشه‌ی عبارات داخل قدر مطلق‌ها $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=-2$ هستن.

$$|2x-1|+|x+2|=3$$

پس این معادله رو تو سه بازه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x<-2 & \Rightarrow -(2x-1)-(x+2)=3 \\ -2\le x<\frac{1}{2} & \Rightarrow -(2x-1)+(x+2)=3 \\ \frac{1}{2}\le x & \Rightarrow (2x-1)+(x+2)=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x<-2 \Rightarrow -3x=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ -2\le x<\frac{1}{2} \Rightarrow -x=0 \Rightarrow \boxed{x_1=0} \\ x\ge \frac{1}{2} \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب های معادله}=x_1+x_2=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

۱۵- گزینه ۲

عدد صحیح بیرون بیا؛ بیرون بیا؛ این براکته؛ بابا این براکته ☺

$$[x]+3+[x]-1=10$$

$$\Rightarrow 2[x]=8 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4\le x<5$$

۱۶- گزینه ۲

$$1\le |x|+1<2 \Rightarrow 0\le |x|<1$$

$$\Rightarrow |x|<1 \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow 1-(-1)=2$$

۱۷- گزینه ۱

$$\frac{2(x+1)(x-2)+x(x-4)}{(x-4)(x-2)}=3$$

$$\Rightarrow 2(x^2-x-2)+x^2-4x=3(x^2-6x+8)$$

$$\Rightarrow 3x^2-6x-4=3x^2-18x+24$$

$$\Rightarrow 12x=28 \Rightarrow x=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$$

۱۸- گزینه ۳

بین x (مسافت طی شده)، V (سرعت) و t (زمان) رابطهٔ زیر برقراره:

$$x=Vt \Rightarrow t=\frac{x}{V} \rightarrow$$

$$\begin{cases} t_{\text{رفت}}=\frac{1200}{100+V_{\text{آب}}} & \text{: سرعت آب با سرعت قایق جمع میشه} \\ t_{\text{برگشت}}=\frac{1200}{100-V_{\text{آب}}} & \text{: سرعت آب از سرعت قایق کم میشه} \end{cases}$$

$$\Delta t=t_{\text{برگشت}}-t_{\text{رفت}}=\frac{1200}{100-V}-\frac{1200}{100+V}=5 \Rightarrow$$

با چک کردن گزینه‌ها به $V=20$ می‌رسیم.

۱۹- گزینه ۴

اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کنه، x ساعت در نظر بگیریم زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کنه میشه $x+9$.

بهروز تو یک ساعت $\frac{1}{x}$ کل کار رو انجام می‌ده و فرهاد تو یک ساعت $\frac{1}{x+9}$ کل کار و هر دو با هم تو یک ساعت $\frac{1}{20}$ کل کار رو انجام می‌دن.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20}$$

از روی گزینه‌ها به $x=36$ می‌رسیم.

۲۰- گزینه ۱

$$t+\frac{7}{t+1}=7 \Rightarrow t-7=\frac{-7}{t+1}$$

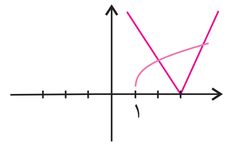
$$\Rightarrow t^2-6t-7=-7 \Rightarrow t(t-6)=0 \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow x=3\\ \sqrt{x-3}=6\Rightarrow x=39\end{cases} \longrightarrow 39+3=42$$

۲۱- گزینه ۲

کافیه نمودارهاشون رو تو یه دستگاه بکشیم:

$|x-3|=\sqrt{x-1}$



۲۲- گزینه ۳

$(2m-1)x^2+6x+(m-2)=0$

شرط اینکه معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشه اینه که $\Delta>0$ باشد:

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(2m-1)(m-2)>0 \xrightarrow{\div 4}$

$9-(2m^2-4m-m+2)>0\Rightarrow 2m^2-5m-7<0$

$\Rightarrow -1<m<3/5$

راستی این تست دو تا مشکل هم داشت،

۱) باید می‌گفت دو ریشه متمایز.

۲) به ازای $m=\frac{1}{2}$ معادله به درجه اول تبدیل می‌شه که قابل قبول نیست. ولی تو همه گزینه‌ها هست.

۲۳- گزینه ۱

نیمساز ناحیه اول همون $y=x$. پس خط و سهمی رو با هم قطع می‌دیم.

$2x^2+(m+1)x+m+6=x$

$\Rightarrow \boxed{2x^2+mx+m+6=0}\Rightarrow\Delta=0$

$\Rightarrow m^2-4(2)(m+6)=0$

$\Rightarrow m^2-8m-48=0$

$\Rightarrow (m-12)(m+4)=0 \begin{cases} m=-4\\ m=12\end{cases}$

اما کدومش قبوله؟ اونی که اگر تو معادله تقاطع جاگذاری کنیم طولش تو ناحیه اول باشه.

if $m=-4\Rightarrow 2x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow \boxed{x=1}$

پس جواب میشه -4.

۲۴- گزینه ۲

$a<0\Rightarrow(1-m)<0\Rightarrow \overset{(I)}{\boxed{1<m}} \Rightarrow$ هیچ گزینه‌ای حذف نشد

حالا به سراغ شرط دوم یعنی $\Delta<0$ می‌ریم:

$\Delta<0\Rightarrow 4(m-3)^2+4(1-m)<0$

$\Rightarrow (m^2-6m+9)+(1-m)<0\Rightarrow m^2-7m+10<0$

$\Rightarrow(m-2)(m-5)<0\Rightarrow \boxed{2<m<5}\ (II)$

از اشتراک دو شرط به $2<m<5$ می‌رسیم.

۲۵- گزینه ۱

$\underset{a}{3}x^2+\underset{b}{(2m-1)}x+\underset{c}{(2-m)}=0$

(معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها = مجموع ریشه‌ها) $\Rightarrow s=\frac{1}{p}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{c}{a}}\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow -bc=a^2$

$\Rightarrow (2m-1)(m-2)=9\Rightarrow$

$2m^2-4m-m+2=9\Rightarrow$

$2m^2-5m-7=0$
- $m=-1 \rightarrow \Delta<0$ چون غ ق ق است
- $m=\frac{7}{2} \rightarrow$ گزینه‌ی ۱

۲۶- گزینه ۴

اول S و P روبه‌رو و بعد Δ:

۲) $S>0\Rightarrow -\frac{b}{a}>0\Rightarrow\frac{b}{a}<0\Rightarrow\frac{m}{2}<0\Rightarrow\boxed{m<0}\ (I)$

هیچ گزینه‌ای حذف نشد ☹

۳) $P>0\Rightarrow\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{m+6}{2}>0$

$\Rightarrow\boxed{-6<m}\ (II)$

$\xrightarrow{\text{اشتراک با (I)}}\boxed{-6<m<0}\ (*)$

هیچ گزینه‌ای حذف نشد ☹

۱) $\Delta\ge0\Rightarrow b^2-4ac>0\Rightarrow m^2-8(m+6)>0$

$\Rightarrow m^2-8m-48>0\Rightarrow(m-12)(m+4)>0$

$\Rightarrow \boxed{m<-4 \text{ یا } 12<m}\ (III) \longrightarrow$

اشتراک با (*) میشه گزینه ۴.

۲۷- گزینه ۱

$f(x)=x^2-2x$

$$\xrightarrow[1<x]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} f_1(x)=-(x^2-2x)$$

$$y=f_1(x)+16=-(x^2-2x)+16$$

حالا این دو نمودار را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=(x^2-2x) \\ y=-(x^2-2x)+16 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{جمع می کنیم}]{\text{با هم}} t=-t+16 \Rightarrow 2t=16 \Rightarrow t=8$$

$$\Rightarrow (x^2-2x)=8 \Rightarrow x(x-2)=4\times 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \ \checkmark \\ x=-2 \rightarrow \text{غ.ق.ق. چون } 1<x \text{ است.} \end{cases}$$

پس مختصات نقطه‌ی تقاطع $A(4,8)$ است. فاصله‌ی این نقطه از مبدأ مختصات:

$$OA=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{4^2(1+2^2)}=4\sqrt{5}$$

۲۸- گزینه ۱

$y=f(x)=x^2-x-3$

وقتی نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی می‌بریم xها میشن $x+2$ و وقتی که ۹ واحد در جهت yهای منفی می‌بریم به نمودار تابع $y=f(x+2)-9$ می‌رسیم:

$$y=f(x+2)-9=[(x+2)^2-(x+2)-3]-9$$

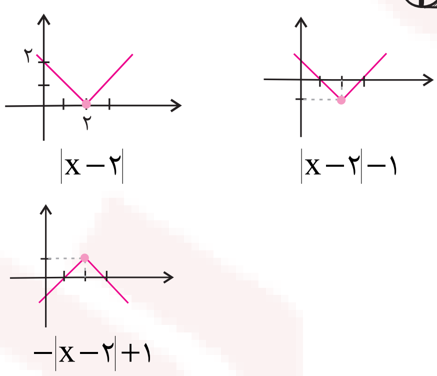
$$\Rightarrow t^2-t-12<0$$

برای این‌که این نمودار، زیر محور xها باشه، باید y کوچک‌تر از صفر باشه.

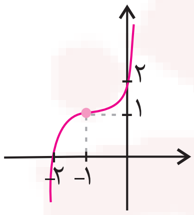
$$\Rightarrow (t-4)(t+3)<0 \Rightarrow -3<t<4$$

$$\Rightarrow -3<x+2<4 \Rightarrow -5<x<2$$

۲۹- گزینه ۲



۳۰- گزینه ۳



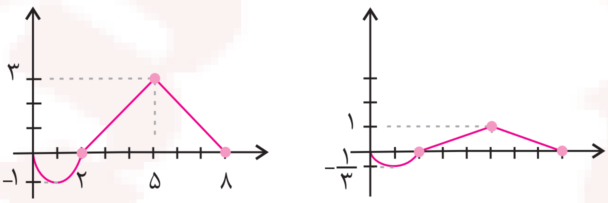
$f(x)=x^3+3x^2+3x+1+1$

$f(x)=(x+1)^3+1$

پس x^3 یعنی همون لر خودمون یک واحد می‌ره عقب و یک واحد بالا.

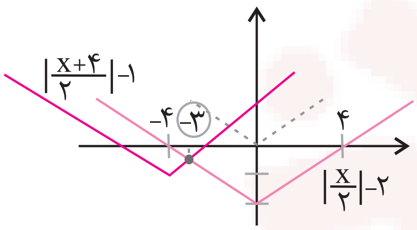
۳۱- گزینه ۱

یعنی نمودار $f(x)$ در صورت سؤال ۲ تا رفته عقب و ۳ برابر هم شده بنابراین باید ۲ تا برگردونیم جلو و بردش رو هم $\frac{1}{3}$ کنیم:



۳۲- گزینه ۲

شاخه سمت چپ نمودار اول با شاخه سمت راست نمودار جدید برخورد کرده. پس تو اولی قرینش میاد بیرون و تو دومی خودش.



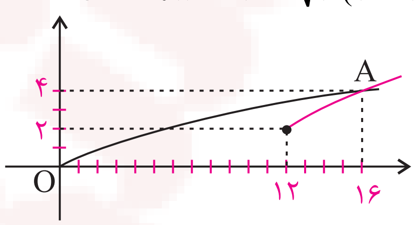
$$\frac{x+4}{2}-1=\frac{-x}{2}-2 \Rightarrow \boxed{x=-3}$$

۳۳- گزینه ۳

اگر نمودارها رو با دقت به فیزیک تابع و درست رسم کنیم تو نقطه A برخورد می‌کنند.

فاصله A تا مبدأ هم که از فیثاغورث:

$$\text{فاصله‌ی A از O}=OA=\sqrt{16^2+4^2}=\sqrt{4^2(4^2+1)}=4\sqrt{17}$$

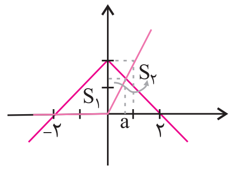


۳۴- گزینه ۳

$$f(x)=x+|x|=x+\begin{cases}x & ,x\ge ۰\\ -x & ,x\le ۰\end{cases}=\begin{cases}۲x & ,x\ge ۰\\ ۰ & ,x<۰\end{cases}$$

$$y(x)=۲-|x|\xrightarrow{\text{شاخه‌سمت‌راست}}۲-x$$

$S_۱$ که معلومه مساحتش می‌شه ۲ ولی برای بدست آوردن مساحت $S_۲$ لازمه نقطه a رو پیدا کنیم. پس شاخه سمت راست f رو با شاخه سمت راست g قطع می‌دیم:



$$۲x=۲-x\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

این می‌شه ارتفاع مثلث $S_۲$ که قاعدش هم شده ۲.

$$\Rightarrow S_۲=\frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۲}=\frac{۲}{۳}\longrightarrow ۲+\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

۳۵- گزینه ۴

$$y=|x-۲|+|x+۱|$$

این دو تابع رو تو یک دستگاه با هم قطع می‌دیم:

$$\begin{cases}y=|x-۲|+|x+۱|\\ y=x+۷\end{cases}\Rightarrow |x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

ریشه‌های قدرمطلق‌ها $x_۱=۲$ و $x_۲=-۱$ هستند. معادله را در سه حالت زیر بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}x<-۱\Rightarrow -(x-۲)-(x+۱)=x+۷\\ -۱\le x<۲\Rightarrow -(x-۲)+(x+۱)=x+۷\\ ۲\le x\Rightarrow (x-۲)+(x+۱)=x+۷\end{cases}$$

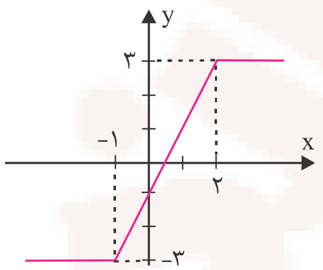
$$\Rightarrow\begin{cases}x<-۱\Rightarrow ۳x=-۶\Rightarrow x=-۲\Rightarrow y=۵\Rightarrow \boxed{A(-۲,۵)}\\ -۱\le x<۲\Rightarrow x=-۴\ \text{غ ق ق}\\ ۲\le x\Rightarrow x=۸\Rightarrow y=۱۵\Rightarrow \boxed{B(۸,۱۵)}\end{cases}$$

$$AB=\sqrt{(۸+۲)^۲+(۱۵-۵)^۲}=\sqrt{۱۰^۲+۱۰^۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

۳۶- گزینه ۳

این سرسره است و بین دو ریشه اکیداً یکنوا.

$$\begin{cases}x\le -۱\rightarrow y=-(x+۱)+(x-۲)=-۳\rightarrow \text{خطافقی}\\ -۱\le x<۲\rightarrow\\ y=(x+۱)+(x-۲)=۲x-۱\rightarrow \text{خط با شیب مثبت}\rightarrow \text{جواب تست}\\ ۲\le x\rightarrow y=(x+۱)-(x-۲)=۳\rightarrow \text{خطافقی}\end{cases}$$

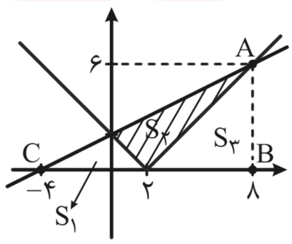


۳۷- گزینه ۴

$$y=f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$$

$$y=g(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=|x-۲|$$

نمودار این دو تابع رو رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases}y=x-۲\\ y=\frac{۱}{۲}x+۲\end{cases}\Rightarrow x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x=۴\Rightarrow x=۸\xrightarrow{y=x-۲}y=۶\Rightarrow A(۸,۶)$$

$$S_۱+S_۲+S_۳=S_{\underset{ABC}{\Delta}}$$

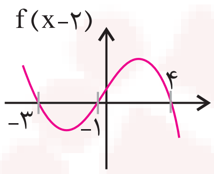
$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}BC\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۶=۳۶$$

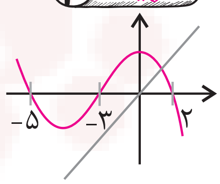
$$S_۱=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۲=۶$$

$$S_۳=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶=۱۸$$

$$\Rightarrow S_۲=۳۶-(۶+۱۸)=۱۲$$

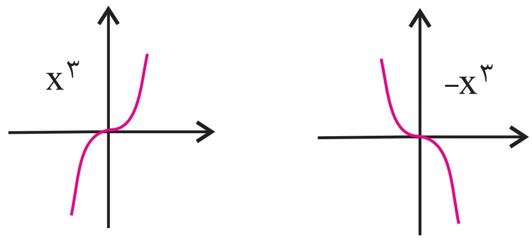
۳۸- گزینه ۴

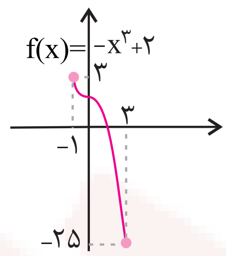




$$xf(x)\ge ۰\Rightarrow[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۳۹- گزینه ۱

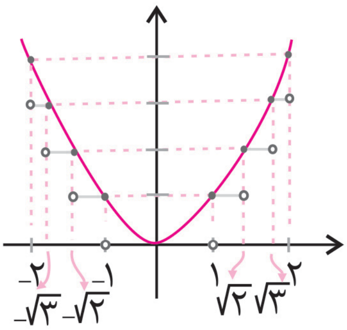




۴۰- گزینه ۴

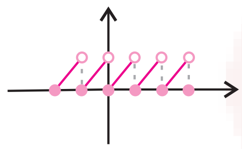
تو درسنامه گفتیم اول خودش،

دوم داربست؛ سوم رنگ؛ چهارم پره، پنجم شره:

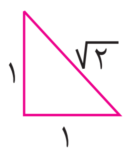


۴۱- گزینه ۴

نمودار معروف $x-[x]$



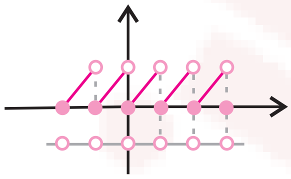
کلاً تعـداد پـاره خطهـای تابعی که $[x]$ توش داره در بازه‌ای به طول n به اندازه طول بازه است.



پس اینجا میشه ۵ پاره خط به طول $\sqrt{۲}$.

۴۲- گزینه ۳

کافیه هر دو تابع رو تو یه دستگاه رسم کنی.

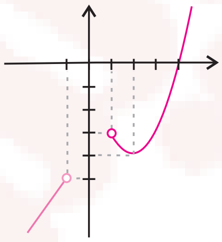


تو نقاط صحیح مشترک هستند $\Leftarrow \mathbb{Z}$

۴۳- گزینه ۴

بهترین راه رسمه

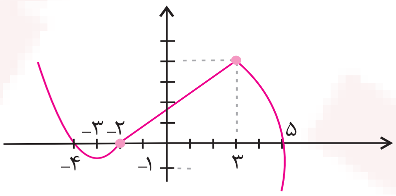
فقط بازه $(-۵,-۴]$ روی محور yها پوشش داده نشده



۴۴- گزینه ۳

باید بتونی این شکل رو بکشی.

دوتا سهمی و یک خط هرکدوم تو بازه خودش.



پس نمودار تابع تو بازه $[-۳,۳]$ اکیداً صعودیه.

۴۵- گزینه ۴

$$۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳$$

عبـارت $\frac{x+۱}{۲x-۱}$ رو یـه بار با مرز پایین یعنی $y=۱$ و یه بار با مرز بالا یعنی $y=۳$ مســاوی قرار می‌دیم تا طول‌های مرزی به‌دســت بیاد:

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}=۱\Rightarrow x+۱=۲x-۱\Rightarrow \boxed{x=۲}$$

اگـه یکی از گزینـه‌ها $R=[۰/۸\,,۲]$ بود یه عدد مثل $x=۰$ رو امتحان کن. اگه نامعادله درســت بود گزینه‌ای که صــفر توشــته درسته.

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}=۳\Rightarrow x+۱=۶x-۳\Rightarrow ۵x=۴\Rightarrow \boxed{x=۰/۸}$$

۴۶- گزینه ۳

بعد از بزن بزن مخرجها می‌رسیم به یک معادله درجه دوم

$$\frac{۷x-۸}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{x}{(x-۲)}\Rightarrow$$

$$x^2+x=7x-8 \Rightarrow x^2-6x+8=0 \begin{cases} x=2 \ \times \\ \boxed{x=4} \end{cases}$$

$x=4$ و $x=-1$ که تک ریشه مخرجه فقط تو گزینه ۳ هستن.
اگر این دو عدد تو گزینه دیگه‌ای هم بود یه عدد مثل صفر رو چک می‌کنیم. تامام

۴۷- گزینه ۱

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-2}=1 \Rightarrow x+2=x-2$$

چون این معادله جواب نداره نقطه موردنظر میشه ریشه مخرج یعنی $x=2$.

۴۸- گزینه ۲

این جواب نداره $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3} \Rightarrow x-1,\ x-3$ پس جواب میشه $(1,3)$ یا $R-[1,3]$.

۴۹- گزینه ۴

اگر صورت کسر به جای (۴-) مثبت ۴ داشت صورت همواره مثبت می‌شود جواب نامعادله $x-1<0$ و $x<1$ می‌شد. اما اینجا بیش از ۲ ریشه داریم و باید ریشه‌ها رو بریزیم روی محور xها:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
		$-$	$\circ$	$+$	$\circ\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

$\Rightarrow a=-1$ و $b=1$ و $c=4$

۵۰- گزینه ۳

$$\frac{x}{2x+5}-\frac{1}{x-2}<0$$

وقتی سؤال رو اینجوری میده
دیگه عددگذاری کنسله! براساس درس بالا چون علامت مخرج‌ها معلوم نیست حالت شماره ۶:

$$\frac{x(x-2)-2x-5}{(2x+5)(x-2)}<0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{(2x+5)(x-2)}<0$$

ریشه‌های صورت ۱- و ۵ چون $a+c=b$:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		2		5		$+\infty$
		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
				-2				۳و۴			

۵۱- گزینه ۲

چون مخرج همواره مثبته طرفین وسطین واجبه.
جهت نامساوی هم عوض نمیشه. البته می‌تونستیم تبدیل به معادله هم بکنیم ولی اینجا فرقی نداره زیاد.

$$2x-9<-(x^2+1)$$
$$\Rightarrow x^2+2x-8<0 \Rightarrow (x+4)(x-2)<0$$
$$\Rightarrow -4<x<2$$

۵۲- گزینه ۱

روش اول:

$$\frac{|x-2|}{|2x+1|}>1 \Rightarrow |x-2|>|2x+1|$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4>4x^2+4x+1$$
$$\Rightarrow 3x^2+8x-3<0$$
$$-3<x<\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{منهای ریشه}} (-3,-\tfrac{1}{2})\cup(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})$$

روش دوم: می‌تونیم به معادله تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{2x+1}=1 &\Rightarrow x=-3 \\ \frac{x-2}{2x+1}=-1 &\Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{1}$$ فقط گزینه

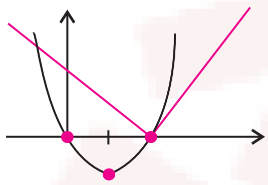
۵۳- گزینه ۳

نامعادله رو به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow x+x=\frac{1}{2}x+3 \Rightarrow x=2 \\ x<0 \Rightarrow x-x=\frac{1}{2}x+3 \Rightarrow x=-6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3}$$ گزینه

۵۴- گزینه ۳

بهترین راه رسم نمودار با توجه به گزینه‌ها شاخه سمت چپ تو بازه $(-1,2)$ بالاتره.

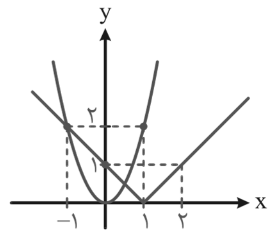


$$\begin{cases} 1: x\geq 2: x(x-2)<x-2 \Rightarrow x<1 \rightarrow \text{قبول نیست} \\ 2: x<2: x(x-2)<-(x-2) \\ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow -1<x<2 \end{cases}$$

۵۵- گزینه ۲

$$* \quad 4x^4<(x-1)^2 \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} 2x^2<|x-1|$$

نمودار دو تابع $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=2x^2$ رو تو یه دستگاه رسم می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید، شاخه‌ی سمت راست نمودار تابع $f(x)=|x-1|$ یعنی $y=x-1$ هیچ نقطه‌ی تقاطعی با نمودار تابع $g(x)=2x^2$ نداره و همواره پایین‌تر.
اما سمت چپش، یعنی $y=-x+1$ تو ۲ نقطه تابع g را قطع می‌کنه برای پیدا کردن این دو نقطه با هم قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=2x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2=-x+1 \Rightarrow 2x^2+x-1=0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$$

۵۶- گزینه ۲

$$m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

$m=2$ رو جاگذاری کنم یه زوج میشه (۴، ۲) و یه زوج (۱، ۲) پس تابع نیست اما به ازای $m=-1$ مشکلی نداریم.

۵۷- گزینه ۳

مؤلفه دوم تکراری قبول نیست. اگه بود باید اولی‌هاشون همه تکراری باشن: $a^2+1=5 \Rightarrow a=2$ یا $a=-2$

حالا طبق وصیت همیشگی جاگذاری کنیم:

$a=2 \rightarrow \{(1,4),(5,3),(8,-2),(1,0)\} \Rightarrow$ تابع نیست

$a=-2 \rightarrow \{(1,4),(5,3),(-8,2),(-3,0)\} \Rightarrow$ ✓

۵۸- گزینه ۲

با توجه به تعریف کتاب لازمه که اگه $x_2>x_1$ باشه $f(x_2)\ge f(x_1)$ باشه.

x	۱	۳	۵
y	m	۲m+۱	۷m+۲

$\text{I)}\ 2m+1\ge m \Rightarrow \boxed{m\ge -1}$

$\text{II)}\ 7m+2\ge 2m+1 \Rightarrow \boxed{m\ge -\frac{1}{5}}$

اشتراکشون می‌شه $m\ge -\frac{1}{5}$.

۵۹- گزینه ۳

دامنه مشترک فقط $\{2,5\}$. حالا yهای این دو تا زوج رو تو همدیگه ضرب کن: $\{(2,0),(5,0)\}$

۶۰- گزینه ۴

فرجه فرد که کاملاً بی‌آزاره و مشکلی نداره و فقط زیر رادیکال اولی نباید منفی باشه و البته مخرج هم صفر نشه:

$$\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\ge 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2}\ge\frac{9}{2} \Rightarrow 9x^2\le 4$$

$$\Rightarrow x^2\le\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{-2}{3}\le x\le\frac{2}{3}-\{0\}$$

۶۱- گزینه ۴

می‌تونی بگی از (۱-) به (۲) به ۳ واحد رفته جلو و ۶ واحد بالا. پس شیبش ۲ بوده: $(-1,-1),(2,5) \Rightarrow m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$

اینم روش نوشتن معادله خط با یه نقطه $A(x_1,y_1)$ و شیب m:

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+1=2(x+1)$$

$$\Rightarrow y=2x+1 \xrightarrow{y=0} x=-\frac{1}{2}$$

۶۲- گزینه ۱

وقتی گفته f ثابت و $f(-1)=3$ یعنی $f(x)=3$ و g هم که همانیه یعنی $g(x)=x$.

$$\left.\begin{array}{l} f(g(2))=f(\text{همانی}) \\ g(f(3))=g(3) \end{array}\right\} \rightarrow 3+3=6$$

۶۳- گزینه ۴

تو گزینه‌های (۱) تا (۳) مقدارها برابر ولی دامنه g در هر ۳ تا گزینه یک عدد رو تو خودش نداره یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) دامنه g $R-\{1\}$ و گزینه ۲ دامنه g $R-\{0\}$. جواب گزینه ۴ میشه چون هم $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ و هم دامنه هر دو $0\le x\le 1$.

۶۴- گزینه ۱

کافیه با توجه به گزینه‌ها اول عدد ۱ رو انتخاب کنیم و دوتا گزینه حذف بشه و بعد هم با عدد ۷ بین ۲ گزینه باقیمونده به گزینه درست می‌رسیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(g(1))=f(5)=\frac{9}{7} \\ g(f(1))=g(\frac{1}{3})=\frac{13}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{گزینه ۲ و ۴ حذف}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(g(7))=f(11)=\frac{21}{13} \\ g(f(7))=g(\frac{13}{9})\ne\frac{21}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow -1, -7$$

۶۵- گزینه ۳

$$g(f(x))=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{-x+2}\right)}{\frac{2x+3}{-x+2}+2}=\frac{\frac{-x+2-6x-9}{-x+2}}{\frac{2x+3-2x+4}{-x+2}}$$

$$=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

می‌تونستیم عدد بدیم. مثلاً به x بدیم ۱ و $g(f(1))$ رو محاسبه کنیم:

$$g(f(1))=g(5)=-2$$

فقط گزینه ۳ به ازای $x=1$ می‌شه ۲-!

۶۶- گزینه ۱

$$gof(x)>0\Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+3x)+2>0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0\Rightarrow -4<x<1$$

۶۷- گزینه ۲

شکل داره تابع gof رو به ما نشون میده که شده $2x$.

$$3f+4=2x\Rightarrow 3f=2x-4$$

$$f=\frac{2x-4}{3}\Rightarrow f(5)=\frac{2(5)-4}{3}=2$$

۶۸- گزینه ۴

$$g(f(x))=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{7-f(3)}=\frac{1}{4}\Rightarrow f(3)=-1$$

۶۹- گزینه ۴

کافیه به x بدیم یک!

$$f(2(1)-3)=4(1)^2-14(1)+13=3\Rightarrow f(-1)=3$$

حالا ببینیم کدوم گزینه به ازای ۱-، ۳ می‌شه که جواب گزینه ۴ می‌شه.

۷۰- گزینه ۴

وقتی دامنه (هرچی)f رو می‌خواد باید هرچی تو دامنه f قرار بدیم و محدودش کنیم.

$$D_f: 2x-x^2\geq 0\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\quad 0\leq x\leq 2$$

$$\Rightarrow 0\leq 3-x\leq 2\Rightarrow -3\leq -x\leq -1\Rightarrow 1\leq x\leq 3$$

۷۱- گزینه ۱

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\geq 1\,|\,\sqrt{x-1}\leq 2\}$$

$$\Rightarrow x-1\leq 4\Rightarrow x\leq 5\Rightarrow [1,5]$$

۷۲- گزینه ۲

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\leq\sqrt[3]{x-1}\leq 3\}$$

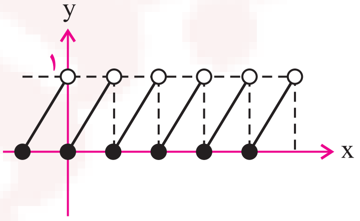
$$x-1\geq -8 \qquad x-1\leq 27$$

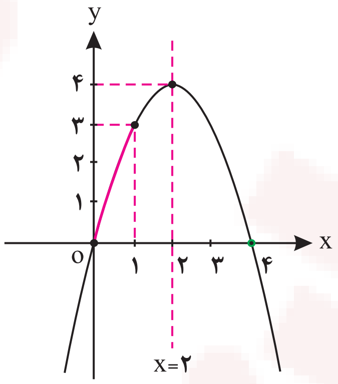
$$\boxed{x\geq -7}\qquad \boxed{x\leq 28}\xrightarrow{\cap}[-7,28]$$

۷۳- گزینه ۲

xها اول وارد f می‌شن و f به همه xها اجازه ورود می‌ده. ولی خروجی که همیشه تو بازه $[0,1)$ هستش وارد g میشه.

پس کافیه برد g رو به ازای xهای بین $[0,1)$ از روی نمودار ببینیم.





بنابراین برد این تابع میشه $[0,3)$.

۷۴- گزینه ۱

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$$

$$g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\xrightarrow{f^{-1}}1\xrightarrow{g}\times\\5\xrightarrow{f^{-1}}2\xrightarrow{g}3\\4\xrightarrow{f^{-1}}3\xrightarrow{g}1\\6\xrightarrow{f^{-1}}4\xrightarrow{g}2\end{array}\right\}\Rightarrow gof^{-1}=\{(5,3),(4,1),(6,2)\}$$

حالا اگر فرض کنیم $gof^{-1}=h$ مسئله $\frac{g}{h}$ رو از ما خواسته پس باید دامنه‌های مشترک g,h رو در نظر بگیریم و yها رو به هم تقسیم کنیم:

$$D_h\cap D_g=\{5,4\}$$

$$\frac{g}{h}=\{(5,\tfrac{6}{3}),(4,\tfrac{2}{1})\}=\{(5,2),(4,2)\}$$

-۷۵ گزینه ۱

قرینه نسبت به نیمساز یعنی وارون دیگه:

اولی: $y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۴}{۳}$ دوم تعویض: $x=\frac{۲}{۳}y+\frac{۴}{۳}$

سوم y بر حسب x: $\frac{۲}{۳}y=x-\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\times\frac{۳}{۲}}y=\frac{۳}{۲}x-۲$

روش دوم: همون که جای x و y عوض بشه میشه وارون:

$$۳x-۲y=۴\xrightarrow{x=۰}y=-۲$$

-۷۶ گزینه ۳

وقتی $f^{-۱}(۶)$ رو می‌خواد کافیه تو f به جای y بذاری ۶ و...

$$\left.\begin{array}{l} g(۶)=f^{-۱}(۶)\Rightarrow x+\sqrt{x}=۶ \\ \xrightarrow{\text{چشمی}} x=۴ \\ g(۱۲)=f^{-۱}(۱۲)\Rightarrow x+\sqrt{x}=۱۲ \\ \xrightarrow{\text{چشمی}} x=۹ \end{array}\right\}\Rightarrow ۴+۹=۱۳$$

-۷۷ گزینه ۲

$$f(x)=x-\frac{۲}{x}$$

گفته وارون روی $y=-x$ قرار داره یعنی نقطه $(x,-x)$ روی $f^{-۱}$. پس نقطه $(-x,x)$ روی f:

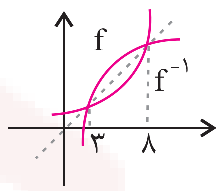
$$-x-\frac{۲}{-x}=x\Rightarrow\frac{۲}{x}=۲x\Rightarrow x^۲=۱\ \begin{cases}\boxed{x=۱}\\ x=-۱\end{cases}$$

-۷۸ گزینه ۱

کافیه یه نقطه خوب بدیم به f؛ مثلاً اگه بجای xهای f، عدد ۱ رو بذاریم می‌شه $\frac{۱}{۲}$ بنابراین باید تو $f^{-۱}$ نقطه $(۱,\frac{۱}{۲})$ رو باید داشته باشیم که فقط تو گزینه ۱ صدق می‌کنه. دقت کنید که تو گزینه۲ هم صدق می‌کنه ولی مشکل گزینه ۲ دامنشه و $|x|>۱$ غلطه چون با توجه به نقطه $(۱,\frac{۱}{۲})$، $\frac{۱}{۲}$ که کوچکتر از یکه عضو دامنه $f^{-۱}$ هست.

-۷۹ گزینه ۴

$x-f^{-۱}(x)$ باید بزرگتر مساوی صفر باشه یعنی از روی نمودار براحتی مشخص $x\ge f^{-۱}(x)$



-۸۰ گزینه ۱

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))$$

پس $f^{-۱}(۲۰)$ رو محاسبه می‌کنیم. برای این کار کافیه تو ضابطه‌ی تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ به جای y، بذاریم ۲۰:

$$۲۰=x+\sqrt{x}$$

حالا کافیه به شکل چشمی یک عدد مربع کامل پیدا کنیم که جمع خودش و جذرش بشه ۲۰. $x=۱۶$ جواب است:

$$۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰\Rightarrow x=۱۶\Rightarrow f^{-۱}(۲۰)=۱۶$$

حالا باید $g^{-۱}(۱۶)$ رو پیدا کنیم پس کافیه تو ضابطه‌ی $g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}$ به جای y، مقدار ۱۶ رو قرار بدیم تا x به‌دست بیاد:

$$۱۶=\frac{۹x+۶}{۱-x}\Rightarrow ۱۶-۱۶x=۹x+۶\Rightarrow ۲۵x=۱۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$$

-۸۱ گزینه ۱

ضابطه وارون رو قبل از رأس خواسته:

$y=x^۲-۶x+۱\to x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳\to S(۳,-۸)$ پس

رأس تابع وارون که رادیکالی باشه می‌شه $S'(-۸,۳)$. بنابراین $\sqrt{x}$، ۸ تا می‌ره عقب و ۳ تا بالا:

$$f^{-۱}=\sqrt{x+۸}+۳$$

حالا چون برای قبل از رأس می‌خواد یه منفی پشت رادیکال می‌ذاریم:

$$f^{-۱}=-\sqrt{x+۸}+۳$$

-۸۲ گزینه ۳

درجه دوم ها از رأس به بعد یا به قبل اکیداً یکنوا می‌شن. پس حداقل مقدار a همون رأس سهمیه! $x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳$

-۸۳ گزینه ۴

$f^{-۱}$ یا وارون رو با روش زیر براتون حل می‌کنیم:

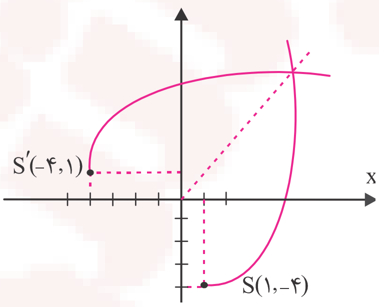
رأس سهمی رو بدست میارم و بعد وارونش می‌کنم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(۱)}=۱$$

$$y_S=f(۱)=۱-۲(۱)-۳=-۴$$

$$\Rightarrow S(۱,-۴)\xrightarrow{\text{وارون}}S'(-۴,۱)$$

ضابطه وارون رادیکالیه که ۴ واحد عقب رفته و یک واحد بالا اومده:



$f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1$

حالا باید f^{-1} رو با $g(x)=\frac{x-9}{2}$ قطع بدیم:

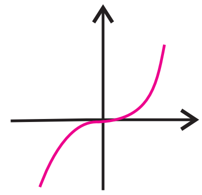
$$\left.\begin{matrix} y=\text{این} \\ y=\text{اون}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{این}=\text{اون} \quad\Rightarrow \sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}$$

کافیه به جای حل معادله گزینه‌ها رو امتحان کنیم که گزینه ۴ درسته یعنی ۲۱!

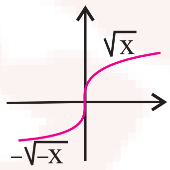
تذکر: درصـــمن دانش‌آموز باهوش فقط ۱۲ و ۲۱ رو چک میکنه و برای ۱۵ و ۱۸ وقت تلف نمیکنه. چون سمت چپ معادله تبدیل به یک عدد گنگ میشه و یک عدد گنگ. به‌هیچ‌وجه نمی‌تونه با یک عدد گویا برابر باشه.

۸۴- گزینه ۳

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & ,x\ge 0\\ -x^2 & ,x<0\end{cases}\Rightarrow$$



پس $f(x)$ همون لر چاق خودمونه، که معکوسش می‌شه:



۸۵- گزینه ۳

ضابطه داده شده دقیقاً معکوس لر چاقه.

۸۶- گزینه ۲

برای حل این تست، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=?$$

$$A=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{(5-\sqrt{6})}\times\frac{(5+\sqrt{6})}{(5+\sqrt{6})}$$

$$=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{2\times3})}{(25-6)}$$

$$=\frac{(10\sqrt{2}+4\sqrt{3})+(15\sqrt{3}+9\sqrt{2})}{19}$$

$$=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$B=2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(3-1)}=\boxed{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow A-B=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$$

روش دوم:

با استفاده از تقریب معروف خطی سازی $\sqrt{x}$ بین ۵ تا ۹ داریم که تو تست ۸ گفتم بهتون:

$\sqrt{8}=2/8$ و $\sqrt{6}=2/4$

$$\frac{2/8+3(1/7)}{5-2/4}-2(1/7-1)^{-1}$$

$$=\frac{7/9}{2/6}-2\left(\frac{10}{7}\right)=3^{+}-3^{-}=0^{+}$$

تنها گزینه‌ای که یه ذره بیشتر از صفر می‌شه گزینه ۲.

۸۷- گزینه ۲

در حل این مسئله از روابط زیر استفاده می‌کنیم: $(a>0)$

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \, , \, a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

$$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m b}$$

ابتدا A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[5]{2^2\sqrt[3]{2^4}}\times2^{\frac{4}{3}}$$

$$A=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^6\times2^4}}\times2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[15]{2^{10}}\times2^{\frac{4}{3}}$$

$$=2^{\frac{10}{15}}\times2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=2^2=4$$

بنابراین:

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=(2\times4)^{-\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0/5$$

۸۸- گزینه ۳

ابتدا A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}=\sqrt[5]{\sqrt[2]{9^2\times3}}\times\frac{1}{12^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\sqrt[10]{(3)^2\times3}\times\frac{1}{\sqrt{12^3}}=\sqrt[10]{3^5}\times\frac{1}{12\sqrt{12}}=$$

$$\cancel{\sqrt{3}}\times\frac{1}{12\times2\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{1}{24}$$

حالا حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ را حساب می‌کنیم:

$$(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}=(1+24)^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$$