به نام پروردگار مهربان

کنکور ۱۴۰۰

ویرایش جدید

ریاضیات پایه و حسابان

دهم، یازدهم و دوازدهم

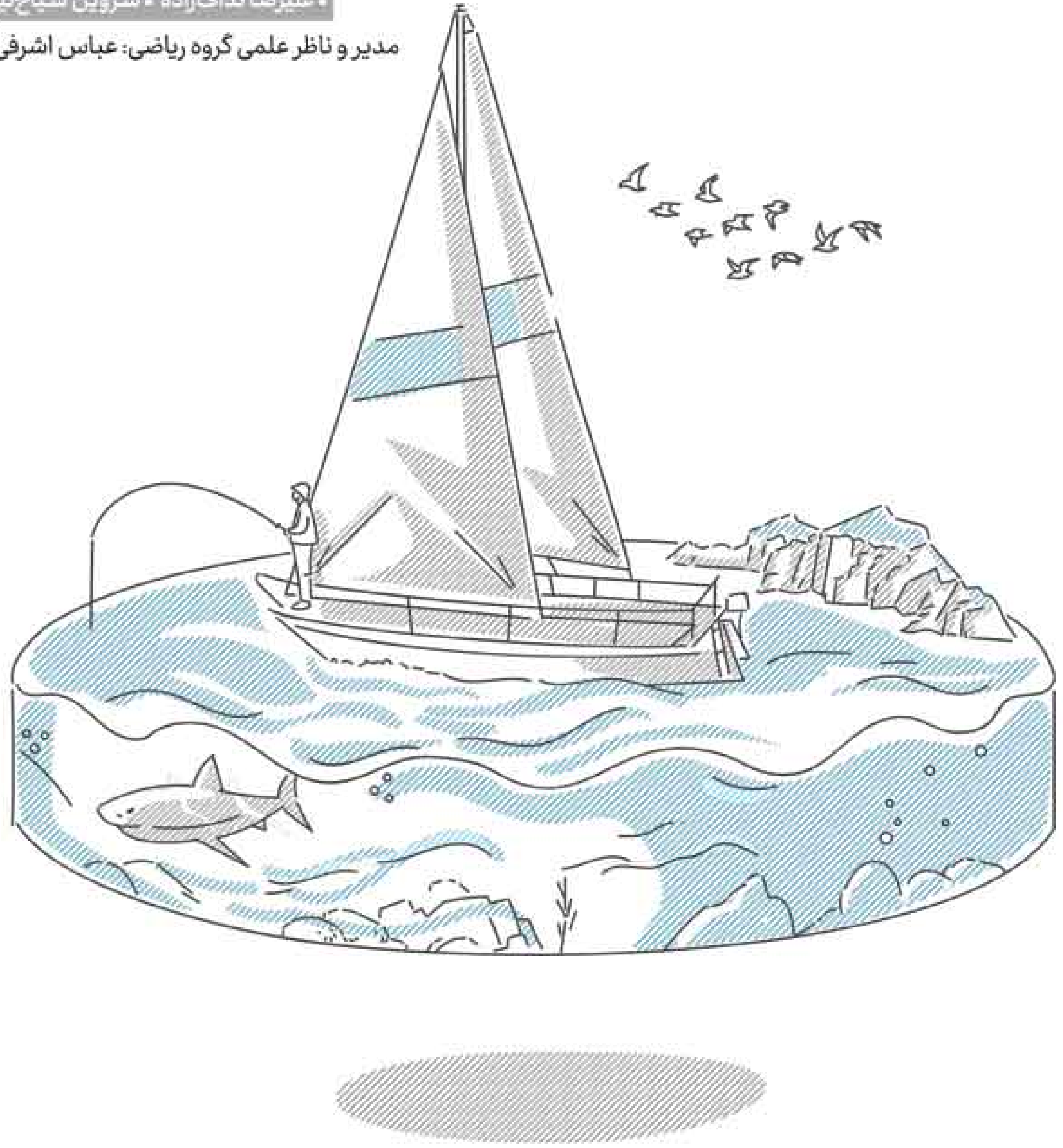
جامع کنکور

• عباس اشرفی • وهاب تقی‌زاده

• علیرضا نداف‌زاده • شروین سیاح‌نیا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه



فهرست

ریشه و توان

۵

(۱) اگر a عددی **نامنفی** باشد، ریشهٔ دوم آن را مقداری تعریف می‌کنیم که در صورت به توان دو رساندن، برابر a شود.

برای نمونه: ۵ و ۵− ریشه‌های دوم عدد ۲۵ هستند. هر عدد مثبت، دو ریشهٔ دوم دارد.

(۲) ریشهٔ سوم هر عدد، مقداری است که اگر آن را به توان ۳ برسانیم، برابر عدد اولیه شود. **برای نمونه:** $-\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ سوم عدد $-\frac{۱}{۸}$ است.

هر عدد، یک ریشهٔ سوم دارد.

به همین ترتیب می‌توان ریشه‌های چهارم، پنجم و ... را تعریف کرد. همچنین می‌توان گفت اعداد **منفی**، ریشهٔ مرتبهٔ **زوج** ندارند و اعداد **مثبت**، دو **ریشهٔ** مرتبهٔ **زوج** دارند. هر عدد، یک ریشهٔ مرتبهٔ **فرد** دارد.

مُهِم

(۳) اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می‌نامیم، هرگاه $b^n = a$ باشد.

برای نمونه: ۳ و ۳− ریشه‌های چهارم ۸۱ هستند زیرا: $۸۱ = (-۳)^۴ = (۳)^۴$

مُهِم

(۴) برای نمایش ریشهٔ nاُم عدد a، از نماد $\sqrt[n]{a}$ استفاده می‌کنیم.

به عنوان نمونه برای نمایش این‌که اعداد ۵ و ۵− ریشه‌های چهارم عدد ۶۲۵ هستند، می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵\\ -\sqrt[۴]{۶۲۵} = -۵\end{cases}$$

هشدار: ریشه‌های مرتبهٔ زوج (ریشه‌های $۲n$اُم) عدد مثبت a برابر $\sqrt[۲n]{a}$ و $-\sqrt[۲n]{a}$ هستند، ولی ریشهٔ مرتبهٔ فرد (ریشهٔ $۲n+۱$اُم) عدد a فقط برابر $\sqrt[۲n+۱]{a}$ است.

مثال: ریشهٔ سوم عدد ۵۷− بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ عدد ۵۷− را بین دو عدد صحیح مکعب کامل قرار می‌دهیم:

$$-۶۴ < -۵۷ < -۲۷ \Rightarrow (-۴)^۳ < -۵۷ < (-۳)^۳$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$-۴ < \sqrt[۳]{-۵۷} < -۳$$

حتی می‌توان گفت ۵۷− به ۶۴− نزدیک‌تر، پس حاصل $\sqrt[۳]{-۵۷}$ به عدد ۴− نزدیک‌تر است.

تست: m و n دو عدد صحیح متوالی‌اند که در رابطهٔ $n < \sqrt[۳]{۱۲۶۹} < m$ صدق می‌کنند. حاصل $m^۲ - n^۲$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخ گزینه ۲ عدد ۱۲۶۹ بین دو عدد صحیح مکعب کامل $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$ و $۱۳۳۱ = ۱۱^۳$ قرار دارد:

$$۱۰۰۰ < ۱۲۶۹ < ۱۳۳۱ \Rightarrow ۱۰ < \sqrt[۳]{۱۲۶۹} < ۱۱ \Rightarrow m = ۱۱\ ,\ n = ۱۰ \Rightarrow m^۲ - n^۲ = ۱۲۱ - ۱۰۰ = ۲۱$$

نکته: به ازای $n \in \mathbb{N}$، $n \geq ۲$ به جدول زیر توجه کنید:

n فرد	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
n زوج	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\begin{cases} a \geq ۰ \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < ۰ \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n \text{ تعریف‌نشده} \end{cases}$

همان‌طور که می‌بینید حاصل دو عبارت $\sqrt[n]{a^n}$ و $(\sqrt[n]{a})^n$ همواره برابر نیستند و در صورتی برابرند که n فرد یا n زوج و a نامنفی باشد.

تست: در چه بازه‌ای حاصل $A = \sqrt{x+۲+۲\sqrt{x+۱}} + \sqrt{x+۲-۲\sqrt{x+۱}}$ مستقل از x است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[-۱,۲]$

پاسخ گزینه ۲ هر دو عبارت زیر رادیکال، مربع کامل‌اند، بنابراین:

$$x+۲+۲\sqrt{x+۱} = x+۱+۲\sqrt{x+۱}+۱ = (\sqrt{x+۱})^۲ + ۲\sqrt{x+۱} + ۱ = (\sqrt{x+۱}+۱)^۲$$

$$x+۲-۲\sqrt{x+۱} = x+۱-۲\sqrt{x+۱}+۱ = (\sqrt{x+۱})^۲ - ۲\sqrt{x+۱} + ۱ = (\sqrt{x+۱}-۱)^۲$$

حال به محاسبهٔ A می‌پردازیم:

$$A = \sqrt{(\sqrt{x+۱}+۱)^۲} + \sqrt{(\sqrt{x+۱}-۱)^۲} = \lvert \sqrt{x+۱}+۱ \rvert + \lvert \sqrt{x+۱}-۱ \rvert$$

عبارت $\sqrt{x+۱}+۱$ همواره مثبت است و به قدرمطلق نیازی ندارد.

$$A = \sqrt{x+۱}+۱+\lvert \sqrt{x+۱}-۱ \rvert$$

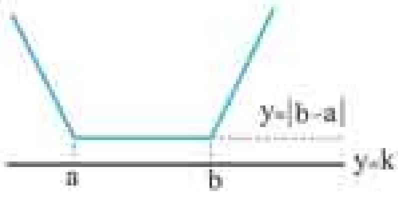
برای این‌که A مستقل از x باشد، باید عبارت $\sqrt{x+۱}-۱$ مقداری نامثبت باشد تا از قدرمطلق، قرینه خارج شود.

$$A = \cancel{\sqrt{x+۱}}+۱+(-\cancel{\sqrt{x+۱}}+۱) = ۲$$

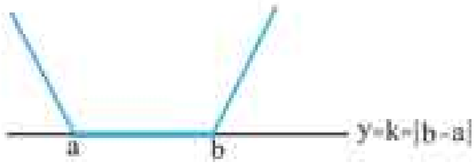
(A مستقل از x است.)

نکته: در معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$ حالت‌های زیر رخ می‌دهند $(a<b)$:

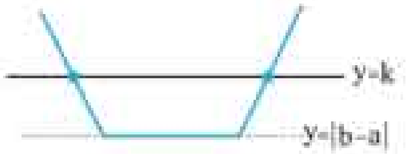
الف) اگر $k<|b-a|$ باشد، معادله جواب ندارد.



ب) اگر $k=|b-a|$ باشد، معادله بی‌شمار جواب در بازهٔ $[a,b]$ دارد.
یعنی بازهٔ $[a,b]$ جواب معادله است.

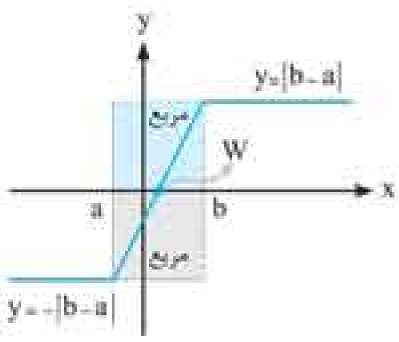


پ) اگر $k>|b-a|$ باشد، معادله دو جواب دارد.

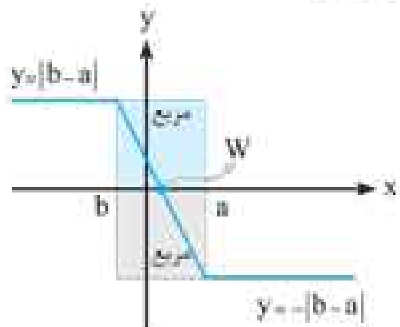


۳) رسم نمودار توابع آبشاری: توابعی با ضابطهٔ $y=|x-a|-|x-b|$ را **توابع آبشاری** می‌نامند.
نمودار کلی این توابع به یکی از دو شکل زیر است:

الف) $a<b$



ب) $a>b$



این توابع مرکز تقارنی به مختصات $W(\frac{a+b}{۲},۰)$ دارند. شیب پاره‌خط این نمودار همواره $+۲$ یا -۲ است.

تست: مساحت ناحیهٔ محدود بین منحنی $y=|x-۱|-|x+۳|$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

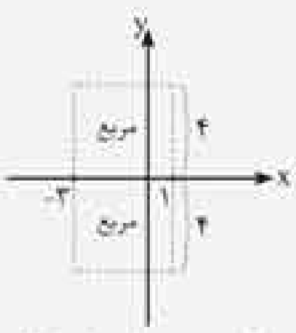
پاسخ گزینه ۲ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.
اگر بخواهیم مانند مثال قبل این کار را خودمانی‌تر انجام دهیم باید مراحل زیر را انجام دهیم:

الف) ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق را می‌یابیم:

$x-۱=۰\Rightarrow x=+۱$

$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳$

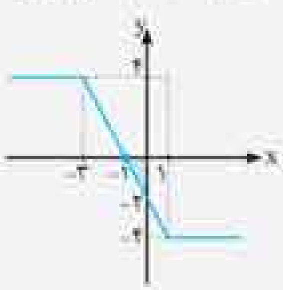
ب) روی محور طول‌ها در بازهٔ $[-۳,۱]$ دو مربع، یکی روی محور و یکی زیر محور می‌سازیم:



پ) نقطهٔ $x=-۳$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$f(-۳)=|-۳-۱|-|-۳+۳|=۴$

از نقطهٔ $(-۳,۴)$ قطر مستطیل را رسم می‌کنیم:



عرض از مبدأ تابع را می‌یابیم:

$f(۰)=|۰-۱|-|۰+۳|=-۲$

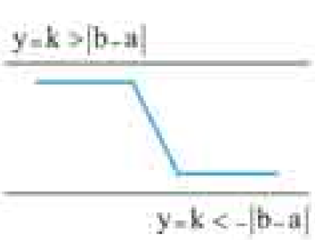
در محل برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها مقدار $y=۰$ است. مطابق آن‌چه در شکل می‌بینید این اتفاق دقیقاً در وسط دو ریشهٔ قدرمطلق یعنی $x=۱$ و $x=-۳$ می‌افتد در نتیجه $x=-۱$ محل برخورد با محور طول‌ها است.

مساحت مثلث محصور بین نمودار تابع $y=f(x)$ و محورهای مختصات را می‌یابیم:

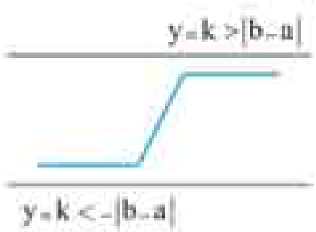
$S=\frac{۱}{۲}(۲)\times(۱)=۱$

نکته: در معادلهٔ $|x-a|-|x-b|=k$ حالت‌های زیر رخ می‌دهند:

الف) اگر $|k|>|b-a|$ باشد، معادله جواب **ندارد**.



یا



آزمون فصل

۱. اگر $[\frac{1-x}{2}]-[\frac{x-1}{3}]=5$ باشد، حاصل $[-\frac{x}{5}]$ برابر است با:

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) صفر

۲. حاصل $[\frac{100}{3}]+[\frac{100}{3^2}]+[\frac{100}{3^3}]+\cdots+[\frac{100}{3^{100}}]$، برابر است با:

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۳. معادلهٔ $[\frac{24}{x-7}]+[\frac{24}{7-x}]=0$ چند ریشه در مجموعهٔ اعداد حقیقی دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) بی‌شمار ۴) ۱۷

۴. اگر $[\frac{1-2x}{9}]=-5$ باشد، آن‌گاه عبارت $[\frac{11x+1}{3}]$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۵. مجموعه جواب معادلهٔ $|[x]-x-1|=1$، برابر است با:

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۶. معادلهٔ $[x]+[-x+4]=|2x+1|$، چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷. اگر محدودهٔ x از نامعادلهٔ $(\frac{1}{\sqrt{2}+1})^{x^2} > (\sqrt{2}-1)^{3x-2}$ به‌دست آید، آن‌گاه حاصل $[-\frac{x}{2}]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۸. اگر $f(x)=[x]-[\frac{x+1}{2}]$ باشد، برد تابع $f(x+2)-f(x)$ برابر است با:

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{2\}$ ۴) $\{1,2\}$

۹. نمودار تابع $y=[\frac{x}{5}]+[\sqrt[3]{x}]$ در فاصلهٔ $(0,30)$، از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۰. مجموعه جواب معادلهٔ $(\frac{1}{8})^{[x]}=4^{1-[x]}$، کدام است؟

۱) $[-2,-1)$ ۲) $(-2,-1]$ ۳) $[1,2)$ ۴) $(1,2)$

برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون فصل، رمزینهٔ مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحهٔ مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.

معادلات و نامعادلات نمایی

معادلات نمایی

اگر b عددی مثبت و $b^x = b^y$ باشد، آن‌گاه $x = y$ است و برعکس، اگر $x = y$ باشد، آن‌گاه $b^x = b^y$ است.

تست: نمودارهای دو تابع $f(x) = ۲^{x^۲-۲x}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{x-۲}$، در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیر متقاطع

پاسخ (گزینه ۲) تابع $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{x-۲}$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = (\frac{۱}{۲})^{x-۲} = (۲^{-۱})^{x-۲} = ۲^{-x+۲}$$

نقاط تقاطع دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ از روی معادلهٔ $f(x) = g(x)$ به‌دست می‌آیند.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ۲^{x^۲-۲x} = ۲^{-x+۲} \Rightarrow x^۲ - ۲x = -x + ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

دو منحنی در نقاط $x = -۱$ و $x = ۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

خط $y = k$ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{۴^x - ۲^{x+۱} + ۴}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. محدودهٔ k کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} < k < ۲$ ۲) $۱ \le k \le \sqrt{۲}$ ۳) $۰ < k < ۱$ ۴) $\sqrt{۲} < k < \sqrt{۳}$

پاسخ (گزینه ۱) معادلهٔ $y = f(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\sqrt{۴^x - ۲^{x+۱} + ۴} = k$$

k عددی مثبت است.

$$۴^x - ۲^{x+۱} + ۴ = k^۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ - ۲(۲^x) + (۴ - k^۲) = ۰$$

به جای ۲^x متغیر A را قرار می‌دهیم (دقت کنید ۲^x همواره مثبت است، پس A نیز مثبت است):

$$A^۲ - ۲A + (۴ - k^۲) = ۰$$

این معادله باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد، پس باید Δ، S و P معادلهٔ درجهٔ دوم، همگی مثبت باشند:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۴ - k^۲) > ۰ \Rightarrow ۴k^۲ - ۱۲ > ۰ \Rightarrow k^۲ > ۳ \Rightarrow \begin{cases} k > \sqrt{۳} \\ k < -\sqrt{۳} \end{cases} \quad \boxed{۱}$$

$$S > ۰ \Rightarrow -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{-۲}{۱} > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \quad \text{بدیهی است} \quad \boxed{۲}$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۴ - k^۲}{۱} > ۰ \Rightarrow k^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < k < ۲ \quad \boxed{۳}$$

اشتراک ۱، ۲ و ۳ برابر $\sqrt{۳} < k < ۲$ یا $-۲ < k < -\sqrt{۳}$ است.

با توجه به مثبت بودن k، حدود آن $\sqrt{۳} < k < ۲$ است.

نامعادلات نمایی

۱) اگر $b > ۱$ باشد، آن‌گاه از نامعادلهٔ $b^x \ge b^y$، می‌توان نتیجه گرفت $x \ge y$ است. **برای نمونه:** از $۵^{x^۲} \le ۵^{x+۱}$ می‌توان نتیجه گرفت $x^۲ \le x + ۱$ است.

۲) اگر $۰ < b < ۱$ باشد، آن‌گاه از نامعادلهٔ $b^x \ge b^y$، می‌توان نتیجه گرفت $x \le y$ است. **برای نمونه:** از $(\frac{۱}{۵})^x < (\frac{۱}{۵})^{۲x-۱}$ می‌توان نتیجه گرفت $x > ۲x - ۱$ است.

به‌طور خلاصه در یک نامعادله اگر پایه‌ها برابر باشند، می‌توان پایه‌ها را از طرفین نامعادله حذف کرد، به طوری‌که اگر پایه‌ها بزرگ‌تر از یک باشند، جهت نامعادله تغییر نمی‌کند ولی اگر پایه‌ها بین صفر و یک باشند، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

تست: به‌ازای $x > ۰$ مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{x}} < (۲-\sqrt{۳})^{۲+x}$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ (گزینه ۳) از آن‌جایی‌که $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ است، پس مقدار $۲ - \sqrt{۳}$ حدوداً برابر $۰/۳$ می‌شود، این مقدار عددی بین صفر و یک است.

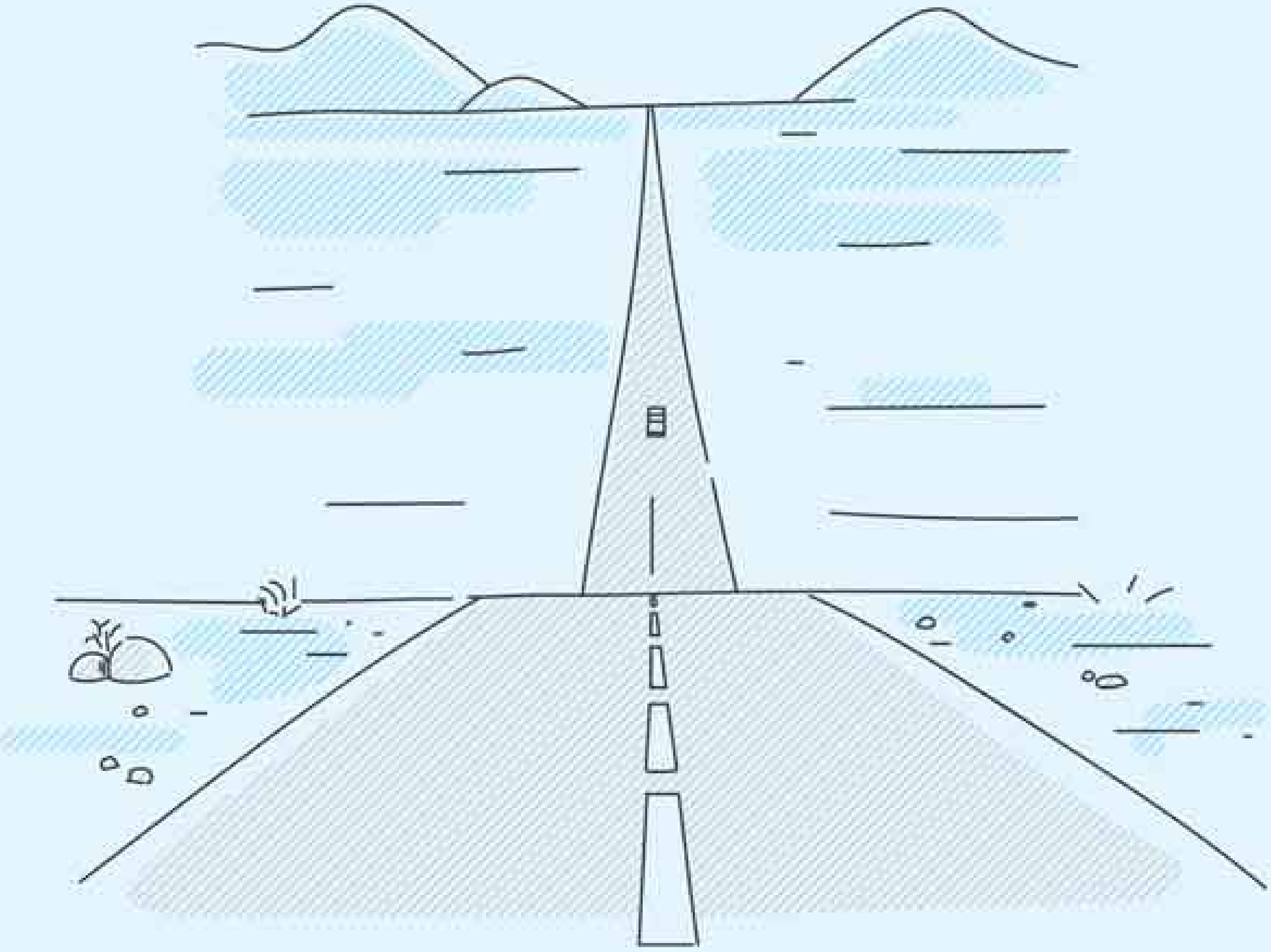
به شرط تغییر جهت نامساوی، می‌توانیم پایه‌ها را با هم ساده کنیم:

$$(\cancel{۲-\sqrt{۳}})^{\frac{۳}{x}} < (\cancel{۲-\sqrt{۳}})^{۲+x} \Rightarrow \frac{۳}{x} > ۲ + x$$

همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$۲ + x - \frac{۳}{x} < ۰ \Rightarrow \frac{۲x + x^۲ - ۳}{x} < ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x} < ۰$$

فصل ۱۳



حد و پیوستگی

این فصل دروازهٔ ورود به مطالب ریاضیات عالی و دانشگاهی است و پس از آموختن مفهوم حد، از زاویهٔ دیگری به ریاضیات نگاه خواهید کرد.
این فصل پیش‌نیاز فصل مشتق است که با آن آشنا خواهید شد.

هم‌ارزی‌های پرکاربرد در حل حدهای $\frac{0}{0}$

اگر x برحسب رادیان باشد، می‌توان نوشت:

مُهم

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$ یا $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$ یا $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

۵) $\lim\limits_{u\to ۰}۱-\cos^m u=\lim\limits_{u\to ۰}\frac{mu^۲}{۲}$

۶) $\lim\limits_{u\to ۰}\cos^m u=\lim\limits_{u\to ۰}(۱-\frac{mu^۲}{۲})$

۷) $\lim\limits_{u\to ۰}\sqrt[p]{۱+u}=\lim\limits_{u\to ۰}(۱+\frac{u}{p})$

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{x-\pi}$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینه ۱ در یک همسایگی محذوف راست نقطهٔ $x=\pi$ داریم:

$$\pi<x<۲\pi\Rightarrow|\sin x|=-\sin x$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin(\pi-x)}{x-\pi}$$

حال فرض می‌کنیم $\pi-x=t$:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin(\pi-x)}{x-\pi}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\sin t}{t}=۱$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$ ، کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینه۳ در یک اتحاد مثلثاتی داریم:

$$۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۲}=۲\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{x}\right)^۲$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{x}=\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین:

$$۲\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{x}\right)^۲=۲(\frac{۱}{۲})^۲=۲(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$$

پیوستگی

تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=a$ **پیوسته** می‌گوییم، هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) نقطهٔ $x=a$ **عضو دامنهٔ تابع** $f(x)$ **باشد.** ($a\in D_f$ و $f(a)$ تعریف شده باشد)

ب) حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ **وجود داشته باشد.** به عبارتی دیگر داریم:

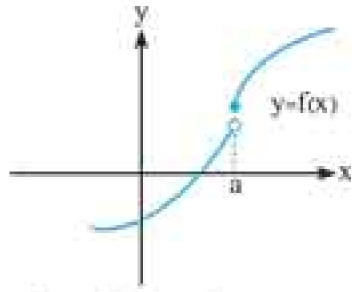
$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=L$$

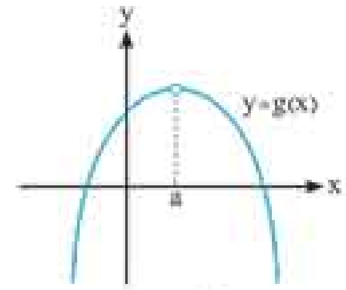
پ) مقدار حد تابع در این نقطه با **مقدار تابع** در این نقطه با هم **برابر باشند**، یعنی:

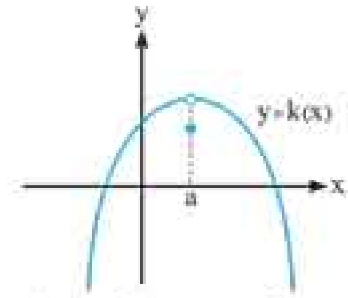
$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=L$$

چنانچه حداقل یکی از شرایط بالا برقرار نباشد، می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ **ناپیوسته** است.

برای نمونه: به مثال‌های زیر توجه کنید:



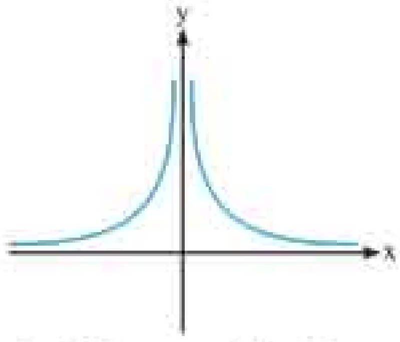




تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است، زیرا در این نقطه حد وجود ندارد. (حد چپ و حد راست باهم برابر نیستند.) به عبارتی دیگر شرط (ب) تعریف پیوستگی برقرار نیست.

تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است، زیرا در این نقطه $g(a)$ وجود ندارد، به عبارتی دیگر شرط (الف) برقرار نیست.

تابع $k(x)$ در این نقطه ناپیوسته است، زیرا حد تابع با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست، به عبارتی دیگر شرط (پ) برقرار نیست.



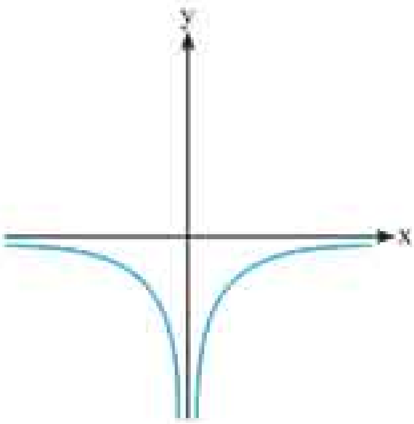
با نزدیک‌شدن متغیر x به عدد حقیقی صفر ($x \neq 0$) مقادیر خروجی تابع در حال افزایش می‌باشند. توجه کنید که نمودار تابع $y=\frac{1}{x^2}$ به صورت مقابل است:

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ است.

حد منفی بی‌نهایت در نقطه

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ، یعنی با میل کردن متغیر x به عدد حقیقی a، مقادیر تابع بدون توقف (بدون کران پایین) کاهش یابند. **برای نمونه:** برای تابع $y=\frac{-1}{x^2}$ داریم:

x	-10^{-8}	-10^{-20}	-10^{-100}	-10^{-1000}	0	10^{-1000}	10^{-100}	10^{-20}	10^{-8}
$y=\frac{-1}{x^2}$	-10^{16}	-10^{40}	-10^{200}	-10^{2000}		-10^{2000}	-10^{200}	-10^{40}	-10^{16}



همان‌طور که مشاهده می‌کنید با نزدیک شدن متغیر x به عدد حقیقی صفر ($x \neq 0$) مقادیر خروجی تابع در حال کاهش می‌باشند. توجه کنید که نمودار تابع $y=\frac{-1}{x^2}$ به‌صورت زیر است:

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$ است.

تذکر: نماد $+\infty$ یعنی افزایش بدون توقف و نماد $-\infty$ یعنی کاهش بدون توقف، پس نباید این نمادها را یک عدد حقیقی فرض کرد، به عبارتی دیگر $+\infty$ یعنی تابع از بالا بی‌کران است و $-\infty$ یعنی تابع از پایین بی‌کران است.

قضایای حدهای بی‌نهایت

قضیه: ۱ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty \ , \ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & ; \ n \text{ زوج} \\ -\infty & ; \ n \text{ فرد}\end{cases}$$

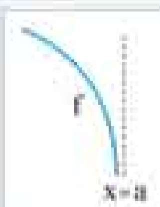
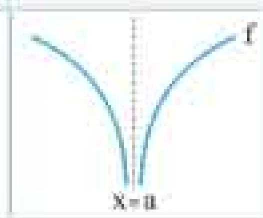
۲ **الف)** اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و بالعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و بالعکس.

تذکر: ۱ اگر حاصل حد در یک نقطه **نامتناهی** شود ($\pm\infty$)، در این نقطه **حد وجود ندارد**، زیرا حد تابع در یک نقطه زمانی وجود دارد که حاصل آن، عددی حقیقی و یکتا شود.

۲ اگر در نقطهٔ $x=a$ داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

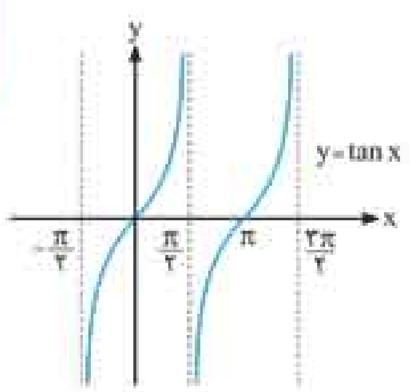
۳ نمایش هندسی حدهای بی‌نهایت در نقطهٔ $x=a$ به صورت زیر است:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$		$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$	
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$		$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	

مثال: حاصل حدهای خواسته‌شده را با توجه به نمودار تابع به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

با توجه به نمودار تابع:

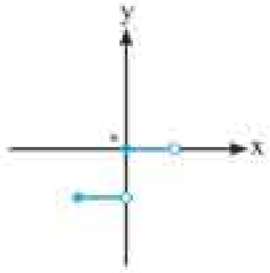


$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty\end{cases} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x = \text{وجود ندارد}$$

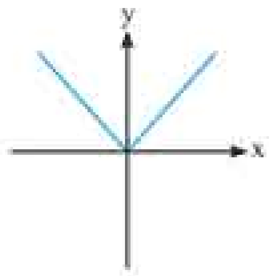
نقاط مشتق‌ناپذیر یک تابع

می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر تابع را به دسته‌های زیر افراز کرد.

(۱) نقاط ناپیوسته. **برای نمونه:** تابع $y=[x]$ در نقطهٔ $x=0$

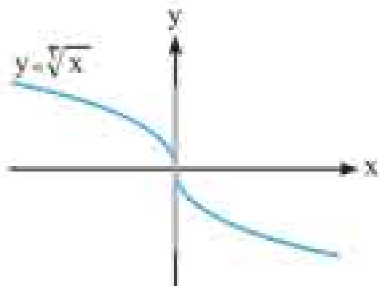


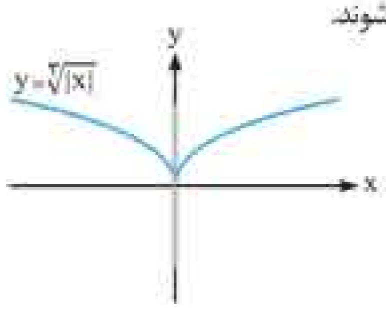
(۲) نقاط پیوسته‌ای که مشتق‌های چپ و راست در آن وجود دارد ولی با هم برابر نیستند (نقاط گوشه).
برای نمونه: تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=0$.



این نقاط، نقاط مماس‌پذیرند و دارای دو خط نیم مماس راست و نیم مماس چپ هستند که با هم یک زاویهٔ حاده می‌سازند.

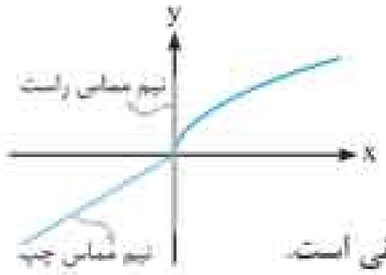
(۳) نقاط پیوسته‌ای که حاصل حد در تعاریف هر دو مشتق‌های چپ و راست نامتناهی می‌شوند.
برای نمونه: $y=\sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x=0$ یا $y=\sqrt{|x|}$ در نقطهٔ $x=0$





بدیهی است در این نقاط مماس بر تابع یک مماس قائم است.

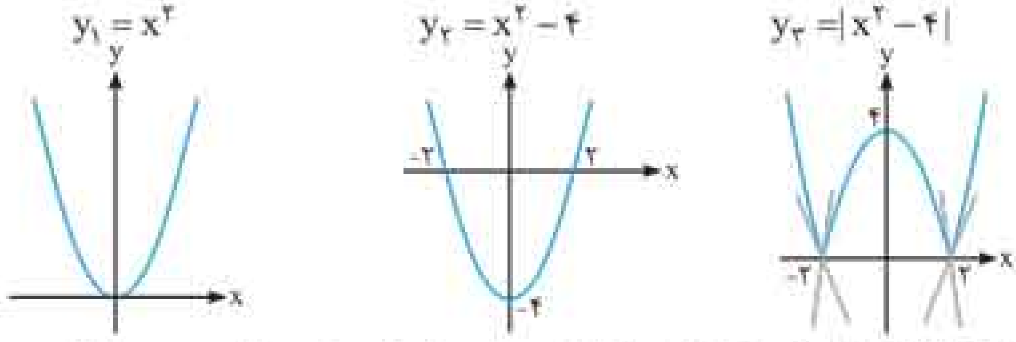
(۴) نقاط پیوسته‌ای که حاصل حد در تعریف یکی از مشتق‌های چپ یا راست نامتناهی ولی در دیگری متناهی (یک عدد حقیقی) می‌شود. به عبارت دیگر یکی از مشتق‌های چپ یا راست وجود ندارد ولی دیگری وجود دارد. **برای نمونه:** تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \ x\geq 0\\ x & ; \ x<0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$



بدیهی است در این نقاط، تابع مماس‌ناپذیر است اگرچه یکی از مماس‌های چپ یا راست قائم و دیگری خط مایل یا افقی است.
بدیهی است که این نقاط، نقاط مماس‌ناپذیرند و دارای دو خط نیم مماس راست و نیم مماس چپ هستند که با هم یک زاویهٔ حاده می‌سازند.

مثال: با رسم نمودار توابع زیر، نقاط مشتق‌ناپذیر را بیابید. الف) $f(x)=|x^2-4|$

نمودار تابع طبق قوانین رسم به صورت زیر است.



همان‌طورکه از نمودار پیداست در نقاط $x_1=2$ و $x_2=-2$ دو خط نیم مماس راست و نیم مماس چپ می‌توان رسم کرد که بر هم منطبق نیستند (نقاط گوشه‌ای) پس این نقاط مشتق‌ناپذیرند.
ولی بقیهٔ نقاط دارای مماس غیر قائم می‌باشند، پس نقاط مشتق‌پذیر می‌باشند.
به عنوان مثال می‌توانیم مشتق‌های چپ و راست را در نقطهٔ $x_1=-2$ به طریق زیر محاسبه نماییم:

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x^2-4|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-4)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}-(x-2)=4$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-(-2)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}(x-2)=-4$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، مشتق‌های چپ و راست در نقطهٔ $x=-2$ وجود دارد ولی با هم برابر نیستند پس این نقطه، یک نقطهٔ مشتق‌پذیر نیست.

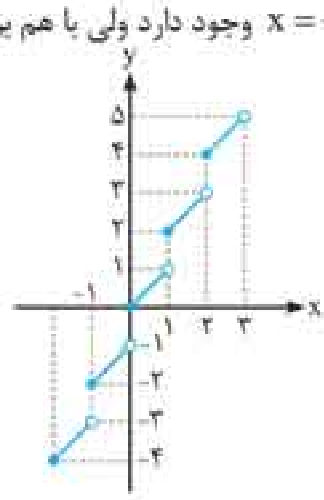
ب) $f(x)=x+[x]$

$-2\leq x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow f(x)=x-2$

$-1\leq x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=x-1$

$0\leq x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=x$

$1\leq x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=x+1$



ⓘ **تست:** مشتق عبارت $(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$، به ازای $x=-8$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ گزینه ۳

$$y=(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$$

$$y=u^2 \Rightarrow y'=2uu'$$

فرض می‌کنیم $u=\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}$ پس $u'=\frac{0-16}{x^2}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$ حال داریم:

$$y'=2(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})(\frac{-16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})\xrightarrow{x=-8}y'=2(-2-4)(\frac{-16}{64}+\frac{2}{12})=1$$

ⓘ اگر $f(x)=\sin^2\pi x-\frac{1}{2}\cos\pi x$ باشد، مشتق تابع $y=f(f(x))$ در $x=\frac{1}{3}$، چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

پاسخ گزینه ۳ ابتدا طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌نویسیم:

$$y=f(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x))\Rightarrow y'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})f'(f(\frac{1}{3}))$$

از طرفی می‌دانیم:

$$f(\frac{1}{3})=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$y'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})f'(\frac{1}{2})$$

حال به محاسبهٔ $f'(x)$ می‌پردازیم:

$$f'(x)=2(\sin\pi x)(\pi\cos\pi x)+\frac{\pi}{2}\sin\pi x$$

$$f'(x)=\pi\sin 2\pi x+\frac{\pi}{2}\sin\pi x$$

(توجه کنید که در ذهن پنداشتیم که $u=\sin\pi x$ و در محاسبهٔ مشتق $\sin^2\pi x=u^2$ از قاعدهٔ $2uu'$ استفاده کردیم.)

حال می‌نویسیم:

$$f'(\frac{1}{3})=\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{\pi}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\pi\sqrt{3}}{4} \quad , \quad f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$$

پس داریم:

$$y'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})f'(\frac{1}{2})=(\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi)(\frac{1}{2}\pi) \quad , \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi^2=\frac{\pi^2}{8}(3\sqrt{3})$$

محاسبهٔ مشتق‌های چپ و راست تابع f در یک نقطه به‌وسیله تابع f'

با کمک قضیهٔ زیر می‌توان حاصل $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ را به‌وسیله تابع $f'(x)$ به‌دست آورد. (δ یک عدد مثبت می‌باشد)

قضیه: ۱ اگر تابع f در بازهٔ $[a, a+\delta)$ پیوسته و در بازهٔ $(a, a+\delta)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f'$ وجود داشته باشد (یک عدد حقیقی شود)، آن‌گاه:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x)$$

قضیه: ۲ اگر تابع f در بازهٔ $(a-\delta, a]$ پیوسته و در بازهٔ $(a-\delta, a)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^-} f'$ وجود داشته باشد. (یک عدد حقیقی شود) آن‌گاه:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}f'(x)$$

از قضیهٔ بالا می‌توان در توابع چند ضابطه‌ای و نقاط گوشه‌ای به محاسبهٔ مشتق‌های چپ و راست و شیب‌های نیم‌مماس‌های چپ و راست پرداخت.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}5x^2+7x & ; x\geq 1\\ 4x-1 & ; x<1\end{cases}$ حاصل $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را بیابید.

پاسخ تابع در نقطهٔ $x=1$ دارای پیوستگی راست است زیرا $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=12$ اما در نقطهٔ $x=1$ پیوستگی چپ ندارد چون $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3\neq f(1)$

پس شرط لازم برای وجود مشتق چپ را ندارد پس $f'_-(1)$ وجود ندارد.

حال به‌وسیلهٔ قضیهٔ بیان شده به محاسبهٔ $f'_+(1)$ می‌پردازیم:

$$f'(x)=\begin{cases}10x+7 & ; \quad x>1\\ 4 & ; \quad x<1\end{cases}$$

چون در یک همسایهٔ راست نقطهٔ $x=1$ شرایط قضیه برقرار است، پس:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(10x+7)=17$$

مثال: در بازهٔ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x^2-4|$ در نقاط $x_1=2$ و $x_2=-2$ تحقیق کنید و تابع $f'(x)$ را همراه با دامنهٔ f' بیابید.

پاسخ تابع f بنابر قضایایی پیوستگی که در فصل ۱۳ بیان شد در همهٔ نقاط از جمله $x_1=2$ و $x_2=-2$ پیوسته است.

حال تابع f را چند ضابطه‌ای می‌نماییم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^2-4)=x^3-4x & ; x\geq 2\\ x(4-x^2)=4x-x^3 & ; -2\leq x\leq 2\\ x(x^2-4)=x^3-4x & ; x\leq -2\end{cases}$$

پاسخ $\text{آهنگ تغییر طول نسبت به دما} = \dfrac{L(۲۵)-L(۲۰)}{۲۵-۲۰} = \dfrac{(۲(۲۵)^۲+۲۵+۳-(۲\times(۲۰)^۲+۲۰+۳)}{۵} = \dfrac{۲(۲۵^۲-۲۰^۲)+۵}{۵}$

$= \dfrac{۲(۲۵+۲۰)(۲۵-۲۰)+۵}{۵} = \dfrac{۴۵۵}{۵} = ۹۱$

یعنی در این بازه به‌ازای هر ۱ درجه افزایش دما به‌طور متوسط ۹۱ سانتی‌متر به طول میله اضافه شده است.

تست: جرم یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ می‌باشد. آهنگ تغییر جرم این توده نسبت به زمان در بازهٔ $[۱,۴]$ چقدر است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۲/۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۲

پاسخ (گزینه ۲) $\text{آهنگ تغییر متوسط جرم نسبت به زمان در بازهٔ } [۱,۴] = \dfrac{m(۴)-m(۱)}{۴-۱} = \dfrac{(۲+۱۲۸)-(۱+۲)}{۳} = \dfrac{۱۲۷}{۳} \simeq ۴۲/۳$

یعنی در این بازهٔ زمانی به‌ازای گذشت یک ساعت زمان، تقریباً به‌طور متوسط به مقدار ۴۲/۳ واحد به جرم توده اضافه شده است.

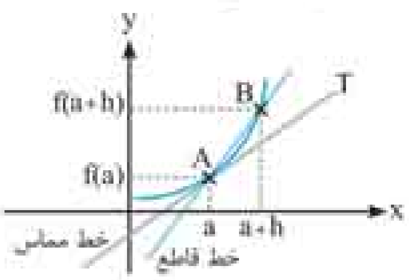
آهنگ تغییر لحظه‌ای

تابع پیوستهٔ f مفروض است. آهنگ تغییر لحظه‌ای f نسبت به x در نقطهٔ $x=a$ برابر است با حاصل حد مقابل: $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(a+h)-f(h)}{h}$

که تعریف بالا همان تعریف مشتق تابع f در نقطه $x=a$ است. پس می‌توان نوشت:

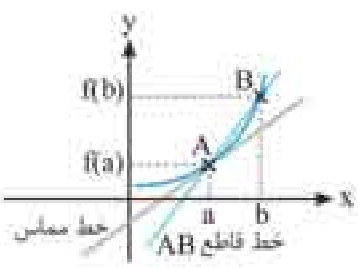
$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع نسبت } f \text{ به } x \text{ در نقطهٔ } x=a = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{شیب مماس بر تابع } f \text{ در نقطهٔ } x=a = f'(a)$$



در حقیقت آهنگ تغییر لحظه‌ای f نسبت به x در نقطه $x=a$ همان حد آهنگ تغییر متوسط f نسبت به x در بازهٔ $[a,a+h)$ است در حالتی که نقاط انتهایی بازه بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک شوند. به‌عبارت دیگر خط قاطع AB به خط مماس AT برسد.

پس می‌توان گفت که آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $x=a$ تقریباً برابر است با آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[a,b]$ به‌طوری‌که نقطهٔ $x=b$ خیلی به نقطهٔ $x=a$ نزدیک باشد. به‌عبارتی دیگر عدد $b-a$ کوچک باشد.



تذکر: آهنگ تغییر لحظه‌ای f نسبت به x در نقطهٔ $x=a$ و مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ همواره با یکدیگر برابرند.

توجه: آهنگ تغییر لحظه‌ای f نسبت به x در نقطهٔ $x=a$ به‌صورت زیر هم تعریف می‌شود:

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تست: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=۲x^۲-x+۳$، نسبت به x در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۴}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ (گزینه ۱) $\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ نسبت به } x \text{ در نقطهٔ } x=\frac{۱}{۴} = f'(\frac{۱}{۴})$

چون $f'(x)=۴x-۱$ است، پس: $f'(\frac{۱}{۴})=۰$

تست: تابع $f(x)=۲\sin x+\cos x$ مفروض است. نسبت آهنگ تغییر متوسط f نسبت به x در بازهٔ $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ به آهنگ تغییر لحظه‌ای f نسبت به x در نقطهٔ $x=\pi$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۲\pi}$ ۳) $\frac{۳}{\pi}$ ۴) $-\frac{۳}{\pi}$

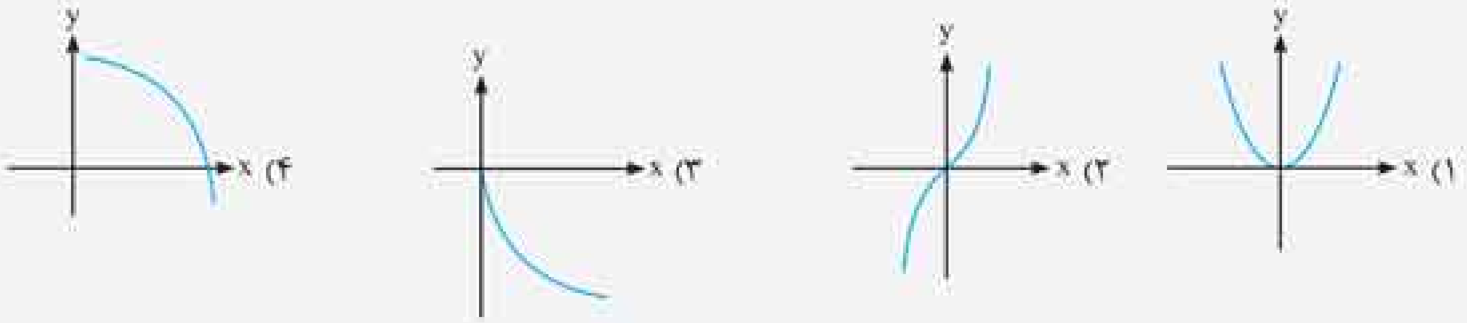
پاسخ (گزینه ۳) $\text{آهنگ متغیر متوسط } f \text{ نسبت به } x \text{ در } [\frac{\pi}{۲},\pi] = \dfrac{f(\pi)-f(\frac{\pi}{۲})}{\pi-\frac{\pi}{۲}} = \dfrac{(۰-۱)-(۲+۰)}{\frac{\pi}{۲}} = -\dfrac{۳}{\frac{\pi}{۲}} = -\dfrac{۶}{\pi}$

همچنین داریم: $\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای } f \text{ نسبت به } x \text{ در نقطهٔ } x=\pi : f'(\pi)$

چون مشتق تابع f برابر $f'(x)=۲\cos x-\sin x$ است، پس: $f'(\pi)=-۲$

بنابراین نسبت دو عدد حقیقی $-\frac{۶}{\pi}$ و -۲ برابر است با: $\dfrac{-\frac{۶}{\pi}}{-۲}=\dfrac{۳}{\pi}$

تست: در کدام تابع، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع با افزایش x، همواره کاهش می‌یابد؟

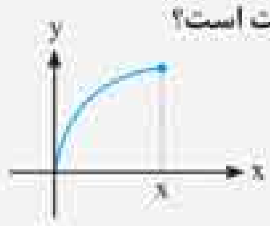


پاسخ گزینه ۴ در گزینه‌های «۱» و «۳» تقعر تابع همواره رو به بالاست، پس آهنگ تغییر لحظه‌ای یا شیب خطوط مماس با افزایش همواره، افزایش می‌یابند.

در گزینهٔ «۲» چون تقعر تابع در بازهٔ $(-\infty,0)$ رو به پایین و در بازهٔ $(0,+\infty)$ رو به بالا است پس آهنگ تغییر لحظه‌ای f هم با افزایش x در بازهٔ $(-\infty,0)$ کاهش می‌یابد و هم در بازهٔ $(0,+\infty)$ افزایش می‌یابد.

و اما در گزینهٔ «۴» چون تقعر تابع همواره رو به پایین است با افزایش x، شیب خطوط مماس و آهنگ تغییر لحظه‌ای f همواره روند کاهشی دارند.

در نمودار تابع $y=f(x)$، آهنگ تغییر متوسط f روی بازهٔ $[0,x]$ برابر عدد حقیقی k است. کدام گزینه درست است؟

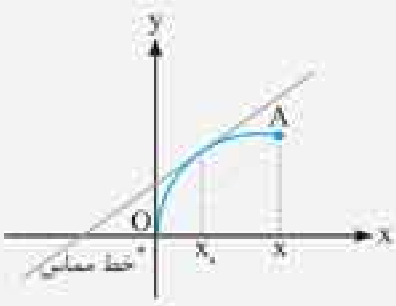


۱) آهنگ تغییر لحظه‌ای در هر نقطه این بازه همواره از عدد k بزرگتر است.

۲) آهنگ تغییر لحظه‌ای در هر نقطه از این بازه همواره از عدد k کوچکتر است.

۳) آهنگ تغییر لحظه‌ای ابتدا از عدد k بزرگتر و سپس از این عدد کوچکتر می‌شوند.

۴) آهنگ تغییر لحظه‌ای ابتدا از عدد k کوچکتر و سپس از این عدد بزرگتر می‌شوند.



پاسخ گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط f دربازه $[0,x]$ برابر است با شیب خط قاطع OA.

در نمودار تابع قابل رؤیت است که در نقطه‌ای مانند x_0 خط مماس بر تابع موازی خط قاطع OA می‌باشد و چون شیب دو خط موازی با هم برابرند پس می‌توان گفت آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطه x_0 با عدد k برابر است.

از طرفی چون تقعر تابع f دربازه $[0,x]$ همواره رو به پایین است، پس متغیر از چپ به راست بازه آهنگ تغییر لحظه‌ای رو به کاهش است. یعنی آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقاط بعد از x_0 از عدد k کوچک‌تر و در نقاط قبل از x_0 از عدد k بزرگ‌تر می‌باشد.

قاعدهٔ هوپیتال

فرض کنید در یک همسایهٔ محذوف نقطهٔ $x=0$، توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ و یا $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$

به عبارتی دیگر صورتی مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ داشته باشیم. در این صورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به شرطی که حد $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ یک عدد حقیقی شود و یا نامتناهی($+\infty$ یا $-\infty$) شود.

مثال: حاصل حدهای زیر را به کمک قاعدهٔ هوپیتال بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{1}=5$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^5-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{9x^8}{5x^4}=\frac{9}{5}$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

تذکر: در این تمرین دوبار از قاعدهٔ هوپیتال استفاده شده است.

ث) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{1-\tan x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{1-\tan x}{\sqrt{1-\sin 2x}}=\frac{0}{0}$$

هنگامی که حد یک عبارت گنگ (رادیکالی) صفر می‌شود. استفاده از قاعدهٔ هوپیتال توصیه نمی‌شود و پیشنهاد می‌شود که عبارت رادیکالی را از این حالتش خارج کنیم و سپس از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. بدین ترتیب می‌توان گفت: $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$

پس:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\tan x}{\sqrt{1-\sin 2x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\tan x}{|\sin x-\cos x|}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{0-(1+\tan^2 x)}{-\sin x-\cos x}=\frac{-2}{-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

الگو

یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد را **الگو** می‌نامند. برای مطالعهٔ الگوها بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان و ساماندهی کنیم.

تست: با توجه به الگوی مقابل، در شکل دهم چند نقطهٔ توپر وجود دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۶
۳) ۴۹ ۴) ۶۴

پاسخ گزینه ۲ تعداد نقطه‌های توپر هر یک از شکل‌ها را می‌نویسیم: ۲,۴,۴,۹,...

همان‌طورکه می‌بینید بعد از جملهٔ اول، هر دو جملهٔ متوالی، مربع اعداد طبیعی هستند با یافتن نظم الگوی فوق جمله‌های بعدی را حدس می‌زنیم:

$\underset{\text{دهمین جمله}}{}$ ۲,۴,۴,۹,۹,۱۶,۱۶,۲۵,۲۵,۳۶,...

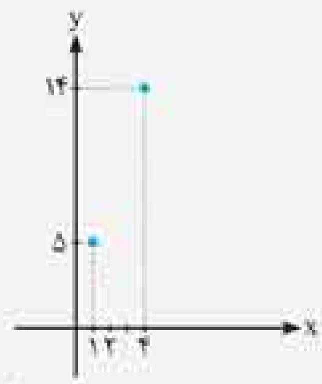
$$\underbrace{۳۶}_{\text{دهمین جمله}}$$

اکنون به مطالعهٔ چند الگوی مهم می‌پردازیم:

الف) الگوی خطی: الگوهایی را که جملهٔ عمومی آن‌ها $t_n = an + b$ است، الگوی **خطی** می‌نامند که در این الگو a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

در این الگوها اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، ثابت بوده و برابر a است. **برای نمونه:** اختلاف جملات متوالی الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n = ۵n + ۷$ برابر ۵ است.

تست: مطابق شکل، دو نقطه از نمودار الگوی خطی a_n داده شده است. جملهٔ دهم الگو کدام است؟



۱) ۳۰
۲) ۳۱
۳) ۳۲
۴) ۳۳

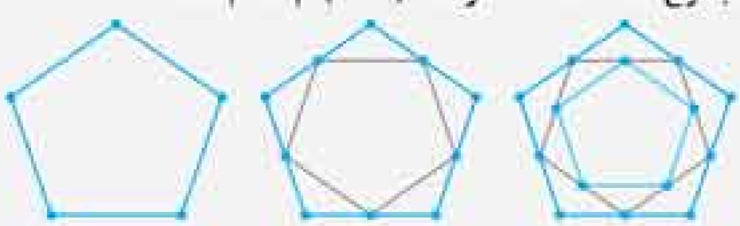
پاسخ گزینه ۳ جملهٔ عمومی الگوی خطی $t_n = an + b$ است.

$$\begin{cases} t_۱ = a(۱) + b = ۵ \\ t_۴ = a(۴) + b = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۵ \\ ۴a + b = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \end{cases}$$

با توجه به جملهٔ $t_n = ۳n + ۲$ می‌توان جملهٔ دهم را یافت.

$$t_{۱۰} = ۳(۱۰) + ۲ = ۳۲$$

تست: مطابق با الگوی زیر، وسط ضلع‌های ۵ ضلعی منتظم را به هم وصل می‌کنیم. مجموع تعداد نقاط تا مرحلهٔ $(n+۱)$ام کدام است؟



۱) $\frac{۵(n+۲)(n+۳)}{۲}$ ۲) $\frac{(n+۲)(n+۳)}{۲}$
۳) $\frac{۵(n+۱)(n+۲)}{۲}$ ۴) $\frac{۵n(n+۱)}{۲}$

پاسخ گزینه ۳ اگر الگوی تعداد نقاط را به‌صورت عددی بنویسیم: $۵, ۱۰, ۱۵, \ldots, ۵n, ۵(n+۱), \ldots$

مجموع این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$S_۱ = ۵ + ۱۰ + ۱۵ + \ldots + ۵(n+۱) = ۵(۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n + ۱)$$

با توجه به این‌که مجموع n عدد طبیعی $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. مجموع $n+۱$ عدد طبیعی برابر $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ است.

$$S_۱ = ۵(۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n + ۱) = ۵\left(\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right)$$

ب) الگوی مربعی: الگویی است که هر جمله از مربع شمارهٔ همان جمله به‌دست می‌آید. این الگو را می‌توان به‌شکل زیر نمایش داد.

$$۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots \xrightarrow{\text{جملهٔ عمومی}} t_n = n^۲$$

پ) الگوی مثلثی: الگویی است که هر جمله را به مجموع اعداد، یک تا شمارهٔ همان جمله نسبت می‌دهد. این الگو را می‌توان به شکل زیر نمایش داد.

$$۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \ldots \xrightarrow{\text{جملهٔ عمومی}} t_n = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ثانیاً طبق شرایط اکیداً صعودی بودن، باید مشتق آن مثبت باشد، درنتیجه:

مشتق تابع هموگرافیک: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^۲}>۰ \Rightarrow ad-bc>۰$

$\Rightarrow a(a-۳)-۱\times(-۲)>۰ \Rightarrow a^۲-۳a+۲>۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۲)>۰$

a	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$(a-۱)(a-۲)$		+	۰	−	۰	+	
		ق				ق	

اشتراک مجموعه جواب‌های دو شرط بیان‌شده برابر است با: $(a\geq ۲)\bigcap(a<۱ \text{ یا } a>۲)=(a>۲)$

نکته: اگر مشتق تابع هموگرافیک برابر صفر باشد، تابع به تابعی ثابت تبدیل می‌شود به‌همین دلیل است که در تابع هموگرافیک برای اکیداً یکنوایی مشتق تابع باید اکیداً بزرگ‌تر از صفر یا اکیداً کوچک‌تر از صفر درنظر گرفته شود. برای مثال داریم:

$f(x)=\dfrac{۳x-۱۲}{x-۴} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{۳(-۴)-۱\times(-۱۲)}{(x-۴)^۲}=\dfrac{-۱۲+۱۲}{(x-۴)^۲}=۰$

با کمی دقت در ضابطهٔ تابع درمی‌یابیم که صورت سه برابر مخرج است، درنتیجه: $f(x)=\dfrac{۳(x-۴)}{x-۴}=۳$

نمودار تابع $y=۴x^۳+۳ax^۲+۳x$ اکیداً صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $-۱\leq a\leq ۱$ ۲) $-۱\leq a\leq ۲$ ۳) $-۲\leq a\leq ۱$ ۴) $-۲\leq a\leq ۲$

پاسخ گزینه۴ می‌دانیم که شرط اکیداً صعودی بودن تابع این است که $f'(x)\geq ۰$، درنتیجه:

$f'(x)=۱۲x^۲+۶ax+۳\geq ۰ \xrightarrow{\div ۳} ۴x^۲+۲ax+۱\geq ۰$

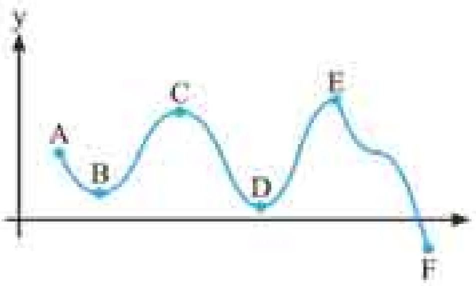
شرایط نامنفی بودن عبارت درجهٔ دوم این است که:

۱ $a=$ ضریب $x^۲$ $>۰ \Rightarrow ۴>۰$

۲ $\Delta\leq ۰ \Rightarrow (۲a)^۲-۴\times۴\times۱\leq ۰ \xrightarrow{\div ۴} a^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq a\leq ۲$

اکسترمم‌های نسبی و مطلق

تعریف اکسترمم‌های نسبی به‌صورت شهودی:



۱ هر نقطه‌ای از نمودار تابع را که شکل تابع در آن نقطه نسبت به هر دو همسایگی راست و چپ آن نقطه بالاتر یا در یک سطح قرار گرفته باشد را **ماکزیمم نسبی** تابع می‌نامیم. مختصات نقطهٔ ماکزیمم نسبی را به‌صورت $Max(x_{max}, y_{max})$ در نظر می‌گیریم. **برای نمونه:** در شکل مقابل تابع f در نقاط C و E دارای ماکزیمم نسبی است.

۲ هر نقطه‌ای از نمودار تابع را که شکل تابع در آن نقطه نسبت به هر دو همسایگی راست و چپ آن نقطه پایین‌تر یا در یک سطح قرار گرفته است را مینیمم نسبی نامیده و آن را به‌صورت $Min(x_{min}, y_{min})$ نشان می‌دهیم. **برای نمونه:** در شکل نمودار تابع $y=f(x)$ در نقاط B و D دارای مینیمم نسبی است.

گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ اکسترمم نسبی دارد، هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و تعریف دقیق نقاط اکسترمم نسبی به‌صورت زیر است.

اگر بازه‌ای مانند $I=(a,b)\subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد، یعنی $c\in(a,b)\subseteq D_f$ در این‌صورت:

ماکزیمم نسبی: $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی تابع f است، هرگاه به‌ازای هر x متعلق به بازهٔ I داشته باشیم $f(x)\leq f(c)$. در نمودارهای زیر نقاط مشخص‌شده، ماکزیمم نسبی هستند.

مینیمم نسبی: $f(c)$ یک مینیمم نسبی تابع f است، هرگاه به‌ازای هر x متعلق به بازهٔ I داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$. در شکل‌های زیر نقاط مشخص شده مینیمم نسبی تابع هستند.

روش‌های تعیین اکسترمم‌های نسبی:

۱ **روش رسم:** درصورت امکان نمودار تابع را رسم می‌کنیم و باتوجه به شکل اکسترمم‌های نسبی موجود را تعیین می‌کنیم. این روش به‌ویژه در توابع شامل قدرمطلق، براکتی، چند ضابطه‌ای، سینوسی، کسینوسی، تانژانت و یا هر تابعی که قابل رسم است، استفاده می‌شود.

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$
$$g(3)=6$$

پس تابع g در $x=3$ پیوسته است.

تذکر: برای پیوسته بودن تابع f در نقطهٔ a باید شرایط زیر برقرار باشد:
الف) تابع f در a تعریف شده باشد.
ب) حد تابع f در a موجود باشد.
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

۸۶۰. گزینه۳ چون تابع $f(x)$ شامل جزء صحیح است، به ازای $x=4$ درون براکت عددی صحیح می‌شود، پس برای بررسی پیوستگی باید حد چپ و حد راست و $f(4)$ را جداگانه بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=[-\frac{(4^+)}{2}]+[3(4^+)]=[(-2)^-]+[12^+]=-3+12=9$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=[-\frac{(4^-)}{2}]+[3(4^-)]=[(-2)^+]+[12^-]=-2+11=9$$

$$f(4)=[\frac{-4}{2}]+[3(4)]=[-2]+[12]=10$$

۸۶۱. گزینه۴

راهبرد: اگر $f(x)$ در a پیوسته باشد، در این صورت برای تعیین پیوستگی تابع $y=[f(x)]$ می‌توان گفت:
۱) در صورتی که $f(a)\notin \mathbb{Z}$ (یعنی به ازای عدد حقیقی a تابع پیوستهٔ $f(x)$ در $f(a)$ مقداری غیرصحیح شود)، $[f(x)]$ پیوسته است.
۲) در صورتی که $f(a)\in \mathbb{Z}$ باشد، با محاسبهٔ حد چپ و حد راست و مقدار تابع، نتیجه را بیان می‌کنیم. (ممکن است $[f(x)]$ پیوسته باشد ممکن است پیوسته نباشد.)
اگر تابع $f(x)$ در a پیوسته و $f(a)\in \mathbb{Z}$ باشد، در این صورت حالت‌های زیر رخ می‌دهد:
الف) اگر $f(x)$ در $x=a$ نقطهٔ Min باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته است.**
ب) اگر $f(x)$ در $x=a$ نقطهٔ Max باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a حد دارد ولی **پیوسته نمی‌باشد.**
پ) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=a$ افزایشی باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته نمی‌باشد**، فقط **پیوسته راست** است.
ت) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=a$ کاهشی باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته نمی‌باشد**، فقط **پیوسته چپ** است.

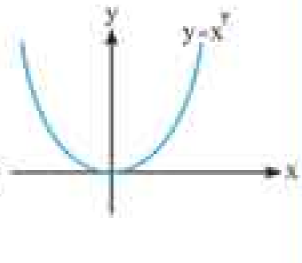
تابع $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=[|x|]$ هر یک در صفر پیوسته است، زیرا:
گزینهٔ «۱»:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[x^2]=[(0^+)^2]=[0^+]=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[x^2]=[(0^-)^2]=[0^+]=0\\ f(0)=[0^2]=0\end{cases}$$

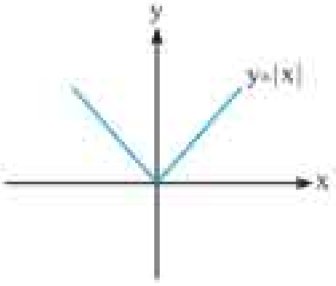
گزینهٔ «۲»:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=[|0^+|]=[0^+]=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=[|0^-|]=[0^+]=0\\ g(0)=[0]=0\end{cases}$$

در رابطه با گزینهٔ «۱» و «۲» با توجه به **راهبرد** باید اشاره کنیم که نمودار



و



در نقطهٔ $x=0$ تابع مینیمم دارد، پس $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=[|x|]$ در $x=0$ پیوسته هستند.
گزینهٔ «۳»: با توجه به این که تابع $h(x)=[x+0/5]$ به ازای $x=0$ درون براکت غیرصحیح می‌شود، لذا تابع قطعاً در $x=0$ پیوسته است.
گزینهٔ «۴»:

$$\lim_{x\to 0^+} p(x)=[0^+-1]=[-1^+]=-1$$
$$\lim_{x\to 0^-} p(x)=[0^--1]=[-1^-]=-2$$
$$p(0)=-1$$

بنابراین $p(x)$ در $x=0$ ناپیوسته است.

۸۶۲. گزینه۲

$$|x|=3\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=-3\end{cases}$$

روش اول باید پیوستگی تابع را در نقاط مذکور بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0\times[\frac{3}{3}^+]=0(1)=0\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0\times[\frac{3}{3}^-]=0(0)=0\\ f(3)=0\times[\frac{3}{3}]=0\end{cases}$$

$f(x)$ در $x=3$ پیوسته است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=0\times[\frac{-3}{3}^+]=0\times[-1^+]=0\\ \lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x)=0\times[\frac{-3}{3}^-]=0\times[-1^-]=0\\ f(-3)=0\times[-\frac{3}{3}]=0\times(-1)=0\end{cases}$$

$f(x)$ در $x=-3$ پیوسته است.

راهبرد:
پیوستگی به کمک عامل صفرکننده: در تابع پیوستهٔ $f(x)$ که $f(a)=0$ است، اگر $g(x)$ در همسایگی a بامعنا باشد، در این صورت تابع $(f\times g)(x)$ نیز در $x=a$ پیوسته است.

روش دوم در تابع فوق، کاملاً واضح است که تابع (x^2-9) به ازای $x=3$ و $x=-3$ صفر می‌شود، پس $f(x)$ در آن نقاط پیوسته است.

۸۶۳. گزینه۳ روش اول به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ تابع $-\sin x$ مقدار صحیح (-1) را تولید می‌کند، پس باید حد چپ و راست محاسبه شود.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=[-(\sin\frac{\pi}{2}^+)]=[-(1^-)]=[-1^+]=-1\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=[-(\sin\frac{\pi}{2}^-)]=[-(1^-)]=[-1^+]=-1\\ f(\frac{\pi}{2})=[-\sin\frac{\pi}{2}]=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$
$$g(3)=6$$

پس تابع g در $x=3$ پیوسته است.

تذکر: برای پیوسته بودن تابع f در نقطهٔ a باید شرایط زیر برقرار باشد:
الف) تابع f در a تعریف شده باشد.
ب) حد تابع f در a موجود باشد.
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

۸۶۰. گزینه ۳ چون تابع $f(x)$ شامل جزء صحیح است، به ازای $x=4$ درون براکت عددی صحیح می‌شود، پس برای بررسی پیوستگی باید حد چپ و حد راست و $f(4)$ را جداگانه بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=[-\frac{(4^+)}{2}]+[3(4^+)]=[(-2)^-]+[12^+]=-3+12=9$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=[-\frac{(4^-)}{2}]+[3(4^-)]=[(-2)^+]+[12^-]=-2+11=9$$
$$f(4)=[\frac{-4}{2}]+[3(4)]=[-2]+[12]=10$$

۸۶۱. گزینه ۴

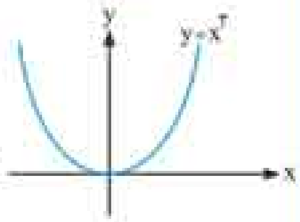
راهبرد: اگر $f(x)$ در a پیوسته باشد، در این صورت برای تعیین پیوستگی تابع $y=[f(x)]$ می‌توان گفت:
۱) در صورتی که $f(a)\notin\mathbb{Z}$ (یعنی به ازای عدد حقیقی a تابع پیوستهٔ $f(x)$ در $f(a)$ مقداری غیرصحیح شود)، $[f(x)]$ پیوسته است.
۲) در صورتی که $f(a)\in\mathbb{Z}$ باشد، با محاسبهٔ حد چپ و حد راست و مقدار تابع، نتیجه را بیان می‌کنیم. (ممکن است $[f(x)]$ پیوسته باشد ممکن است پیوسته نباشد.)
اگر تابع $f(x)$ در a پیوسته و $f(a)\in\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت حالت‌های زیر رخ می‌دهد:
الف) اگر $f(x)$ در $x=a$ نقطهٔ Min باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته است**.
ب) اگر $f(x)$ در $x=a$ نقطهٔ Max باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a حد دارد ولی **پیوسته نمی‌باشد**.
پ) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=a$ افزایشی باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته نمی‌باشد**، فقط **پیوسته راست** است.
ت) اگر $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=a$ کاهشی باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در a **پیوسته نمی‌باشد**، فقط **پیوسته چپ** است.

تابع $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=[|x|]$ هر یک در صفر پیوسته است، زیرا:

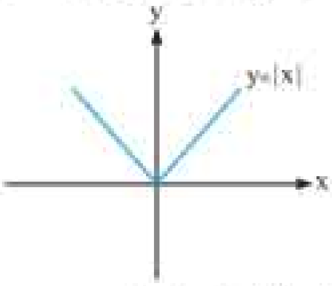
گزینهٔ «۱»:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[x^2]=[(0^+)^2]=[0^+]=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}[x^2]=[(0^-)^2]=[0^+]=0$$
$$f(0)=[0^2]=0$$

گزینهٔ «۲»:
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=[|0^+|]=[0^+]=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=[|0^-|]=[0^+]=0$$
$$g(0)=[0]=0$$

در رابطه با **گزینهٔ «۱»** و **«۲»** با توجه به **راهبرد** باید اشاره کنیم که نمودار



و



در نقطهٔ $x=0$ تابع مینیمم دارد، پس $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=[|x|]$ در $x=0$ پیوسته هستند.

گزینهٔ «۳»: با توجه به این که تابع $h(x)=[x+0/5]$ به ازای $x=0$ درون براکت غیرصحیح می‌شود، لذا تابع قطعاً در $x=0$ پیوسته است.

گزینهٔ «۴»:
$$\lim_{x\to 0^+} p(x)=[0^+-1]=[-1^+]=-1$$
$$\lim_{x\to 0^-} p(x)=[0^--1]=[-1^-]=-2$$
$$p(0)=-1$$

بنابراین $p(x)$ در $x=0$ ناپیوسته است.

۸۶۲. گزینه ۲

$$|x|=3\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}$$

روش اول باید پیوستگی تابع را در نقاط مذکور بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 3^+} f(x)=0\times[\frac{3^+}{3}]=0(1)=0\\\lim_{x\to 3^-} f(x)=0\times[\frac{3^-}{3}]=0(0)=0\\f(3)=0\times[\frac{3}{3}]=0\end{cases}$$

$f(x)$ در $x=3$ پیوسته است.

$$\begin{cases}\lim_{x\to (-3)^+} f(x)=0\times[\frac{-3^+}{3}]=0\times[-1^+]=0\\\lim_{x\to (-3)^-} f(x)=0\times[\frac{-3^-}{3}]=0\times[-1^-]=0\\f(-3)=0\times[-\frac{3}{3}]=0\times(-1)=0\end{cases}$$

$f(x)$ در $x=-3$ پیوسته است.

راهبرد:
پیوستگی به کمک عامل صفرکننده: در تابع پیوستهٔ $f(x)$ که $f(a)=0$ است، اگر $g(x)$ در همسایگی a بامعنا باشد، در این صورت تابع $(f\times g)(x)$ نیز در $x=a$ پیوسته است.

روش دوم در تابع فوق، کاملاً واضح است که تابع (x^2-9) به ازای $x=3$ و $x=-3$ صفر می‌شود، پس $f(x)$ در آن نقاط پیوسته است.

۸۶۳. گزینه ۳ **روش اول** به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ تابع $-\sin x$ مقدار صحیح (-1) را تولید می‌کند، پس باید حد چپ و راست محاسبه شود.

$$\begin{cases}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=[-(\sin\frac{\pi}{2}^+)]=[-(1^-)]=[-1^+]=-1\\\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=[-(\sin\frac{\pi}{2}^-)]=[-(1^-)]=[-1^+]=-1\\f(\frac{\pi}{2})=[-\sin\frac{\pi}{2}]=-1\end{cases}$$