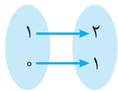
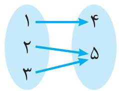
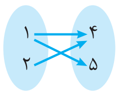
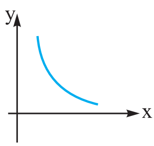
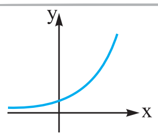
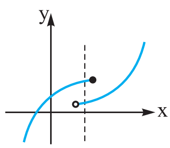
فهرست

تابع یک ورودی و یک خروجی دارد. به هر ورودی، یک خروجی منحصربه‌فرد نسبت می‌دهد. تابع را با زوج‌های مرتب، مفهوم، نمودار پیکانی، نمودار ون یا ضابطه می‌توانیم نشان بدهیم. (به این‌ها می‌گوییم بازنمایی‌های تابع)

ورودی → $\boxed{\text{تابع}}$ → خروجی

اگر تابع f به ورودی $x = a$، خروجی $y = b$ را نسبت دهد، می‌نویسیم: $f(a) = b$

نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
مفهوم تابع	به هر ورودی یک خروجی نسبت دهد.	رابطه‌ای که به هر فرد سن او را نسبت می‌دهد، تابع است. رابطه‌ای که به هر کس دوست او را نسبت دهد، تابع نیست.
نمودار پیکانی 	از هر عضو مجموعهٔ اول فقط یک پیکان خارج شود.	 ✓  ✗
نمودار مختصاتی 	هر خط عمودی (موازی محور y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.	 ✓  ✗
مجموعهٔ زوج‌های مرتب $f = \{(۱,۲),(۲,۳)\}$	در زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول متمایز باشند. اگر xها برابر بودند، yها برابر باشند.	$\{(-۱,۱),(۱,۲)\}$ ✓ $\{(-۱,۱),(۱,۲),(-۱,۴)\}$ ✗
ضابطهٔ $y = f(x)$	به هر x فقط یک y نسبت دهد، معمولاً ضابطه‌هایی که $\|y\|$ و $y^۲$ و $[y]$ و $\sin y$ هستند، تابع نیستند.	$y^۳ = x$ ✓ $y^۲ = x$ ✗

؟ $f=\{(۱,۲),(۱,۳),(-۱,۰),(۱,۰),(۴,۱),(-۱,۲)\}$ **با حذف حداقل چند عضو تابع می‌شود؟**

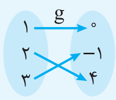
۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

گزینهٔ «۱» سه‌تا زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱ داریم که باید حداقل ۲ تا از آن‌ها را حذف کرد. دوتا زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱− هم داریم که باید حداقل یکی از آن‌ها حذف شود، پس حداقل حذف ۳ زوج لازم است.

اشاره حذف این ۳ زوج مرتب، به ۶ طریق امکان دارد. (بگویید چرا؟)

؟ تابع‌های f و g به صورت زیر داده شده‌اند:



x	۰	۱	−۱	۲
$f(x)$	۳	۲	۵	۰

مقدار $f(g(۳))-g(f(۱))$ **کدام است؟**

۱) ۳−   ۲) ۳

۳) ۱   ۴) ۱−

گزینهٔ «۳» $g(۳)$ می‌شود ۱−. پس $f(g(۳))$ می‌شود $f(-۱)$ که با توجه به جدول، برابر ۵ است. $f(۱)$ می‌شود ۲ و طبق نمودار پیکانی g، مقدار $g(۲)$ برابر ۴ است. پس داریم:

$$f(g(۳))-g(f(۱))=f(-۱)-g(۲)=۵-۴=۱$$

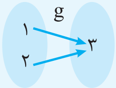
دامنه و برد تابع در بازنمایی‌های مختلف

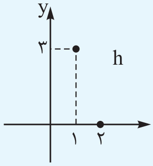
دامنه، مجموعهٔ ورودی‌ها و برد، مجموعهٔ خروجی‌های تابع است.

نمایش	دامنه	برد
زوج‌های مرتب	مجموعهٔ مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم
پیکانی	کل مجموعهٔ اول (مبدأ فلش‌ها)	مقصد فلش‌ها (ممکن است کل مجموعهٔ دوم نباشد.)
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور x	تصویر نمودار روی محور y
ضابطه	مجموعهٔ xهای مجاز (مخرج صفر نشود.)، (زیر رادیکال (با فرجهٔ زوج) منفی نشود.)، (جلوی لگاریتم معنی‌دار باشد.)	مجموعهٔ yهایی که به دست می‌آیند.

؟ دامنهٔ کدام تابع با بقیه فرق دارد؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۴)\}$

۲) 

۳) 

۴) $k(x)=\dfrac{x-۲}{x-۱}$

گزینهٔ «۴» در f مؤلفه‌های اول ۱ و ۲ هستند؛ در g مبدأ فلش‌ها ۲ و ۱ هستند؛ در h تصویر نمودار روی محور x، طول‌های ۱ و ۲ را می‌دهد؛ اما در k، می‌توانیم به x هر عددی به‌جز ۱ را بدهیم پس دامنهٔ این تابع می‌شود $\mathbb{R}-\{۱\}$.

اشاره همیشه تعداد اعضای دامنه بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد است. مثلاً تابع با دامنهٔ ۳ عضوی و برد ۵ عضوی وجود ندارد.

؟ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,a^۲-a),(a,۴)\}$ تابع باشد. مجموع اعضای برد آن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

گزینهٔ «۲» دوتا زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,a^۲-a)$ داریم؛ پس $a^۲-a=۲$ و در نتیجه:

$a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow a=-۱$ یا ۲

به ازای $a=-۱$ داریم: $f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,۲),(-۱,۴)\}$

که تابع نیست (-۱ به دو عدد نظیر شده است).

به ازای $a=۲$ داریم:

$f=\{(۱,۲),(۲,b),(-۱,۳),(۱,۲),(۲,۴)\}$

حالا به خاطر $(۲,b)$ و $(۲,۴)$ باید $b=۴$ باشد. برد تابع می‌شود: $R=\{۲,۴,۳\}$

و جمع اعضای برد می‌شود: $۲+۳+۴=۹$

تابع خطی

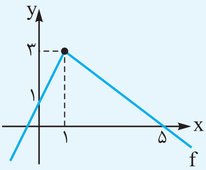
$f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. (دقت کنید که خط عمودی به معادلهٔ $x=k$ تابع نیست.)

اگر $a=۰$ باشد، خط افقی $y=b$ را تابع ثابت می‌نامیم.

اگر $f(x)=x$ باشد، تابع را همانی می‌نامیم.

اشاره در جدولی از مقادیر x و y در تابع خطی نسبت $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ در تمام نقطه‌ها ثابت و برابر شیب (a) است.

؟ در تابع به شکل روبه‌رو، مقدار $f(۲)-f(-۱)$ کدام است؟



۱) ۱/۲۵

۲) ۲/۲۵

۳) ۳/۲۵

۴) ۴/۲۵

گزینهٔ «۳» برای نوشتن ضابطهٔ هر خط، باید ۲ نقطه از آن را داشته باشیم. تابع f از دو قسمت خطی ساخته شده:

الف) $(۱,۳),(۰,۱) \Rightarrow \text{شیب} = \dfrac{۳-۱}{۱-۰} = ۲ \xrightarrow{(۰,۱)} y = ۲x+۱$

ب) $(۱,۳),(۵,۰) \Rightarrow \text{شیب} = \dfrac{۰-۳}{۵-۱} = -\dfrac{۳}{۴} \xrightarrow{(۵,۰)} y-۰ = -\dfrac{۳}{۴}(x-۵)$

پس ضابطهٔ f به صورت قطعه‌ای زیر است.

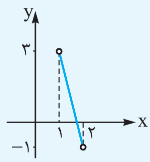
$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۱ \\ -\dfrac{۳}{۴}(x-۵) & x\geq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱ \\ f(۲)=-\dfrac{۳}{۴}(۲-۵)=\dfrac{۹}{۴}=۲/۲۵ \end{cases}$$

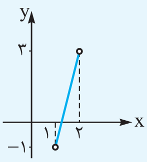
و اختلاف این‌ها می‌شود ۳/۲۵.

؟ دامنهٔ یک تابع خطی $(۱,۲)$ و برد آن $(-۱,۳)$ است. چند تابع با این ویژگی وجود دارد؟

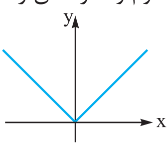
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

گزینهٔ «۲» نمودارها را ببینید:

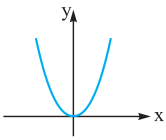




اشاره علاوه بر تابع خطی، نمودار تابع‌های درجه‌دوم و قدرمطلق را هم بلدیم:



$y=|x|$

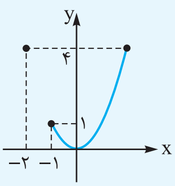


$y=x^۲$

؟ اگر دامنهٔ سهمی $f(x)=x^۲$ به $\{-۲\}\cup[-۱,۲]$ محدود شود، برد آن کدام است؟

۱) $[۱,۴]$ ۲) $[۰,۴]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[-۴,۴]$

گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید:



؟ یک تابع درجه‌دوم از نقاط $(۱,۲)$، $(-۱,۰)$ و $(۳,-۴)$ می‌گذرد. مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $۲/۷۵$ ۲) $۲/۵$ ۳) $۲/۲۵$ ۴) ۲

گزینهٔ «۳» اگر تابع را به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\xrightarrow{(۱,۲)} f(۱)=۲ \Rightarrow ۲=a+b+c$$

$$\xrightarrow{(-۱,۰)} f(-۱)=۰ \Rightarrow ۰=a-b+c$$

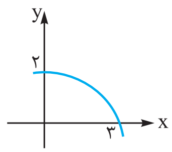
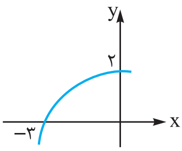
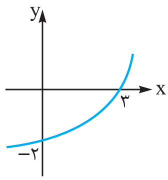
$$\xrightarrow{(۳,-۴)} f(۳)=-۴ \Rightarrow -۴=۹a+۳b+c$$

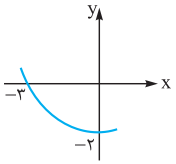
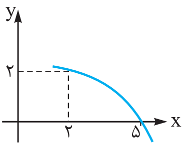
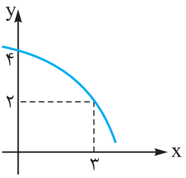
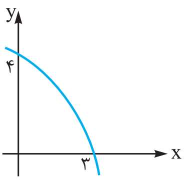
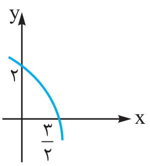
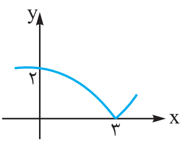
حالا هر معادله را منهای بالایی‌اش می‌کنیم:

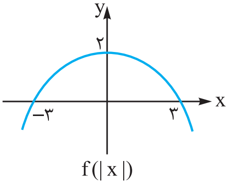
$$\left.\begin{array}{l} -۴=۸a+۴b \xrightarrow{\div۴} ۲a+b=-۱ \\ -۲=-۲b \Rightarrow b=+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a=-۱ \xrightarrow{\text{در اولی}} c=۲$$

پس معادلهٔ سهمی $y=-x^{۲}+x+۲$ است و داریم: $f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۲=۲/۲۵$

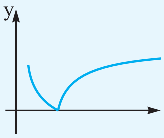
انتقال نمودارها و رسم نمودارهای وابسته

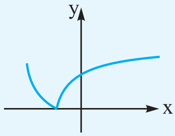
تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=f(x)$	نمودار تابع f	 $f(x)$
$y=f(-x)$	قرینه نسبت به محور yها	 $f(-x)$
$y=-f(x)$	قرینه نسبت به محور xها	 $-f(x)$

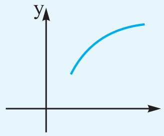
تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=-f(-x)$	قرینه نسبت به مبدأ	 $-f(-x)$
$y=f(x-a)$ $(a>۰)$	انتقال a واحد در راستای محور xها	 $f(x-۲)$
$y=f(x)+b$ $(b>۰)$	انتقال b واحد در راستای محور yها	 $f(x)+۲$
$y=kf(x)$	عرض نقاط نمودار k برابر می‌شوند.	 $۲f(x)$
$y=f(kx)$	طول نقاط نمودار در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شوند.	 $f(۲x)$
$y=\|f(x)\|$	قسمت زیر محور xها نسبت به آن قرینه می‌شود.	 $\|f(x)\|$

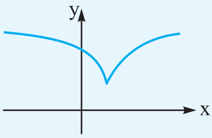
تابع	روش رسم از روی نمودار f	نمونه
$y=f(\|x\|)$	سمت چپ محور xها را حذف و سمت راست را به چپ آینه می‌کنیم.	

اگر $f(x)=\sqrt{x-1}-2$، نمودار $y=|f(x)|$ به کدام شکل است؟

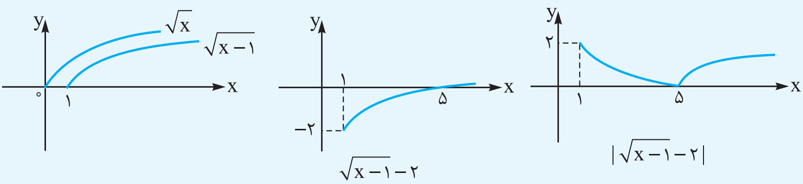
۱) 

۲) 

۳) 

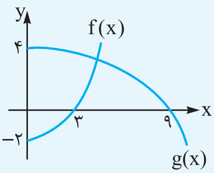
۴) 

گزینهٔ «۱» مراحل را ببینید:



ابتدا یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین و سپس به خاطر قدرمطلق، قسمت زیر محور افقی به بالا می‌آید.

در شکل زیر نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ رسم شده است. ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد



۱) $2f(3x)$

۲) $-2f(3x)$

۳) $2f(\frac{x}{3})$

۴) $-2f(\frac{x}{3})$

گزینهٔ «۴» عرض‌ها در ۲- ضرب شده‌اند و طول‌ها ۳ برابر شده‌اند؛ پس $-2f(\frac{x}{3})$ مناسب است.

تعیین دامنهٔ توابع گویا، گنگ و لگاریتمی

توابع گویا	توابع گنگ	توابع لگاریتمی
در تابع $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ مخرج نباید صفر شود. پس دامنه به صورت $\{x \mid Q(x)\neq ۰\}$ یا $\mathbb{R}-\{x \mid Q(x)=۰\}$ نوشته می‌شود؛ یعنی: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	در تابع $f(x)=\sqrt{P(x)}$ زیر رادیکال نباید منفی شود. پس دامنه به صورت $\{x \mid P(x)\geq ۰\}$ است. دقت کنید که ریشه‌های مرتبهٔ فرد به شکل $\sqrt[۲n+۱]{P(x)}$ شرطی برای دامنه ندارند.	در تابع زیر: $f(x)=\log_{Q(x)}P(x)$ دامنه از اشتراک سه شرط به دست می‌آید: $P(x)>۰$ ، $Q(x)>۰$ ، $Q(x)\neq ۱$
مثلاً دامنهٔ $y=\frac{x}{x-۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ و دامنهٔ $y=\frac{\frac{۱}{x-۲}}{\frac{۱}{x}-۱}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$ است.	پس مثلاً دامنهٔ $f(x)=\sqrt{x-۱}$ به صورت $x\geq ۱$ یا $[۱,+\infty)$ است. دامنهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۳-x}}$ به صورت $[۰,۳)$ است.	پس اگر مبنای لگاریتم عدد b باشد، فقط شرط $P(x)>۰$ را داریم؛ بنابراین دامنهٔ تابع زیر $f(x)=\log_۳(۲x-۵)$ به صورت $x>\frac{۵}{۲}$ است.

؟ اگر دامنهٔ $f(x)=\frac{x-۲}{۲x^۲+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $-۰/۲۵$ ۳) $-۰/۷۵$ ۴) نشدنی

گزینهٔ «۲» حتماً ۲ و ۳ ریشه‌های مخرج‌اند که از $\mathbb{R}$ حذف شده‌اند. پس ریشه‌های $۲x^۲+ax+b$، $x_۱=۲$ و $x_۲=۳$ هستند و داریم:

راه‌حل اول

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۲)(x-۳)=۲(x^۲-۵x+۶)$$

پس:

$$f(۱)=\frac{۱-۲}{۲(۱-۵+۶)}=\frac{-۱}{۴}=-۰/۲۵$$

راه‌حل دوم

$$S=x_۱+x_۲ \Rightarrow -\frac{a}{۲}=۲+۳ \Rightarrow a=-۱۰$$

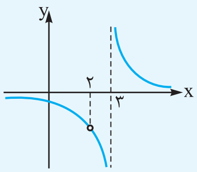
$$P=x_۱x_۲ \Rightarrow \frac{b}{۲}=۲\times۳ \Rightarrow b=۱۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-۲}{۲x^۲-۱۰x+۱۲} \Rightarrow f(۱)=-\frac{۱}{۴}$$

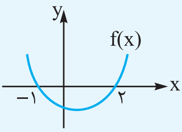
اشاره این‌که $x=۲$ هم صورت و هم مخرج را صفر می‌کند، نگرانتان نکند! قبل از تعیین دامنه حق نداریم تابع را ساده کنیم.

نمودار این تابع را هم ببینید:

$$f(x)=\frac{۱}{۲(x-۳)}\,(x\neq ۲)$$



؟ شکل روبه‌رو نمودار $y=f(x)$ است. دامنهٔ $y=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۱)\cup[۰,۲)$
۲) $[-۱,۰]\cup[۲,+\infty)$
۳) $(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,۲]$

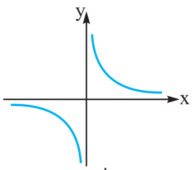
= گزینهٔ «۳» تعیین علامت را ببینید:

		-۱		۰		۲	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{x}{f(x)}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$

$$(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$$

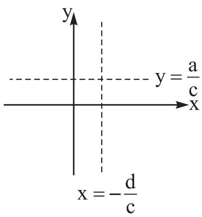
رسم نمودار تابع‌های $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

این تابع‌ها هم‌خانوادهٔ $y=\frac{۱}{x}$ هستند. نمودار خود $y=\frac{۱}{x}$ را بلدید:



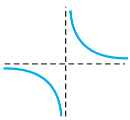
$y=\frac{۱}{x}$

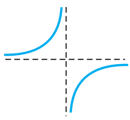
$$D=R=\mathbb{R}-\{۰\}$$



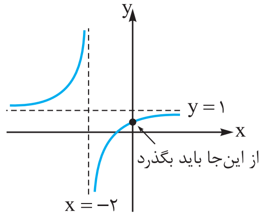
در حالت کلی در $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، دامنه، $\mathbb{R}-\{\text{ریشهٔ مخرج}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و برد برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است. مثلاً در $y=\frac{۲x-۱}{۳x+۵}$ دامنه $\mathbb{R}-\{-\frac{۵}{۳}\}$ و برد $\mathbb{R}-\{\frac{۲}{۳}\}$ است. در دستگاه مختصات دو خط $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به صورت خط‌چین می‌کشیم.

نمودار تابع باید در این شکل، شبیه $\frac{۱}{x}$ یا قرینهٔ آن رسم شود:



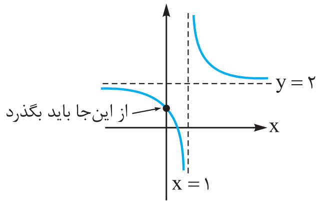


برای انتخاب شکل می‌توانیم به محل برخورد با محور yها (x را مساوی صفر قرار دهیم) یا علامت مشتق تابع دقت کنیم.



$y=\frac{x+۱}{x+۲}$

$y'=\frac{۱}{(x+۲)^۲}\Rightarrow$ مشتق مثبت است. $f(۰)=\frac{۱}{۲}$



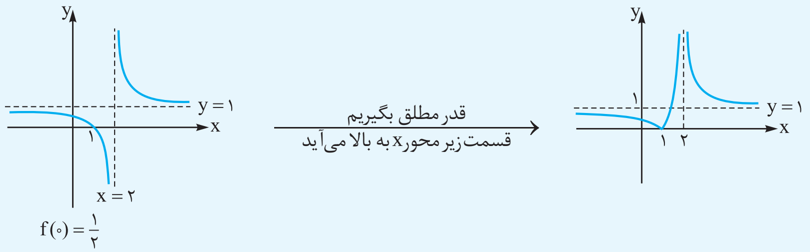
$y=\frac{۲x-۱}{x-۱}$

$y'=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow$ مشتق منفی است. $f(۰)=۱$

؟ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left|\frac{x-۱}{x-۲}\right|$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(۲,+\infty)$

گزینهٔ «۲» نمودار را ببینید. ریشهٔ مخرج $x=۲$ و نسبت $\frac{a}{c}$ برابر $y=۱$ است؛ پس:



حالا با توجه به شکل می‌گوییم f در فاصلهٔ $(۱,۲)$ صعودی است.

اعمال جبری روی توابع

با دو تابع f و g می‌توانیم تابع‌های $f+g$، $f-g$، $f.g$، $\frac{f}{g}$ و ... را بسازیم. این تابع‌ها در دامنهٔ مشترک f و g معنی دارند، البته در مورد تقسیم نباید مخرج صفر شود.

؟ اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=\log(۳-x)$، دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) $(۲,۳)$ ۲) $[۲,۳)$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۳)$

گزینهٔ «۱» قرار شد دامنهٔ مشترک را در نظر بگیریم و مخرج کسر صفر نباشد:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-۲}\Rightarrow x\geq ۲\\ \log(۳-x)\Rightarrow x<۳\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مشترک}} ۲\leq x<۳ \xrightarrow{f\neq ۰} ۲<x<۳$$

؟ اگر $f(x)=\begin{Bmatrix}(۱,۲),(-۱,۱)\\(۰,۳),(۲,-۱)\end{Bmatrix}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$، دامنهٔ تابع $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ شامل چند عضو است؟

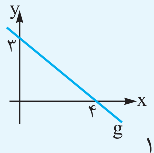
۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

گزینهٔ «۱» خب باید دامنهٔ f را داشته باشیم، دامنهٔ g را هم داشته باشیم (تا این‌جا یعنی دامنهٔ مشترک f و g) و بتوانیم $\sqrt{f}$ را بر g تقسیم کنیم. (پس $f\geq ۰$ باشد و g صفر نشود.) دامنهٔ f شامل $۲, ۰, ۱, -۱$ است، اما دامنهٔ g، شامل $x=۱$ نیست.

پس دامنهٔ مشترک می‌شود $۲, ۰, -۱$ اما در $x=۲$ مقدار f منفی است و در $x=-۱$ مقدار g صفر است، پس فقط برای $x=۰$ می‌توان $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ را ساخت. $\dfrac{\sqrt{f}}{g}=\{۰,(\dfrac{\sqrt{۳}}{-۱})\}$

اشاره فهمیدید چه‌کار کردیم؟ برای ساختن $\dfrac{\sqrt{f}}{g}$ باید در دامنهٔ مشترک، مقدار $\sqrt{f}$ را بر g تقسیم کنیم. یعنی عمل جبری گفته‌شده را در دامنهٔ مشترک، روی yها انجام دهیم.

؟ اگر $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۱,۲),(-۱,۰),(۴,۱)\}$ و g تابع خطی به شکل مقابل باشد، مقدار $(\dfrac{f+g}{۲f-g})(۱)$ کدام است؟



۱) $\dfrac{۱۳}{۵}$ ‏ ۲) $\dfrac{۱۳}{۷}$ ‏ ۳) $\dfrac{۱۷}{۵}$ ‏ ۴) $\dfrac{۱۷}{۷}$

گزینهٔ «۴» ببینید:

$$h(۱)=\frac{f+g}{۲f-g}(۱)=\frac{f(۱)+g(۱)}{۲f(۱)-g(۱)}\xrightarrow[f(۱)=۲]{(۱,۲)\in f}\frac{۲+g(۱)}{۴-g(۱)}$$

$g(۱)$ را هم می‌توانیم حساب کنیم. معادلهٔ خط g را می‌نویسیم:

$$\xrightarrow[(۴,۰)]{(۰,۳)} y=-\frac{۳}{۴}x+۳\xrightarrow{x=۱} g(۱)=-\frac{۳}{۴}+۳=\frac{۹}{۴}$$

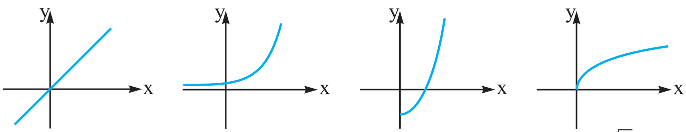
پس:

$$h(۱)=\frac{۲+\frac{۹}{۴}}{۴-\frac{۹}{۴}}=\frac{\frac{۱۷}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱۷}{۷}$$

توابع صعودی و نزولی

وقتی x افزایش می‌یابد، یعنی از چپ به راست روی نمودار حرکت کنیم، ممکن است y زیاد شود، کم شود یا ثابت بماند. این حالت‌ها را داریم:

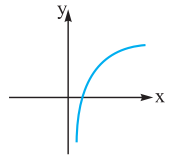
الف اگر در یک بازه با افزایش x، مقدار y هم افزایش یابد، می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً صعودی است. ببینید:

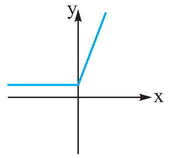


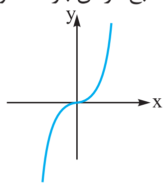
$y=x$ ‏ $y=۲^x$ ‏ $y=x^۲-۱$, $x\geq ۰$ ‏ $y=\sqrt{x}$

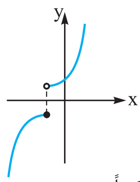
به زبان ریاضی: $x_۲>x_۱ \Rightarrow y_۲>y_۱$

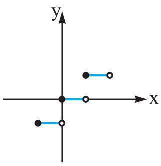
ب اگر در یک بازه، با افزایش x مقدار y زیاد شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع در آن بازه، صعودی است.


$y=\log x$
اکیداً صعودی و صعودی


$y=x+|x|+1$
صعودی


$y=x|x|$
اکیداً صعودی است، صعودی هم هست.

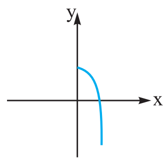

اکیداً صعودی و صعودی

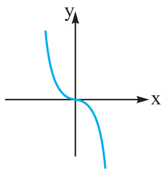

$y=[x]$
صعودی

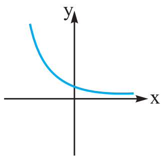
اشاره شرط ریاضی‌اش می‌شود: $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$

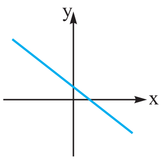
دقت می‌کنید که هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست.

پ اگر با افزایش x، مقدار y کم شود، تابع اکیداً نزولی است؛ یعنی $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$. این‌ها را ببینید:


$y=3-x^2$
$x \geq 0$


$y=-x^3$

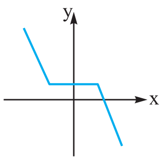

$y=(\frac{1}{2})^x$


$y=-x+1$

ت اگر با افزایش x مقدار y کم شود یا ثابت بماند، می‌گوییم تابع نزولی است، پس:

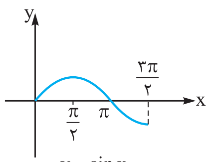
$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$$

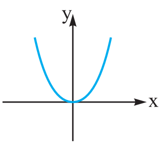
مثلاً این شکلی:



ث تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

ج اگر در یک بازه، هم اکیداً صعودی و هم اکیداً نزولی ببینیم، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا نیست.


$y=\sin x$


$y=x^2$

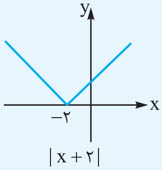
در $(0,\frac{\pi}{2})$ صعودی و در $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ نزولی و در $(0,\frac{3\pi}{2})$ غیریکنوا

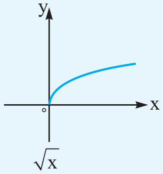
قبل از صفر: نزولی، بعد از صفر: صعودی، در $\mathbb{R}$: غیریکنوا

❓ اگر $f(x)=\sqrt{x}+|x+2|$ باشد، کدام درست است؟

۱) f اکیداً نزولی است.
۲) f اکیداً صعودی است.
۳) f ابتدا نزولی و سپس صعودی است.
۴) f ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

گزینهٔ «۲» دو نمودار را ببینید:



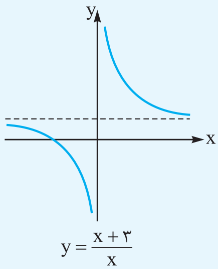


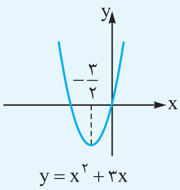
به خاطر شرط دامنهٔ مجموع دو تابع، فقط $x\geq 0$ را داریم که هر دو تابع در این بازه، اکیداً صعودی‌اند. جمع دو تابع اکیداً صعودی نیز همواره اکیداً صعودی است؛ پس f اکیداً صعودی است.

❓ در کدام بازه $y=x^2+3x$ صعودی و $y=\frac{x+3}{x}$ نزولی است؟

۱) $(-1,1)$
۲) $(-2,0)$
۳) $(1,2)$
۴) $(-2,1)$

گزینهٔ «۳» نمودارها را ببینید:





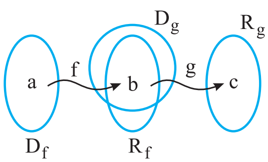
در $(-\infty,0)$ و نیز در $(0,+\infty)$ نزولی است.

رأس سهمی در $x_S=-\frac{3}{2}$ است. در $(-\infty,-\frac{3}{2})$ نزولی و در $(-\frac{3}{2},+\infty)$ صعودی است.

پس بازهٔ انتخابی باید قسمتی از $(-\frac{3}{2},+\infty)$ باشد و شامل $x=0$ نباشد. بین گزینه‌ها ۳ مناسب است.

تابع مرکب

$g(f(x))$ یا $gof(x)$ تابعی است که با عمل پی‌درپی f و g به دست می‌آید. اول $x=a$ را به تابع f می‌دهیم و $b=f(a)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس b (یعنی خروجی f) را به تابع g می‌دهیم و $c=g(b)$ را می‌گیریم.

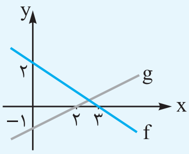


$b=f(a)$

$c=g(b)=g(f(a))$

پس اولاً $x=a$ باید در دامنهٔ تابع f باشد و ثانیاً باید $b=f(a)$ در دامنهٔ تابع g باشد.

اگر f و g به شکل مقابل باشند، مقدار $gof(۲)$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

گزینهٔ «۲» ضابطهٔ f با توجه به دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ به صورت $f(x)=-\frac{۲}{۳}x+۲$ است؛ پس $f(۲)=-\frac{۴}{۳}+۲=\frac{۲}{۳}$ ضابطهٔ g نیز با استفاده از نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,-۱)$ به صورت $g(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$ است؛ پس: $gof(۲)=g(f(۲))=g(\frac{۲}{۳})=\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳})-۱=\frac{۱}{۳}-۱=-\frac{۲}{۳}$

توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند. اگر $(۲,۳)\in fog$ و $(-۱,۲)\in gof$، مقدار ab کدام است؟

$f=\{(-۱,۴),(۲,۱),(۵,۳)\}$

$g=\{(۲,a),(۱,۳),(۴,b)\}$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گزینهٔ «۳» از $(۲,۳)\in fog$ نتیجه می‌گیریم: $x=۲\rightarrow\boxed{g}\rightarrow\boxed{f}\rightarrow ۳$

پس در g باید زوج مرتب $(۲,k)$ باشد و در f باید زوج مرتب $(k,۳)$ ببینیم. پس با نگاهی به f و g داریم: $a=۵$

هم‌چنین $(-۱,۲)$ در gof به ما می‌گوید چنین زنجیره‌ای را داریم: $x=-۱\rightarrow\boxed{f}\rightarrow\boxed{g}\rightarrow ۲$

حالا چون $f(-۱)=۴$ است؛ پس باید $g(۴)=۲$ باشد؛ یعنی $b=۲$ و در نتیجه: $ab=۵\times۲=۱۰$

اگر $f(x)=۲x-۱$ با دامنهٔ $D_f=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ باشد، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع fof کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۵ ۳) -۴۵ ۴) -۱۵

گزینهٔ «۴» با توجه به ضابطهٔ f داریم:

$-۱\xrightarrow{f}-۳\ ,\ ۱\xrightarrow{f}۱\ ,\ ۳\xrightarrow{f}۵$

$۰\xrightarrow{f}-۱\ ,\ ۲\xrightarrow{f}۳$

حالا f را روی خروجی‌ها اثر می‌دهیم:

$-۱\xrightarrow{f}-۳\xrightarrow{f}\times$

$۰\rightarrow-۱\rightarrow-۳$

$۱\rightarrow۱\rightarrow۱$

$۲\rightarrow۳\rightarrow۵$

$۳\rightarrow۵\rightarrow\times$

پس fof به این صورت است: $fof(x)=\{(۰,-۳),(۱,۱),(۲,۵)\}$

که ضرب عناصر بردش $-۳\times۱\times۵$ یعنی -۱۵ است.

اشاره اگر ضابطه‌های f و g را داشته باشیم، برای تشکیل ضابطهٔ fog باید در f به جای xها، g(x) را قرار دهیم. ببینید:

الف) $f(x)=۲x^۲-۱$

$g(x)=\cos x$

$fog(x)=۲(\cos x)^۲-۱=\cos ۲x$

$gof(x)=\cos(۲x^۲-۱)$

ب) $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۱}$

$g(x)=\sqrt{x}$

$fog(x)=f(\sqrt{x})=\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۱}$

$gof(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{x+۱}}$

پ) $f(x)=x^۲-۱$

$g(x)=۲x+۱$

$fog(x)=(۲x+۱)^۲-۱$

$gof(x)=۲(x^۲-۱)+۱$

? اگر $f(x)=\dfrac{x-۱}{۲x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۲}$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\dfrac{x-۱}{۳x}$ ۲) $\dfrac{x-۳}{۳x}$ ۳) $\dfrac{x-۱}{۳x+۴}$ ۴) $\dfrac{x-۳}{۳x+۴}$

= گزینهٔ «۱»

$$fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{۲x+۱}{x+۲}\right)=\frac{\frac{۲x+۱}{x+۲}-۱}{۲\frac{۲x+۱}{x+۲}-۱}$$

$$=\frac{\frac{۲x+۱-(x+۲)}{x+۲}}{\frac{۴x+۲-(x+۲)}{x+۲}}=\frac{\frac{x-۱}{x+۲}}{\frac{۳x}{x+۲}}=\frac{x-۱}{۳x}$$

به x عدد می‌دهیم، مثلاً:

$$\xrightarrow{x=۲} fog(۲)=f(g(۲))$$

$$\xrightarrow{g(۲)=\frac{۵}{۴}} f\left(\frac{۵}{۴}\right)=\frac{\frac{۵}{۴}-۱}{۲(\frac{۵}{۴})-۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۲}-۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

پس گزینه‌ای جواب است که به ازای $x=۲$ بشود $\frac{۱}{۶}$ که فقط در ۱ این‌طور است.

? اگر $f(g(x))=x^۲-۱$ و $g(x)=۲x-۱$ ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\dfrac{(x+۱)(x+۳)}{۴}$ ۲) $\dfrac{(x-۱)(x+۳)}{۴}$ ۳) $\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{۴}$ ۴) $\dfrac{(x+۱)(x-۳)}{۴}$

= گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید:

$$f(۲x-۱)=x^۲-۱$$

اگر $۲x-۱$ را t بگیریم، داریم:

$$۲x-۱=t \Rightarrow x=\frac{t+۱}{۲}$$

$$f(t)=(\frac{t+۱}{۲})^۲-۱=\frac{t^۲+۲t+۱}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}(t^۲+۲t-۳)=\frac{(t-۱)(t+۳)}{۴}$$

پس:

$$f(x)=\frac{(x-۱)(x+۳)}{۴}$$

می‌دانیم:

$$f(۲x-۱)=x^۲-۱$$

با قراردادن $x=۰$ داریم: $f(-۱)=-۱$ و در بین ضابطه‌ها فقط برای ۲ این شرط درست است:

$$f(-۱)=\frac{-۲(۲)}{۴}=-۱$$

؟ اگر $g(x)=۲x+۱$ و $g(f(x))=x^۲-x$ آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

گزینهٔ «۲» سؤال می‌گوید $g(f(x))=۲f(x)+۱=x^۲-x$، پس داریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-x-۱}{۲}\Rightarrow f(۳)=\frac{۹-۳-۱}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

تابع یک‌به‌یک و وارون تابع

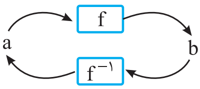
در تابع یک‌به‌یک برای هر ورودی، یک خروجی غیرتکراری داریم. پس مؤلفه‌های اول متمایز و مؤلفه‌های دوم نیز متمایزند. به هر عضو B فقط یک فلش وارد می‌شود (پس تعداد اعضای دامنه و برد برابر است). و هر خط افقی، نمودار را حداکثر یک بار قطع می‌کند.

اشاره هر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی همواره یک‌به‌یک است.

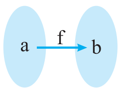
اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، وارون آن تابع را تابع $f^{-۱}$ می‌نامیم.

الف در زوج‌های مرتب باید جای مؤلفه‌ها را عوض کرد، پس اگر در f زوج مرتب (a,b) داریم در $f^{-۱}$ زوج مرتب (b,a) وجود دارد.

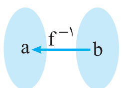
ب در مقادیر تابع اگر $f(a)=b$ باشد، در تابع $f^{-۱}$ می‌نویسیم $f^{-۱}(b)=a$ یعنی جای ورودی و خروجی عوض می‌شود:



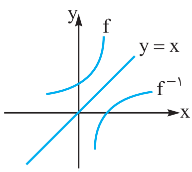
پ در نمودار پیکانی جهت فلش‌ها را عوض می‌کنیم.



پس دامنه و برد جابه‌جا می‌شوند؛ یعنی $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$



ت در نمودار مختصاتی شکل f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم:



ث در ضابطهٔ $y=f(x)$ جای x و y را عوض می‌کنیم. سپس ضابطهٔ جدید را مرتب می‌کنیم. بد نیست در ذهن داشته باشید که:

- وارون تابع خطی (با شیب a)، خطی با شیب $\frac{1}{a}$ است.
- وارون تابع نمایی $y=a^x$ تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ است.
- وارون تابع $y=\sqrt{ax+b}$، نیمی از یک سهمی است.
- وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.
- وقتی تابع را وارون می‌کنیم، گاهی جلوی ضابطهٔ f^{-1} دامنهٔ آن را هم می‌نویسیم. دامنهٔ f^{-1} همان برد f است.

? اگر $f(x)=۳x-۱;۱\le x<۳$، ضابطهٔ f^{-1} کدام است؟

۱) $y=۳x+۱;۱\le x<۳$

۲) $y=\frac{x+۱}{۳};۱\le x<۳$

۳) $y=۳x+۱;۲\le x<۸$

۴) $y=\frac{x+۱}{۳};۲\le x<۸$

گزینهٔ «۴» قرار شد جای x و y را عوض کنیم:

$$y=۳x-۱ \Rightarrow x=۳y-۱ \Rightarrow x+۱=۳y \Rightarrow y=\frac{x+۱}{۳}$$

و برد تابع را به جای دامنه بنویسیم. $f(۱)=۲\,,\,f(۳)=۸ \Rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[۲,۸]$

اشاره چون $f(x)=۳x-۱$ اکیداً صعودی و پیوسته است، برد آن با دامنهٔ (a,b) به صورت $(f(a),f(b))$ است.

? اگر $f=\{(۱,۲),(-۴,۰),(۲,-۴),(-۱,۳)\}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ حاصل $f^{-1}(g^{-1}(۳))$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

گزینهٔ «۳» $g^{-1}(۳)$ یعنی چه عددی به g بدهیم تا ۳ شود؟

$$g^{-1}(۳)=b \Rightarrow g(b)=۳$$

$$\Rightarrow \frac{۲b-۱}{b+۱}=۳ \Rightarrow ۳b+۳=۲b-۱ \Rightarrow b=-۴$$

حالا $f^{-1}(-۴)$ یعنی چه عددی به f بدهیم تا -۴ شود؟ خب با توجه به زوج مرتب $(۲,-۴)$ داریم: $f^{-1}(-۴)=۲$

در بازه‌ای که $f(x)=|2x-4|-x-1$ صعودی است، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=x+3\,;\,x\geq 5$ ۲) $y=x+5\,;\,x\geq 7$

۳) $y=x+5\,;\,x\geq -3$ ۴) $y=x+3\,;\,x\geq 2$

گزینهٔ «۳» برای $x>2$ و $x<2$ به ترتیب داریم:

$$x\geq 2: f(x)=2x-4-x-1 \Rightarrow f(x)=x-5 \ (\text{صعودی})$$

$$x<2: f(x)=-(2x-4)-x-1=-3x+3 \ (\text{نزولی})$$

پس ضابطهٔ $y=x-5$ با دامنهٔ $x\geq 2$ را وارون می‌کنیم:

$$y=x-5 \xrightarrow{\text{وارون}} x=y-5 \Rightarrow y=x+5 \quad \underbrace{(x\geq -3)}_{\text{برد } f(x)}$$

خواص تابع وارون

الف) ترکیب f و f^{-1} همانی است و داریم:

$$f(f^{-1}(x))=x \quad (D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f) \quad , \quad f^{-1}(f(x))=x \quad (D_{f^{-1}of}=D_f)$$

ب) اگر f صعودی باشد، f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد، f^{-1} نیز نزولی است.

پ) اگر f صعودی باشد، f و f^{-1} همدیگر را فقط روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کنند. پس به جای حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ در این حالت، $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

ت) تابع‌های زیر وارون خودشان هستند. $(f=f^{-1})$

$$y=\sqrt[n]{1-x^n}\ ,\ y=-x+b\ ,\ y=\frac{ax+b}{cx-a}$$

تابع $f(x)=x^3+2x-10$ وارون خود را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

گزینهٔ «۲» چون x^3 و $2x-10$ اکیداً صعودی‌اند، مجموع آن‌ها یعنی f نیز اکیداً صعودی است؛ پس به جای حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ کافی است $f(x)=x$ قرار دهیم:

$$x^3+2x-10=x \Rightarrow x^3+x=10 \xrightarrow{\text{جست‌وجو}} x=2 \Rightarrow y=2$$

پس با عرض ۲ متقاطع‌اند.

تابع

۱۴۵- رابطهٔ $\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

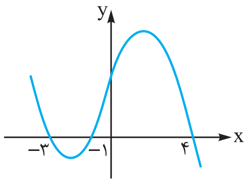
۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۱۴۶- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{x+۱}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۴۷- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است؛ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$



۱۴۸- $f(x)$ یک تابع حقیقی و اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد.

دامنهٔ تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{xf(x)}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

۱۴۹- برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x<۰ \\ -۲ & ۰\le x\le ۲ \\ ۲x-۴ & ۲<x \end{cases}$ برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(-۲,+\infty)$ ۳) $(-۲,+\infty)\cup\{۲\}$ ۴) $(-۱,+\infty)\cup\{-۲\}$

۱۵۰- دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=۲\log x, g(x)=\log x^۲$ ۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}, g(x)=۱$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲, g(x)=x$ ۴) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}, g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

۱۵۱- کدام‌یک از توابع زیر، با تابع $y=\log\dfrac{x-۲}{x}$، برابر است؟ (خارج ۹۷)

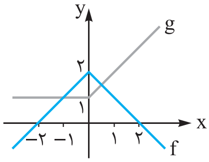
۱) $\log(x-۲)-\log x$ ۲) $\log\dfrac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}$

۳) $\dfrac{۱}{۲}\log(\dfrac{x-۲}{x})^۲$ ۴) $۲\log\sqrt{\dfrac{x-۲}{x}}$

۱۵۲- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۰),(۰,۳)\}$ باشد، برد تابع $\dfrac{f}{g}$ چند عضو دارد؟ (کتاب درسی)

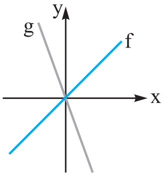
۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

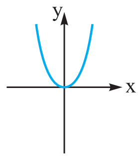
۱۵۳- شکل روبه‌رو نمودار دو تابع f و g است. مقدار $(fog)(۲)$ برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

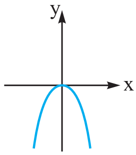


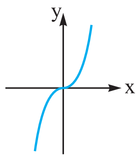
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲-

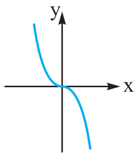
۱۵۴- شکل زیر نمودار دو تابع f و g را نشان می‌دهد. نمودار تابع f.g کدام می‌تواند باشد؟



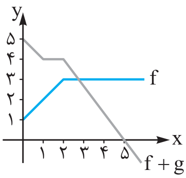
۱)


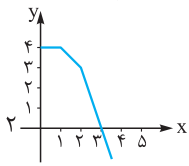
۲)


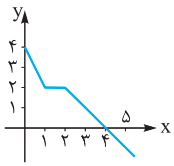
۳)


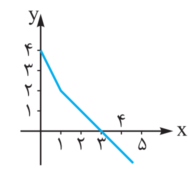
۴)


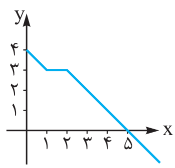
۱۵۵- شکل مقابل نمودار دو تابع f و f + g را نشان می‌دهد. نمودار g به کدام صورت است؟ (کتاب درسی)



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۵۶- از تابع‌های $y=-(x+۱)^۳-۱$ ، $y=\frac{۱}{x}$ ، $y=۲|x|-۱$ و $y=۲^x+۱$ چند تابع اکیداً یکنوا هستند؟ (کتاب درسی)

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

۱۵۷- تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ در کدام بازهٔ زیر نزولی اکید است؟ (کتاب درسی)

۱) $[۰,\pi]$
۲) $(\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$
۳) $(\frac{۵\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴})$
۴) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۴})$

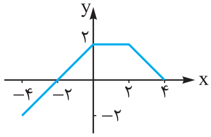
۱۵۸- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۷)

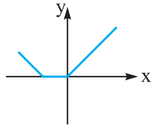
۱) ۲-
۲) ۰/۵
۳) ۱
۴) ۱/۵

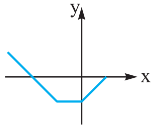
۱۵۹- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟ (سراسری ۹۷)

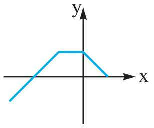
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

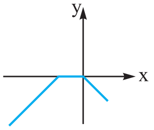
۱۶۰- اگر شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ باشد، نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۶۱- اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۳),(۴,۱),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۴),(۴,۲),(۵,۱)\}$ برد تابع gof چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۲- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ باشد، حاصل $fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۶۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & x>۳ \\ ۲x+۳ & x\le ۳ \end{cases}$ مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ (سراسری ۹۰)

۱۶۴- اگر $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، تابع $(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ چگونه است؟ (خارج ۹۱)

۱) ثابت ۲) همانی ۳) وارون‌پذیر ۴) یک‌به‌یک

۱۶۵- اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^۴ x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ ۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

۱۶۶- در تابع خطی $f(x)$، هرگاه $fof(x)=۴x+۱۲$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۸ ۲) -۱۶ ۳) -۴ ۴) صفر

۱۶۷- اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $f(g(x))=x^۲+x-۲$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (خارج ۹۰)

۱) $x^۲-۱$ ۲) $x^۲+۱$ ۳) $x^۲-۲x$ ۴) $x^۲+۲x$

۱۶۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

۱۶۹- اگر $f(x)=x^۲-۵x-۶$ و $g(x)=x^۲-x$ باشند، معادلهٔ $(fog)(x)=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار *(کتاب درسی)*

۱۷۰- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۴ و $\frac{۱}{۹}$ ۲) ۹ و $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۱۷۱- اگر $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$ *(سراسری ۹۲)*

۱۷۲- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟

۱) -۷، -۱ ۲) -۷، ۱ ۳) ۷، -۱ ۴) ۷، ۱ *(خارج ۹۷)*

۱۷۳- اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$ باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۴- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a))=۵$ باشد، عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ *(سراسری ۹۱)*

۱۷۵- اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۱۷۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+a & x\geq ۰ \\ ۲x+۳a-۴ & x<۰ \end{cases}$ یک تابع وارون‌پذیر باشد ، حدود a کدام است؟

۱) $a\leq ۲$ ۲) $a<۲$ ۳) $a\in\mathbb{R}$ ۴) $a\in\varnothing$

۱۷۷- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x$، اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳$ باشد، آن‌گاه $g(-۱)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & x<۰ \end{cases}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۶)*

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۱۷۹- دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟ *(خارج ۹۰)*

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

۱۸۰- اگر $f(x)=۲x-۵$ و $g(x)=x^۳-۱$ باشد، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(۰)$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷− ۳) ۳− ۴) ۱۲۶− *(کتاب درسی)*

۱۸۱- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ به کدام صورت است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $y=x^۲-۴x+۵;x\le ۲$ ۲) $y=-x^۲+۴x-۵;x\le ۲$

۳) $y=x^۲-۴x+۵;x\ge ۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵;x\ge ۱$

۱۸۲- ضابطهٔ معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$، به کدام صورت است؟ *(خارج ۹۲)*

۱) $y=x\sqrt{|x|};x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|};x\in\mathbb{R}-\{۰\}$

۳) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $y=x|x|;x\in\mathbb{R}$

۱۸۳- تابع معکوس تابع $y=x^۲-۴x$ با شرط $x<۲$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x+۴}$

۳) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x-۴}$ ۴) $f^{-}(x)=۲+\sqrt{x-۴}$

۱۸۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱,−۴− ۲) ۱,۴− ۳) ۱,−۴ ۴) ۱,۴ *(خارج ۹۶)*

۱۸۵- تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۱۸۶- اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳;x\ge ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ *(سراسری ۹۸)*

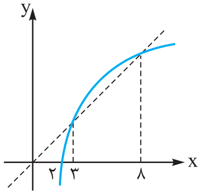
۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۸۷- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۴)*

۱) $(۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$



۱۸۸- دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ *(خارج ۹۶)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۹- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟ *(خارج ۹۸)*

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱۴۵- گزینهٔ «۲» قرارمان این شد که مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب وقتی تابع باشد که دو زوج مرتب متفاوت با عضوهای اول یکسان نداشته باشیم، یعنی اگر دو زوج مرتب xهایشان مساوی باشد، باید yهایشان هم مساوی شوند.

$$\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\} \Rightarrow m^۲=m+۲$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۲) \Rightarrow m=-۱, m=۲$$

حالا رابطه را به ازای $m=-۱$ و $m=۲$ می‌نویسیم.

$m=-۱ \Rightarrow \{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\} \Rightarrow$ تابع هست

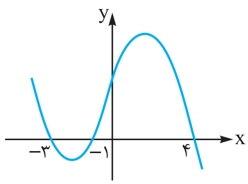
$m=۲ \Rightarrow \{(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\} \Rightarrow$ تابع نیست

۱۴۶- گزینهٔ «۱» می‌دانیم رادیکال با فرجهٔ زوج وقتی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس در تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{x+۱}}$ داریم: $x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱$

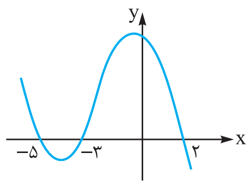
$$۴-\sqrt{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱}\leq ۴ \Rightarrow x+۱\leq ۱۶ \Rightarrow x\leq ۱۵$$

پس دامنهٔ تابع برابر است با بازهٔ $[-۱,۱۵]$ که شامل $۱۷=۱+(-۱)-۱۵$ عدد صحیح است.

۱۴۷- گزینهٔ «۴» می‌دانیم نمودار تابع $y=f(x-۲)$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ به اندازهٔ $(+۲)$ واحد در راستای محور xها به دست می‌آید، پس اول نمودار تابع $y=f(x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y=f(x-۲)$ رسم می‌کنیم.



$y=f(x-۲)$



$y=f(x)$

حالا دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)\geq ۰$ است، پس عبارت $xf(x)$ را با توجه به نمودار تابع $f(x)$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۵	-۳	۰	۲	$+\infty$
$f(x)$	+	۰	−	۰	+	+	۰	−
x	−		−		−	۰	+		+
$xf(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−

حالا با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع برابر است با: $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۱۴۸- گزینهٔ «۴» چون f یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و اکیداً نزولی است و از مبدأ هم می‌گذرد پس جدول تعیین علامت f به صورت

x	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\circ$	$-$

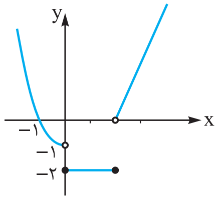
است. حالا چون دامنهٔ تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{xf(x)}}$ برابر جواب نامعادلهٔ $xf(x)>\circ$ است، پس عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\circ$	$-$
x	$-$	$\circ$	$+$
$xf(x)$	$-$	$\circ$	$-$

حالا با توجه به این‌که عبارت $xf(x)$ هرگز مثبت نیست؛ پس دامنهٔ تعریف تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{xf(x)}}$ برابر است با $\varnothing$.

۱۴۹- گزینهٔ «۴» اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x<\circ \\ -۲ & \circ\le x\le ۲ \\ ۲x-۴ & ۲<x \end{cases}$$



حالا چون برد برابر است با مجموعهٔ تغییرات y، پس برد تابع برابر است با: $(-۱,+\infty)\cup\{-۲\}$

۱۵۰- گزینهٔ «۴» اول می‌رویم سراغ دامنه‌ها، اگر دامنه‌ها مساوی بود، تساوی ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $\begin{cases} f(x)=۲\log x & D_f: x>\circ \Rightarrow D_f=(\circ,+\infty) \\ g(x)=\log x^{۲} & D_g: x^{۲}>\circ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\circ\} \end{cases}$ مساوی نیستند.

۲ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{|x|}=\dfrac{|x|}{|x|} & D_f=\mathbb{R}-\{\circ\} \\ g(x)=۱ & D_g=\mathbb{R} \end{cases}$ مساوی نیستند.

۳ $\begin{cases} f(x)=(\sqrt{x})^{۲} & D_f:[\circ,+\infty) \\ g(x)=x & D_g=\mathbb{R} \end{cases}$ مساوی نیستند.

۴ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{|x|} & D_f=\mathbb{R}-\{\circ\} \\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} & D_g=\mathbb{R}-\{\circ\} \end{cases}$

در ۴ دامنه‌ها مساوی‌اند و هر دو تابع f و g با شرط $x>\circ$ و $x<\circ$ به صورت $\begin{cases} ۱ & x>\circ \\ -۱ & x<\circ \end{cases}$ درمی‌آیند؛ پس در ۴ دو تابع f و g با هم مساوی‌اند.

۱۵۱- گزینهٔ «۴» دامنهٔ تابع $y=\log(\frac{x-۲}{x})$ برابر است با:

$$\frac{x-۲}{x}>۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & ۰ & & ۲ & & +\infty \\ \hline & & + & \text{ت} & - & ۰ & + & \end{array} \Rightarrow (-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

پس در گزینه‌ها اول دامنه را بررسی می‌کنیم، اگر مساوی بود، می‌رویم سراغ تساوی ضابطه‌ها:

۱ $\log(x-۲)-\log x$ دامنه: $\begin{cases} x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \\ x>۰ \end{cases} \Rightarrow$ دامنه: $(۲,+\infty) \Rightarrow$ مساوی نیست.

۲ $\log\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}=\log\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} \xrightarrow{x\neq -۲} \log\frac{x-۲}{x}$

$\Rightarrow$ دامنه: $(-\infty,-۲)\cup(-۲,۰)\cup(۲,+\infty) \Rightarrow$ مساوی نیست.

۳ $\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^۲$ دامنه: $(\frac{x-۲}{x})^۲>۰ \Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}-\{۰,۲\} \Rightarrow$ مساوی نیست.

۴ $۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}$ دامنه: $\frac{x-۲}{x}>۰ \Rightarrow$ دامنه: $(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

در ۴ دامنه‌ها مساوی‌اند و چون داریم: $۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}=\log(\sqrt{\frac{x-۲}{x}})^۲=\log\frac{x-۲}{x}$

پس دو تابع با هم مساوی‌اند.

۱۵۲- گزینهٔ «۲» داریم:

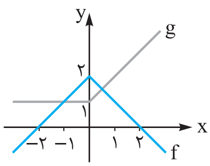
$f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۶)\}$

$g=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۰),(۰,۳)\}$

تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم: (می‌دانیم $\frac{f}{g}$ به ازای xهای مشترک دامنهٔ f و g به دست می‌آید، به شرطی که g مخالف صفر باشد.) $\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۲}{۱}),(۲,\frac{۴}{۲})\}=\{(۱,۲),(۲,۲)\}$

حالا برد $\frac{f}{g}$ برابر است با $\{۲\}$ که یک عضو دارد.

۱۵۳- گزینهٔ «۳» برای پیداکردن $(fog)(۲)$ باید $f(g(۲))$ را پیدا کنیم، پس اول $g(۲)$ را به دست می‌آوریم؛ نمودار تابع g در $x=۲$ خطی است که از نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۲)$ می‌گذرد، پس:



$(۰,۱),(۱,۲) \Rightarrow m=\frac{۲-۱}{۱-۰}=۱ \Rightarrow y=x+۱$

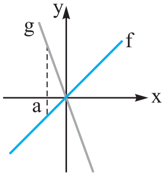
$x=۲ \Rightarrow g(۲)=۲+۱=۳$

پس $(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۳)$، حالا می‌رویم سراغ $f(۳)$، نمودار تابع در نقطهٔ $x=۳$ خطی است که از نقاط $(۰,۲)$ و $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس: $(۰,۲),(۲,۰) \Rightarrow m=\frac{۰-۲}{۲-۰}=-۱ \Rightarrow y=-x+۲$

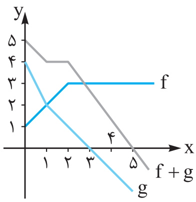
$x=۳ \Rightarrow f(۳)=-۳+۲=-۱$

۱۵۴- گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** دو تابع f و g خطی‌اند (یعنی از درجهٔ اول‌اند) و یکی با شیب مثبت و دیگری با شیب منفی، پس حاصل‌ضرب دو تابع، تابعی به صورت $y = ax^2$ است که در آن a عددی منفی است، پس می‌شود ۲.

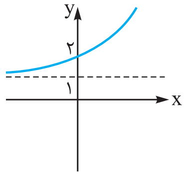
راه‌حل دوم اگر یک نقطهٔ دلخواه مثلاً $x = a$ را در نظر بگیریم، همواره عرض‌های این نقطه روی دو تابع f و g دو عدد غیر هم‌علامت است؛ یعنی یکی منفی و دیگری مثبت (البته به‌جز $x = ۰$)، پس yهای نقاط نمودار f.g باید همواره منفی باشد که از بین گزینه‌ها می‌شود ۲.



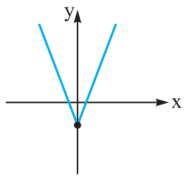
۱۵۵- گزینهٔ «۳» می‌خواهیم از روی نمودار $f+g$ و f، نمودار g را رسم کنیم و چون $g = (f+g) - f$؛ پس کافی است مختصات نقاطی را که نمودارهای $f+g$ و f در آن تغییر ضابطه می‌دهند (به اصطلاح خودمانی می‌شکنند) پیدا کنیم و عرض نقاطشان را به دست آوریم:



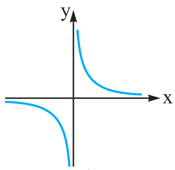
۱۵۶- گزینهٔ «۲» کافی است نمودار هر کدام از تابع‌ها را رسم کنیم:



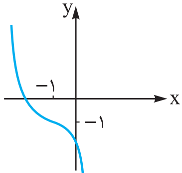
$y = ۲^x + ۱$



$y = ۲|x| - ۱$



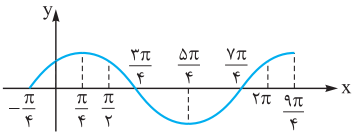
$y = \frac{۱}{x}$



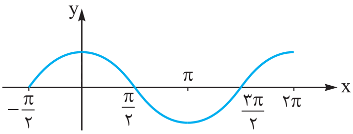
$y = -(x+۱)^۳ - ۱$

از روی نمودار می‌بینیم که فقط دو تابع $y = -(x+۱)^۳ - ۱$ (اکیداً نزولی) و $y = ۲^x + ۱$ (اکیداً صعودی) اکیداً یکنوا هستند.

۱۵۷- گزینهٔ «۴» اول نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{۴})$ را از روی نمودار تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم.



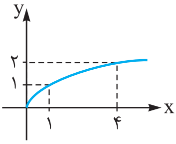
$y = \cos(x - \frac{\pi}{۴})$



$y = \cos x$

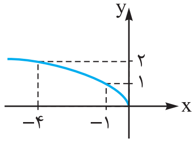
حالا از روی نمودار معلوم است که نمودار از بین گزینه‌ها فقط در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۴})$ نزولی اکید است.

۱۵۸- گزینهٔ «۳» اول تغییرات گفته‌شده را روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ انجام می‌دهیم:

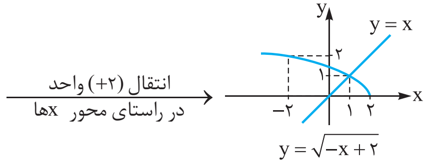


$y = \sqrt{x}$

$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$



$y = \sqrt{-x}$



حالا طبق شکل هم تابع $y=\sqrt{-x+۲}$ و هم خط $y=x$ از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرند؛ پس طول نقطهٔ تقاطعشان $x=۱$ است.

۱۵۹- گزینهٔ «۱» اول تعیین می‌کنیم تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲-x+۳ & x\le ۲\\ x-۲-x+۳ & ۲\le x\le ۳\\ x-۲+x-۳ & x>۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x+۵ & x\le ۲\\ ۱ & ۲\le x\le ۳\\ ۲x-۵ & ۳\le x\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها تابع در بازهٔ $x\le ۲$ نزولی است و ضابطهٔ تابع در این بازه $f(x)=-۲x+۵$ است.

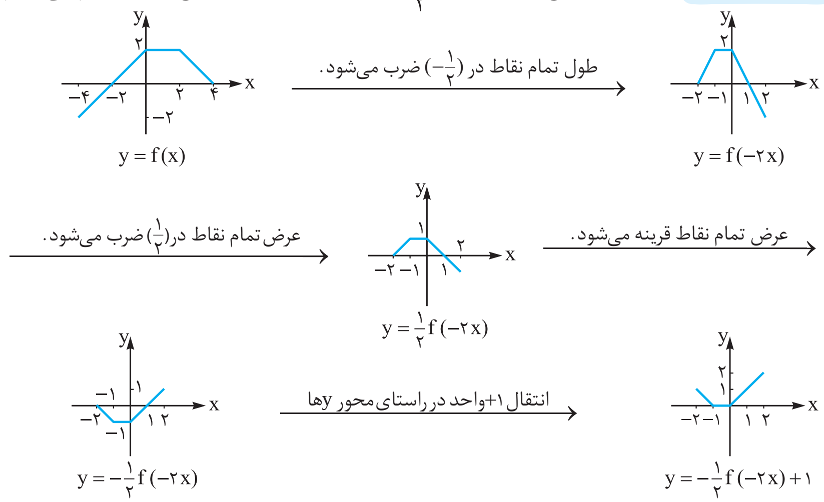
حالا تابع f را با تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=۲x^۲-x-۱۰\\ y=-۲x+۵\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵\Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۲)(-۱۵)}}{۲(۲)}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۲۱}}{۴}=\frac{-۱\pm ۱۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱۲}{۴}=-۳\\ x=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

حالا با توجه به این‌که فقط $-۳\le ۲$ است، پس دو نمودار یک نقطهٔ مشترک دارند.

۱۶۰- گزینهٔ «۱» نمودار تابع $g=-\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ را از روی نمودار تابع $f(x)$ رسم می‌کنیم.



پس جواب می‌شود ۱. $y=-\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$

۱۶۱- گزینهٔ «۳» تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$f=\{(۲,۳),(۳,۳),(۴,۱),(۵,۲)\}$$
$$g=\{(۱,۲),(۳,۴),(۴,۲),(۵,۱)\}$$
$$\Rightarrow\ gof=\{(۲,۴),(۳,۴),(۴,۲)\}$$

پس برد تابع gof برابر است با $\{۴,۲\}$ و دو عضو دارد.

۱۶۲- گزینهٔ «۱» $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی است و $g(x)=(x+۱)^۲$ و $f(x)=|x|$؛ پس داریم:

$$fog(۱-\sqrt{۲})=f(g(۱-\sqrt{۲}))=f((۱-\sqrt{۲}+۱)^۲)$$
$$=f(۶-۴\sqrt{۲})=|۶-۴\sqrt{۲}|=۶-۴\sqrt{۲}$$
$$gof(۱-\sqrt{۲})=g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(|۱-\sqrt{۲}|)=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۲$$

پس داریم:

$$fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۱۶۳- گزینهٔ «۴» داریم $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x+۴} & x>۳\\ ۲x+۳ & x\le ۳\end{cases}$، هر کدام از مقدارهای $f(f(۵))$ و $f(f(۱))$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲\ \Rightarrow\ f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷$$
$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵\ \Rightarrow\ f(f(۱))=f(۵)=۲$$

پس داریم:

$$f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۱۶۴- گزینهٔ «۱» داریم $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، ضابطهٔ $(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)=((\sqrt{x})^۲+\frac{۱}{(\sqrt{x})^۲})^۲-(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=(x+\frac{۱}{x})^۲-(x^۲+\frac{۱}{x^۲})$$
$$=x^۲+۲x(\frac{۱}{x})+\frac{۱}{x^۲}-x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۲$$

حالا چون ضابطهٔ تابع برابر ۲ شده است؛ پس یک تابع ثابت است.

۱۶۵- گزینهٔ «۱» ضابطهٔ تابع fog را با توجه به $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^۴ x$ پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sin^۴ x)=\sin^۴ x-\sqrt{\sin^۴ x}=\sin^۴ x-\sin^۲ x$$
$$=\sin^۲ x(\sin^۲ x-۱)=-\sin^۲ x\cos^۲ x$$

حالا با استفاده از اتحاد $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ داریم:

$$-\sin^۲ x\cos^۲ x=-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

۱۶۶- گزینهٔ «۲» $f(x)$ یک تابع خطی است؛ پس $f(x)=ax+b$، حالا چون $(fof)(x)=۴x+۱۲$ است؛ داریم:

$$fof(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

$a^۲x+ab+b$ باید برابر $۴x+۱۲$ باشد، پس:

$$a^۲=۴\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=۲\ \Rightarrow\ ab+b=۱۲\ \Rightarrow\ ۳b=۱۲\ \Rightarrow\ b=۴\\ a=-۲\ \Rightarrow\ ab+b=۱۲\ \Rightarrow\ -b=۱۲\ \Rightarrow\ b=-۱۲\end{cases}$$

پس $f(x)=2x+4$ یا $f(x)=-2x-12$ است و در نتیجه مقدار $f(2)$ برابر است با:

$$2(2)+4=8 \quad \text{یا} \quad -2(2)-12=-16$$

۱۶۷- گزینهٔ «۱» اول ضابطهٔ تابع $g(x)$ را با استفاده از $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$ پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=g^2(x)-g(x)-2 \\ f(g(x))=x^2+x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow g^2(x)-g(x)-2=x^2+x-2$$

$$g^2(x)-x^2-g(x)-x=0 \Rightarrow (g(x)+x)(g(x)-x)-(g(x)+x)=0$$

$$\Rightarrow (g(x)+x)(g(x)-x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=-x \\ g(x)=x+1 \end{cases}$$

حالا ضابطهٔ $(f+g)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-x-2+(-x)=x^2-2x-2$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-x-2+x+1=x^2-1$$

پس $(f+g)(x)$ برابر x^2-2x-2 یا x^2-1 است.

۱۶۸- گزینهٔ «۱» اول دامنهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}} \Rightarrow -x^2+x+2>0 \Rightarrow -(x^2-x-2)>0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)<0 \Rightarrow D_f: -1<x<2$$

$$g(x)=(\tfrac{1}{4})^x \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

حالا می‌رویم سراغ دامنهٔ تابع fog:

$$D_{fog}=\begin{cases} x\in D_g \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ g(x)\in D_f \Rightarrow -1<(\tfrac{1}{4})^x<2 \end{cases}$$

می‌دانیم همواره $(\tfrac{1}{4})^x>0$، پس فقط نامعادلهٔ $(\tfrac{1}{4})^x<2$ را حل می‌کنیم:

$$(\tfrac{1}{4})^x<2 \Rightarrow 2^{-2x}<2^1 \Rightarrow -2x<1 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

پس دامنهٔ تابع fog برابر است با $x>-\frac{1}{2}$ یا بازهٔ $(-\frac{1}{2},+\infty)$.

۱۶۹- گزینهٔ «۳» می‌دانیم برای پیداکردن ریشه‌های معادلهٔ $f(g(x))=a$ اول معادلهٔ $f(x)=a$ را حل می‌کنیم و بعد $g(x)$ را برابر جواب‌های این معادله قرار می‌دهیم و تعداد x را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-5x-6 \quad , \quad g(x)=x^2-x$$

$$f(g(x))=\circ \Rightarrow f(x)=\circ \Rightarrow x^{۲}-۵x-۶=\circ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)=-۱ \\ g(x)=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}-x=-۱ \Rightarrow x^{۲}-x+۱=\circ \Rightarrow \Delta<\circ \text{ جواب ندارد.} \\ x^{۲}-x=۶ \Rightarrow x^{۲}-x-۶=\circ \\ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=\circ \Rightarrow x=۳, x=-۲ \end{cases}$$

پس معادله دو ریشه دارد.

۱۷۰- گزینهٔ «۲» نمودار تابع f محور xها را در دو نقطهٔ $-\frac{۱}{۴}$ و $x=۶$ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادلهٔ $f(x)=\circ$ برابر ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ است. حالا جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=\circ$ را با توجه به $g(x)=x-\sqrt{x}$ پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=\circ \Rightarrow f(g(x))=\circ \xrightarrow[\text{است.} ۶,-\frac{۱}{۴}]{\text{جواب‌های معادلهٔ } f(x)=\circ} \begin{cases} g(x)=۶ \\ g(x)=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$g(x)=۶ \Rightarrow x-\sqrt{x}=۶ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^{۲}-t-۶=\circ$$

$$\Rightarrow (t-۳)(t+۲)=\circ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \\ t=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=۳ \Rightarrow x=۹ \\ \sqrt{x}=-۲ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$g(x)=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\sqrt{x}=t}$$

$$t^{۲}-t+\frac{۱}{۴}=\circ \Rightarrow (t-\frac{۱}{۲})^{۲}=\circ \Rightarrow t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

پس نمودار تابع fog محور طول‌ها را در نقاط $x=۹$ و $x=\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

۱۷۱- گزینهٔ «۲» ضابطهٔ تابع fog را پیدا می‌کنیم و آن را با تابع f قطع می‌دهیم:

$$\begin{matrix} f(x)=(۲x-۳)^{۲} \\ g(x)=x+۲ \end{matrix} \Rightarrow (fog)(x)=(۲(x+۲)-۳)^{۲}=(۲x+۱)^{۲}$$

پس داریم:

$$\begin{cases} y=(۲x+۱)^{۲} \\ y=(۲x-۳)^{۲} \end{cases} \Rightarrow (۲x+۱)^{۲}=(۲x-۳)^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۲x-۳ \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ ۲x+۱=-۲x+۳ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱۷۲- گزینهٔ «۱» داریم $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$. ضابطهٔ fog و gof را پیدا می‌کنیم و با هم مساوی قرار می‌دهیم و معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{x+۴+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

پس داریم:

$$\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲}\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۷x+۱۴=۶x^۲+۷x+۳۶x+۴۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰\xrightarrow{\div ۴}x^۲+۸x+۷=۰\xrightarrow{a+c=b}x=-۱,x=-۷$$

۱۷۳- گزینهٔ «۴» داریم $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$، مقدار $(fog)(۱)$ را از دو روش پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=\frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}\quad,\quad (fog)(۱)=\frac{۱^۲+۲}{۱^۲+۱}=\frac{۳}{۲}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲g(۱)+۲=۳g(۱)-۳\Rightarrow g(۱)=۵$$

۱۷۴- گزینهٔ «۴» داریم $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ از $g(f(a))=۵$ نتیجه می‌گیریم $f(a)=۶$ بنابراین چون $f(x)=x+\sqrt{x}$ است، پس:

$$a+\sqrt{a}=۶\xrightarrow{\sqrt{a}=t}t^۲+t-۶=۰\Rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-۳\\t=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a}=-۳ & \text{غ‌ق‌ق}\\\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

۱۷۵- گزینهٔ «۴» می‌دانیم یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که اگر در دو زوج مرتب yها (مؤلفه‌های دوم) با هم برابر باشند، آن‌گاه xهایشان (مؤلفه‌های اول) هم با هم مساوی باشند:

$$f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

در رابطهٔ f اولاً برای این‌که f تابع باشد، باید $a^۲-a=۲$ باشد (به علت وجود $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$) و ثانیاً برای این‌که f یک‌به‌یک باشد، باید $b=۳$، (به علت وجود $(۳,۲)$ و $(b,۲)$) پس داریم:

$$a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}a=-۱,a=۲\ \ b=۳$$

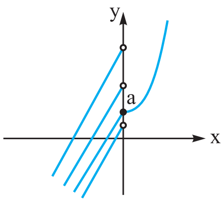
حالا رابطهٔ f را با مقدارهای $b=۳$ و $a=-۱$ یا $a=۲$ می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix}a=-۱\\b=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(۳,۲),(۳,۲),(-۱,۴)\}\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$\left.\begin{matrix}a=۲\\b=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۲),(-۱,۴)\}\Rightarrow \text{یک‌به‌یک است.}$$

پس دوتایی (a,b) برابر است با $(۲,۳)$.

۱۷۶- گزینهٔ «۱» نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+a & x\geq ۰ \\ ۲x+۳a-۴ & x<۰ \end{cases}$ را با یک مقدار دلخواه a رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار تابع، شرط یک‌به‌یک بودن این است که $۳a-۴\leq a$ باشد:

$$۳a-۴\leq a \Rightarrow ۲a\leq ۴ \Rightarrow a\leq ۲$$

۱۷۷- گزینهٔ «۴» از ماشین $x\rightarrow\boxed{f}\rightarrow\boxed{g}\rightarrow x$ نتیجه می‌گیریم که $(gof)(x)=x$ پس $g=f^{-۱}$ است، حالا با توجه به این‌که $f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳$ است، باید داشته باشیم:

$$g(-۱)=?\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=۲ \Rightarrow x=۴$$

پس $g(-۱)=۴$ است.

۱۷۸- گزینهٔ «۳» کافی است برای هر کدام از ضابطه‌ها x را برحسب y پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & x<۰ \end{cases}$$

$$x\geq ۰ \xrightarrow{y\geq ۰} \sqrt{x}=y \xrightarrow{\text{توان۲}} x=y^{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^{۲} \qquad x\geq ۰$$

$$x<۰ \xrightarrow{y<۰} -\sqrt{-x}=y \xrightarrow{\text{توان۲}} -x=y^{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^{۲} \qquad x<۰$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

حالا با توجه به گزینه‌ها ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ برابر است با: $f^{-۱}(x)=x|x|$

۱۷۹- گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** می‌دانیم $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$ پس اول fog و سپس وارون آن را پیدا می‌کنیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$$

$$g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$$

$$fog=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

راه‌حل دوم اول $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ و بعد $g^{-۱}of^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$$

$$g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\} \Rightarrow g^{-۱}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

۱۸۰- گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** اول f^{-1} و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=2x-5 \Rightarrow y=2x-5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{2} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$g(x)=x^3-1 \Rightarrow y=x^3-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y+1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

حالا حاصل $(f^{-1}og^{-1})(0)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(f^{-1}og^{-1})(0)=f^{-1}(g^{-1}(0))=f^{-1}(\sqrt[3]{1})=\frac{1}{2}(1)+\frac{5}{2}=3$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$ پس اول ضابطهٔ gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=(2x-5)^3-1$$

حالا می‌خواهیم مقدار $(gof)^{-1}(0)$ را پیدا کنیم:

$$(gof)^{-1}(0)=? \Rightarrow (2x-5)^3-1=0 \Rightarrow 2x-5=1 \Rightarrow x=3$$

پس $(f^{-1}og^{-1})(0)=3$ است.

۱۸۱- گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=2-\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1}=2-y$$

$$\xrightarrow{\text{توان}\,2} x-1=(2-y)^2 \Rightarrow x=y^2-4y+4+1$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-4x+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-4x+5$$

از طرف دیگر دامنهٔ تابع وارون برابر برد خود تابع است، پس:

$$\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1}\le 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x-1}\le 2 \Rightarrow y\le 2$$

پس دامنهٔ تابع وارون برابر است با $x\le 2$ یعنی جواب می‌شود ۱.

راه‌حل دوم اگر در تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ به جای x قرار بدهیم $x=2$، داریم $y=2-\sqrt{2-1}=1$، پس در تابع وارون باید به ازای $x=1$ داشته باشیم $y=2$ و در ۱ و ۳ چنین است. برای انتخاب گزینهٔ درست بین ۱ و ۳ باید مثل ادامهٔ راه‌حل اول برویم سراغ دامنهٔ تابع وارون که همان برد خود تابع است.

۱۸۲- گزینهٔ «۴» ضابطهٔ تابع معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را به ازای $x>0$ و $x<0$ جداگانه به دست می‌آوریم:

$$x>0 \Rightarrow y=\frac{x}{x}\sqrt{x} \Rightarrow y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان}\,2} x=y^2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2$$

$$x<0 \Rightarrow y=\frac{-x}{x}\sqrt{-x} \Rightarrow y=-\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان}\,2} -x=y^2$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-x^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2$$

بنابراین در تابع معکوس داریم $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^{2} & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^{2} & x<0\end{cases}$، پس با توجه به این‌که $f(x)=0$ است، پس باید $f^{-1}(0)=0$ باشد و در نتیجه $f^{-1}(x)=x|x|$ است.

۱۸۳- گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** با توجه به شرط $x<2$، فرض می‌کنیم $x=0$، نتیجه‌اش می‌شود:

$$y=x^{2}-4x \xrightarrow{x=0} y=0$$

پس در تابع وارون هم به ازای $x=0$ باید داشته باشیم $y=0$ و از بین گزینه‌ها نقطهٔ $(0,0)$ فقط در ۱ صدق می‌کند.

راه‌حل دوم x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=x^{2}-4x \Rightarrow y+4=x^{2}-4x+4 \Rightarrow (x-2)^{2}=y+4$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x-2|=\sqrt{y+4} \xrightarrow{x<2} -x+2=\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow x=2-\sqrt{y+4} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=2-\sqrt{x+4} \Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+4}$$

۱۸۴- گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** اول ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx-2y=x+4 \Rightarrow yx-x=2y+4$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{2x+4}{x-1}$$

حالا نقاط برخورد منحنی دو تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=\dfrac{x+4}{x-2}\\[2mm] y=\dfrac{2x+4}{x-1}\end{cases} \Rightarrow \frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow (x+4)(x-1)=(x-2)(2x+4)$$

$$\Rightarrow x^{2}+3x-4=2x^{2}-8 \Rightarrow x^{2}-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}x=-1\\ x=4\end{cases}$$

راه‌حل دوم گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم، اگر برای هر x گزینه‌ها، مختصات خود نقطه و جابه‌جا شدهٔ طول و عرضش هر دو در ضابطهٔ $f(x)$ صدق کنند، جواب سؤال‌اند: $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$

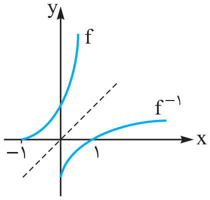
۱ $x=-4 \Rightarrow (-4,0) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (0,-4) \Rightarrow -4\neq\dfrac{0+4}{0-2}$ ×

۲ $x=4 \Rightarrow (4,4) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (4,4)$ ✓

$x=-1 \Rightarrow (-1,-1) \xrightarrow{\text{جابه‌جا}} (-1,-1)$ ✓

پس جواب می‌شود ۲.

۱۸۵- گزینهٔ «۴» نمودارهای f و $f^{-۱}$ را در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ رسم می‌کنیم:



$$f(x)=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$$

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود f و $f^{-۱}$ متقاطع نیستند.

۱۸۶- گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** اول ضابطهٔ f را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$f(x)=x^{۲}-۲x-۳=(x-۱)^{۲}-۴ \quad , \quad x>۱$$

حالا وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$$

و نقطهٔ تلاقی آن با $g(x)=\dfrac{x-۹}{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲} \xrightarrow{\text{کنترل گزینه‌ها}} x=۲۱ \text{ می‌خورد}$$

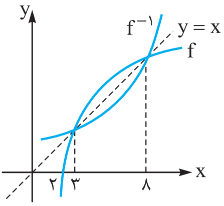
راه‌حل دوم برای پیداکردن نقطهٔ تلاقی $f^{-۱}$ با g، f را با $g^{-۱}$ تلاقی می‌دهیم:

$$g^{-۱}(x)=۲x+۹ \Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۲x+۹ \Rightarrow x^{۲}-۴x-۱۲=۰$$

$$(x-۶)(x+۲)=۰ \xrightarrow{x>۱} x=۶$$

و طول نقطهٔ مورد نظر سؤال برابر $f(۶)$ یا $g^{-۱}(۶)$ است که می‌شود ۲۱.

۱۸۷- گزینهٔ «۴» اول نمودار $f^{-۱}$ را از روی نمودار f رسم می‌کنیم:



می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ برابر مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x-f^{-۱}(x)\geq ۰$ است؛ یعنی با توجه به نمودار، باید بازه‌ای را تعیین کنیم که $f^{-۱}(x)\leq x$ باشد، یعنی نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار گیرد که طبق نمودار برابر است با بازهٔ $[۳,۸]$.

۱۸۸- گزینهٔ «۲» اولاً می‌دانیم $(g^{-۱}of^{-۱})=(fog)^{-۱}$، پس داریم $(fog)^{-۱}(a)=۸$ یعنی $(fog)(۸)=a$؛ پس:

$$f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$$

$$g(x)=\sqrt{۵x+۹} \Rightarrow (fog)(۸)=f(g(۸))=f(\sqrt{(۵\times ۸)+۹})=f(\sqrt{۴۹})=f(۷)=۳$$

۱۸۹- گزینهٔ «۴» $f^{-۱}(۸)=x$ یعنی x چند باشد تا مقدار $f(x)$ بشود ۸؟

خب به $\frac{۲}{۵}x-۴$ نگاه کنید:

$$\frac{۲}{۵}x-۴=۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x=۱۲ \Rightarrow x=۱۲\times\frac{۵}{۲}=۳۰$$

حالا $g^{-۱}(۳۰)$ را می‌خواهیم. به $x^{۳}+x$ کدام عدد را بدهیم که جوابش ۳۰ شود؟ گزینه‌ها می‌گویند: $x=۳$

پس:

$$g^{-۱}of^{-۱}(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$$