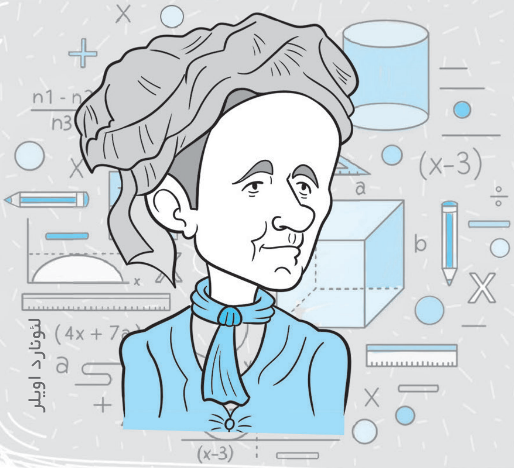


فصل اول: تابع

بخش اول: تابع، دامنه و برد

بخش دوم: انتقال، تبدیلات و توابع چندجمله‌ای

بخش سوم: یکنوایی

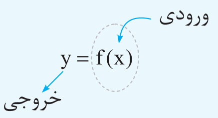
بخش چهارم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

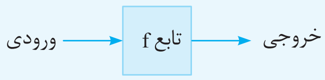
بخش پنجم: یک‌به‌یک و وارون

بخش اول: تابع، دامنه و برد

تابع

پرکاربردترین و مهم‌ترین فصل از ریاضی کنکور، تابع است. (*فارجی‌ها به آن «function» می‌گویند*.) به زبان ساده، تابع یک ماشین است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد، یعنی نمی‌شود که به این ماشین یک ورودی بدهیم و به ازای آن ورودی، دو خروجی مختلف بگیریم. معمولاً توابع را با حروف کوچک مانند f، g، h و t نمایش می‌دهیم. ببینید:



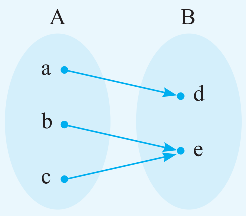


فرم‌های معروف نمایش تابع به یکی از چهار شکل زیر است:

① نمودار پیکانی ② زوج مرتب ③ نمودار مختصاتی ④ ضابطه

در اینجا می‌خواهیم مفهوم تابع بودن را در هر یک از این فرم‌ها بررسی کنیم:

۱) نمودار پیکانی

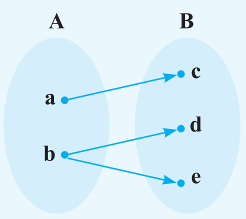


یک رابطه از مجموعهٔ A به B زمانی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک فلش خارج شود. برای مثال نمودار پیکانی مقابل تابع است، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شده است.

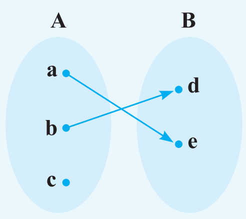
حواستان باشد اینکه به عضو e در مجموعهٔ B دو فلش وارد شده به ما هیچ ارتباطی ندارد.

مثال آموزشی **تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید.**

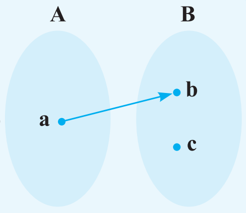
الف)



ب)



ج)



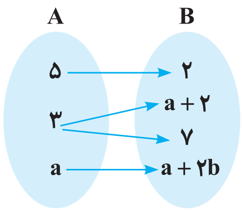
پاسخ مطابق توضیحات داده شده، در نمودارهای پیکانی، برای تابع بودن یک رابطه باید از هر عضو مجموعهٔ اول، دقیقاً یک فلش خارج شود. در نظر داشته باشید که مهم نیست به هر عضو مجموعهٔ دوم چه تعداد فلش وارد می‌شود. بنابراین به بررسی موارد داده‌شده می‌پردازیم:

الف) از عضو b، ۲ فلش خارج شده است، پس تابع نیست. ×

ب) از عضو c در مجموعهٔ اول، هیچ فلشی خارج نشده است، پس تابع نیست. ×

ج) از عضو a در مجموعهٔ اول، یک فلش خارج شده، پس تابع است. ✓

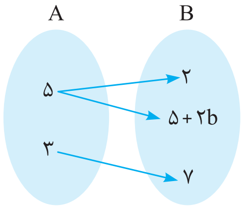
۱ نمودار پیکانی زیر مربوط به یک تابع است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۳}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۷}{۲}$
۴) ۴

پاسخ گزینه ۳ مطابق نمودار پیکانی داده شده از عدد ۳ دو فلش خارج شده که یکی به $a+۲$ و دیگری به ۷ رفته است، پس برای تابع بودن داریم: $a+۲=۷ \Rightarrow a=۵$

با جای‌گذاری $a=۵$ در نمودار پیکانی داده شده، دو تا ۵ در مجموعهٔ A به‌وجود می‌آید و نمودار پیکانی به‌صورت مقابل رسم می‌شود، پس داریم:



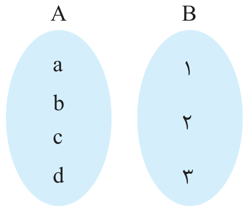
حالا دوباره برای تابع بودن این نمودار، باید دو مقدار ۲ و $۵+۲b$ با همدیگر برابر باشند (*حله؟*)، پس $۵+۲b=۲$ و در نتیجه $b=-\frac{۳}{۲}$ است. در آخر خواستهٔ مسئله برابر $a+b=۵-\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲}$ می‌باشد.

این هم یک تست ترکیبی از تابع و شمارش!

۲ تعداد توابع از مجموعهٔ چهارعضوی A به مجموعهٔ سه‌عضوی B چندتا است؟

۱) ۴
۲) ۸۱
۳) ۲۷
۴) ۶۴

پاسخ گزینه ۲ اعضای مجموعهٔ چهار عضوی A را به صورت a، b، c و d و اعضای مجموعهٔ سه عضوی B را به صورت ۱، ۲ و ۳ درنظر می‌گیریم. این هم شکلش:



مطابق نمودار رسم‌شده، برای هریک از اعضای مجموعهٔ A یعنی a، b، c و d سه حالت مختلف داریم (یا به ۱ می‌روند، یا به ۲ و یا به ۳)، پس تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر $۳^۴=۸۱$ می‌شود.

(حواستون باشه هنگامی که a به عدد ۱ میره، b و c هم می‌تونن به ۱ برن و هیچ مشکلی پیش نمیاد.)

بعضی‌ها هم هستند که این جمله را حفظ می‌کنند: «تعداد توابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی، برابر m^n است.»

۲) زوج مرتب

به هر دوتایی به شکل (a,b) زوج مرتب می‌گوییم که در آن a را مؤلفهٔ اول و b را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم. همچنین شرط آن‌که دو تا زوج مرتب (a,b) و (c,d) با هم برابر باشد آن است که $a=c$ و $b=d$.

برویم سراغ تعریف تابع بودن از روی زوج مرتب!

هر رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها، زمانی تابع است که مؤلفه‌های اولشان تکراری نباشد. حالا اگر مؤلفه‌های اول تکراری بودند، برای تابع بودن باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان با هم برابر باشند. برای مثال رابطهٔ $R_۱=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۵)\}$ تابع است. (*اینکه مؤلفه‌های دوم تکراری باشن، مهم نیست*) ولی رابطهٔ $R_۲=\{(۲,۴),(۲,۰)\}$ تابع نیست. (*قبوله؟*)

۳ اگر رابطهٔ $R=\{(۱,۱),(۱,m^۲-۳),(m,۳),(۲,۷)\}$ تابع باشد، m کدام است؟

۱) $m=۲$
۲) $m=-۲$
۳) $m=\pm ۲$
۴) هیچ مقدار m

پاسخ گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ داده‌شده و زوج مرتب‌ها چون دو مؤلفهٔ اول در زوج مرتب‌های $(۱,۱)$ و $(۱,m^۲-۳)$ با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$m^۲-۳=۱ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm ۲$$

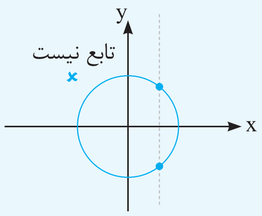
حالا باید مقادیر به‌دست آمده برای m را دوباره در رابطهٔ R جای‌گذاری کنیم، پس می‌توان نوشت:

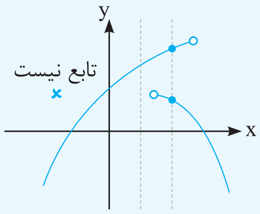
$m=۲ : R=\{(۱,۱),(۱,۱),(۱,۳),(۲,۷)\}$ × تابع نیست

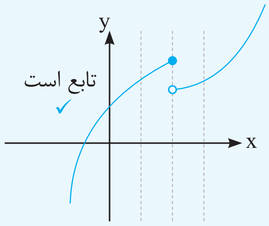
$m=-۲ : R=\{(۱,۱),(۱,۱),(-۲,۳),(۲,۷)\}$ ✓ تابع است

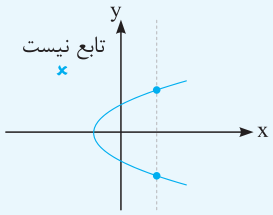
۳) نمودار مختصاتی

نمودار یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. برای مثال، شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:









۴) ضابطه

اگر بتوانیم y را برحسب x به صورت $y=f(x)$ بنویسیم، آن رابطه حتماً تابع است. برای مثال $y=x^{۲}+x+۱$ ، $y=\sin^{۲}x-۲x$ ، $y=۲$ و ... همگی تابع هستند، زیرا به ازای هر x، دقیقاً یک y می‌دهد.

مثال آموزشی **آیا رابطه‌های $y^{۳}=x^{۲}+۱$ و $y^{۲}=x^{۲}+۱$ تابع‌اند؟**

پاسخ برای بررسی تابع بودن یا نبودن رابطه‌های $y^{۳}=x^{۲}+۱$ و $y^{۲}=x^{۲}+۱$ به ترتیب از طرفین تساوی‌هایشان رادیکال با فرجهٔ سه و رادیکال با فرجهٔ دو می‌گیریم، پس می‌توان نوشت:

$$y^{۳}=x^{۲}+۱\xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }}y=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$$ تابع است ✓

$$y^{۲}=x^{۲}+۱\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{y^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+۱}\Rightarrow|y|=\sqrt{x^{۲}+۱}\Rightarrow y=\pm\sqrt{x^{۲}+۱}$$ تابع نیست ×

این رابطه تابع نیست، زیرا مثلاً به‌ازای $x=۰$ ، y برابر ۱± می‌شود.

تذکر **معمولاً ضابطه‌هایی که در آن‌ها y دارای توان زوج، قدرمطلق، جزء صحیح، درون نسبت مثلثاتی (مانند $\sin y$ ، $\cos y^{۲}$ و ...) و یا دارای ضریب متغیر است (مثل xy و ...)، تابع نیستند، برای مثال رابطهٔ $x=[y]$ تابع نیست، چرا که مثلاً وقتی $x=۰$ باشد، y می‌تواند ۰، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۲}$ و ... شود. (چرا؟)**

مثال آموزشی **تابع بودن ضابطه‌های زیر را بررسی کنید.**

الف) $|y|-x=۰$ ب) $xy=\sin x$ ج) $y^{۳}-y=۲x$ د) $y^{۲}+x^{۲}=۰$

پاسخ برای اثبات تابع نبودن ضابطه‌های داده‌شده از روش مثال نقض استفاده کرده و با عددگذاری کردن، تابع نبودن ضابطه‌ها را اثبات می‌کنیم. حالا داریم:

الف) $x=۱$ را در عبارت جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$x=۱\Rightarrow|y|-۱=۰\Rightarrow|y|=۱\Rightarrow y=\pm۱\Rightarrow$$ × تابع نیست

به‌ازای $x=۱$ ، دو مقدار مختلف برای y به دست می‌آید.

ب) $x=۰$ را در عبارت جایگذاری می‌کنیم:

$$۰\times y=\sin۰\Rightarrow۰\times y=۰\Rightarrow۰=۰\Rightarrow y\in\mathbb{R}\Rightarrow$$ × تابع نیست

به‌ازای $x=۰$ ، y هر مقداری می‌تواند باشد (بی‌شمار نقطه)، پس رابطه تابع نیست.

ج) $x=۰$ را در عبارت جایگذاری می‌کنیم:

$$x=۰\Rightarrow y^{۳}-y=۲\times۰\Rightarrow y^{۳}-y=۰\Rightarrow y(y^{۲}-۱)=۰\Rightarrow y=۰,y=\pm۱\Rightarrow$$ × تابع نیست

توجه کنید که به ازای $x=۰$ ، سه مقدار برای y به دست آمد، پس تابع نیست.

د) در این مورد توجه داشته باشید که جمع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است، بنابراین باید تک‌تک عبارت‌ها را برابر صفر قرار دهیم. پس داریم:

$$y^{۲}=۰\Rightarrow y=۰\quad,\quad x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰$$

در واقع این رابطه به‌صورت $\{(۰,۰)\}$ است که به وضوح تابع می‌باشد.

تذکر **روابطی که به صورت چندضابطه‌ای هستند زمانی تابع‌اند که دامنه‌هایشان اشتراک نداشته باشند، اما در صورتیکه دامنه‌ها اشتراک داشتند، برای تابع بودن باید xهای مشترک دامنه، یک y بدهند نه بیشتر. برای مثال رابطهٔ $y=\begin{cases}x+۲ & x>۲\\ x^{۲}-۱ & x<۱\end{cases}$ تابع است، زیرا دامنه‌هایشان اشتراکی ندارد، ولی رابطهٔ $y=\begin{cases}x+۲ & x>۲\\ x^{۲}-۱ & x<۴\end{cases}$ تابع نیست، زیرا به ازای $x=۳$ ، دو تا y به دست می‌آید یکی ۵ و دیگری ۸. (چرا؟)**

فصل دوم: مثلثات

بخش اول: مفاهیم اولیهٔ مثلثات

بخش دوم: فرمول‌های مثلثات

بخش سوم: دوره تناوب و تابع تانژانت

بخش چهارم: معادلات مثلثاتی

بخش اول: مفاهیم اولیهٔ مثلثات

مثلثات

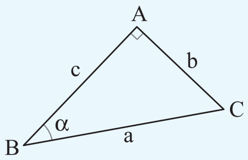
در ابتدای این بخش، یاد می‌گیریم که چرا این فصل نامش مثلثات است و اینکه ارتباط بین مثلث و مثلثات چیست!

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، برای زاویهٔ حادهٔ α رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a}$$

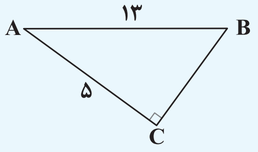
$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{c} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{c}{b}$$



توجه کنید که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ معکوس هم هستند و می‌دانیم $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$؛ دلیلش را هم ببینید:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\cancel{\text{وتر}}}}{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\cancel{\text{وتر}}}} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan\alpha \quad , \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\cancel{\text{وتر}}}}{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\cancel{\text{وتر}}}} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \cot\alpha$$

مثال آموزشی **در شکل مقابل، حاصل $\frac{\tan\hat{A} + \cot\hat{B}}{\cos\hat{A} + \sin\hat{B}}$ را به‌دست آورید.**



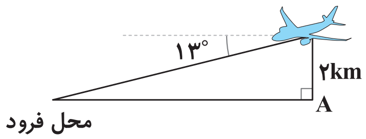
پاسخ قبل از هرکاری به کمک فیثاغورس، اندازهٔ ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow (۱۳)^۲ = (۵)^۲ + BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow BC = ۱۲$$

حالا طبق مطالب گفته شده، حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

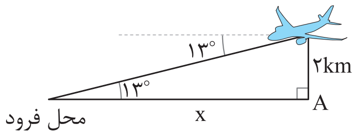
$$\begin{cases} \tan\hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{۱۲}{۵} \ , \ \cot\hat{B} = \frac{BC}{AC} = \frac{۱۲}{۵} \\ \cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{۵}{۱۳} \ , \ \sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۵}{۱۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan\hat{A} + \cot\hat{B}}{\cos\hat{A} + \sin\hat{B}} = \frac{\frac{۱۲}{۵} + \frac{۱۲}{۵}}{\frac{۵}{۱۳} + \frac{۵}{۱۳}} = \frac{\frac{۲۴}{۵}}{\frac{۱۰}{۱۳}} = \frac{۳۱۲}{۵۰} = \frac{۱۵۶}{۲۵}$$

۱ **یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدوداً °۱۳ باشد، هواپیما تقریباً در چه فاصله‌ای از A فرود می‌آید؟ ($\tan ۱۳° = ۰/۲۳$)**



① ۷/۷
② ۷/۹
③ ۸/۷
④ ۸/۹

پاسخ گزینه ۳ با توجه به شکل، زاویه‌ای که راستای حرکت هواپیما با سطح زمین می‌سازد هم °۱۳ است (*بلی؟*)، پس به کمک تانژانت این زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل داریم:

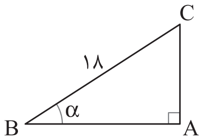


$$\tan ۱۳° = \frac{۲}{x} \xrightarrow{\tan ۱۳° = ۰/۲۳} \frac{۲۳}{۱۰۰} = \frac{۲}{x} \Rightarrow ۲۳x = ۲۰۰ \Rightarrow x = \frac{۲۰۰}{۲۳} \simeq ۸/۷$$

۲ **در یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱۸، سینوس یکی از زاویه‌ها $\frac{۱}{۳}$ است. محیط این مثلث کدام است؟**

① $۶(\sqrt{۲}+۲)$
② $۱۲(\sqrt{۲}+۱)$
③ $۱۲(\sqrt{۲}+۲)$
④ $۶(\sqrt{۲}+۱)$

پاسخ گزینه ۳ با توجه به شکل مقابل و اینکه $\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$، می‌توان نوشت:



$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} \xrightarrow[BC=۱۸]{\sin\alpha=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} = \frac{AC}{۱۸} \Rightarrow ۳AC = ۱۸ \Rightarrow AC = ۶$$

از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث داریم:

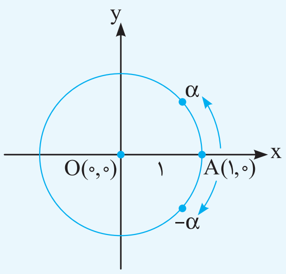
$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow (۱۸)^۲ = (۶)^۲ + (AB)^۲ \Rightarrow ۳۲۴ = ۳۶ + (AB)^۲ \Rightarrow (AB)^۲ = ۲۸۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۸۸} = ۱۲\sqrt{۲}$$

در نهایت محیط این مثلث برابر با $AB + AC + BC = ۱۲\sqrt{۲} + ۶ + ۱۸ = ۱۲(\sqrt{۲}+۲)$ است.

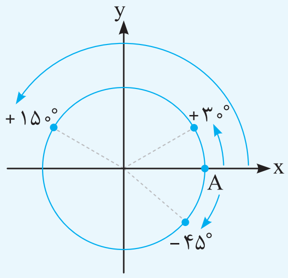
دایرهٔ مثلثاتی

تمام مطالبی که در مثلثات بلدید، یک طرف، دایرهٔ مثلثاتی طرف دیگر! (*هرکی دایره رو قورت نده از ما نیست.*)

دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع ۱، که مرکزآن نقطهٔ $O(۰,۰)$، نقطهٔ شروع آن $A(۱,۰)$ و جهت حرکت در این دایره، خلاف جهت عقربه‌های ساعت است که در اصطلاح به آن پادساعتگرد هم گفته می‌شود. شکل آن هم به‌صورت مقابل است:



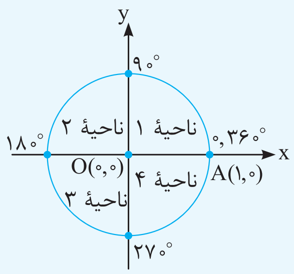
به بیان دیگر، اگر در این دایره با شروع از مبدأ (A) پادساعتگرد حرکت کنیم، زاویهٔمان مثبت و اگر ساعتگرد حرکت کنیم، زاویهٔمان منفی می‌شود. شکل مقابل را هم ببینید:

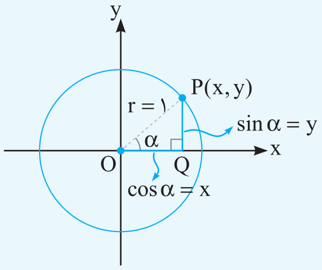


همان‌طور که در شکل‌های بالا دیدید، هر دایرهٔ مثلثاتی از چهار ناحیه تشکیل شده است.

شکل مقابل و همهٔ مخلفاتش را به خوبی به خاطر بسپارید.

حواستان باشد که زاویه‌های مشخص‌شده، زاویهٔ مرزی هستند و جزء هیچ‌کدام از ناحیه‌ها نمی‌باشند.





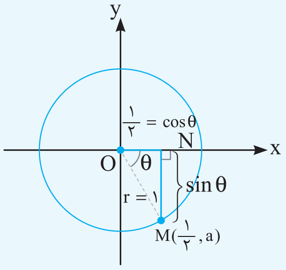
مثلث قائم‌الزاویه و نسبت‌های مثلثاتی که ابتدای فصل، خدمتتان عرض کردیم، دقیقاً در دل دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند. یکی از شکل‌های خیلی مفهومی و مهم از مثلثات را ببینید:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{PQ}{OP}=\frac{PQ}{۱}=PQ}\quad,\quad\boxed{\cos\alpha=\frac{OQ}{OP}=\frac{OQ}{۱}=OQ}$$

یک جملهٔ کلیدی: طول هر نقطه مانند $P(x,y)$ روی محیط دایره، نشان دهندهٔ $\cos\alpha$ و عرض آن، نشان‌دهندهٔ $\sin\alpha$ است، یعنی: $P(x,y)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$

این نتیجه‌گیری هم به لطف قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPQ انجام شده است:

$$OQ^{۲}+QP^{۲}=OP^{۲}\Rightarrow\boxed{\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha=۱}$$



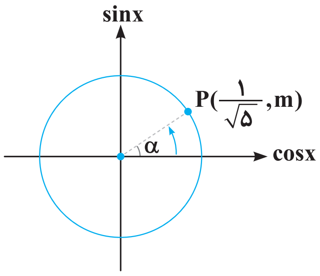
درواقع مجموع مربعات سینوس و کسینوس هرزاویهٔ دلخواهی، برابریک می‌شود، مثلاً $\sin^{۲}۲۷°+\cos^{۲}۲۷°=۱$.

اجازه بدهید یک مثال دیگرهم برایتان بزنیم! فرض کنید نقطهٔ $M(\frac{۱}{۲},a)$ روی محیط دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد $(a<۰)$ ،

پس شکل مقابل را در نظر بگیرید:

طبق حرف‌هایی که زدیم، طول و عرض نقطهٔ M به ترتیب برابر کسینوس و سینوس زاویهٔ θ است، یعنی $\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ و $\sin\theta=a$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow a^{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{a<۰}a=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



۳ مطابق شکل مقابل، نقطهٔ $P(\frac{۱}{\sqrt{۵}},m)$ روی دایرهٔ مثلثاتی است. مجموع طول و عرض نقطهٔ $Q(\frac{m}{۲},n)$ روی محیط دایره کدام است؟ (P و Q دو نقطهٔ متمایزند.)

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

پاسخ گزینه ۴ مطابق شکل $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و $\sin\alpha=m$ است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow m^{۲}+(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}=۱\Rightarrow m^{۲}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{مطابق شکل } m>۰}m=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

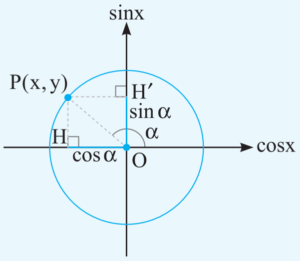
با توجه به m به‌دست آمده و فرض مسئله، طول نقطهٔ Q، برابر $\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{m}{۲}$ است، پس با فرض آنکه زاویهٔ ایجاد شده برای Q برابر β است، داریم:

$$\sin^{۲}\beta+\cos^{۲}\beta=۱\xrightarrow{\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}}\sin^{۲}\beta+(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}=۱\Rightarrow\sin^{۲}\beta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\sin\beta=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

فقط حواستان باشد که P و Q یکی نیستند، پس $\sin\beta=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ می‌شود و این یعنی $n=\frac{-۲}{\sqrt{۵}}$. در نهایت خواستهٔ مسئله، برابر است با:

$$\frac{m}{۲}+n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

محورهای سینوس و کسینوس



با توجه به همهٔ حرف‌هایی که زدیم، از این به بعد محور y ها را محور سینوس‌ها و محور x ها را محور کسینوس‌ها می‌نامیم. در واقع برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، از نقطهٔ نشان دهندهٔ زاویه روی محیط دایره بر محور sin ها و cos ها عمود می‌کنیم، در این صورت از مرکز دایره یعنی O تا پای عمود، sin یا cos آن زاویه می‌شود.

این هم شکلش:

$$\begin{cases}OH'=\sin\alpha\\OH=\cos\alpha\end{cases}$$

همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم باشد، $\sin\alpha>۰$ ولی $\cos\alpha<۰$ است، درنتیجه $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ هم منفی هستند (*چرا اون وقت؟*)

فصل سوم: حد و پیوستگی

بخش اول: تقسیم، همسایگی
بخش دوم: فرآیندهای حدی
بخش سوم: ابهام صفر صفرم
بخش چهارم: حد بی‌نهایت
بخش پنجم: حد در بی‌نهایت
بخش ششم: پیوستگی

بخش اول: تقسیم، همسایگی

بخش‌پذیری و تقسیم

به‌خاطر دارم که یکی از سؤال‌ها و جواب‌های همیشگی و مهم سال سوم و چهارم دبستانم این بود:

سؤال: **حاصل $۱۴\,\underline{|۳}$ را به‌دست آورید و درستی آن را امتحان کنید.**

جواب: ۱۴ (مقسوم) را بر ۳ (مقسوم‌علیه) تقسیم می‌کنیم تا خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم پیدا شوند:

$$\begin{array}{r|l} ۱۴ & ۳ \\ \cline{2-2} -۱۲ & ۴ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array}$$

همچنین روش نشان دادن درستی تقسیم به‌صورت زیر است:

$$(۳\times۴)+۲=۱۴\ ✓ \quad , \quad ۲<۳$$

رابطهٔ درستی تقسیم، برای چندجمله‌ای‌ها نیز برقرار است و به آن قضیهٔ تقسیم گفته می‌شود.

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} & q(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{مقسوم}}{\underset{\downarrow}{f(x)}} = \underset{\text{مقسوم‌علیه}}{\underset{\downarrow}{g(x)}} \times \underset{\text{خارج قسمت}}{\underset{\downarrow}{q(x)}} + \underset{\text{باقی‌مانده}}{\underset{\downarrow}{r(x)}}$$

فقط توجه کنید که درجهٔ $r(x)$ حتماً باید از درجهٔ $g(x)$ کمتر باشد. (*لزوماً یک درجه هم نه*)

تذکر **اگر $g(x)$ تابع خطی باشد (درجه یک)، باقی‌مانده حتماً عدد است** (*بگیم r بهتره تا r(x)*) **یا اگر $g(x)$ درجه دو باشد، باقی‌مانده را به‌صورت $r(x)=ax+b$ می‌نویسیم و ...**

مثال آموزشی **نشان‌دهید چندجمله‌ای $۲x^۳+۵x^۲-۳x-۴$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.**

پاسخ شرط بخش‌پذیری آن است که باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر شود، پس داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+۵x^۲-۳x-۴ & x-۱ \\ \cline{2-2} -۲x^۳+۲x^۲ \qquad\qquad & ۲x^۲+۷x+۴ \\ \cline{1-1} ۷x^۲-۳x-۴ & \\ -۷x^۲+۷x \qquad & \\ \cline{1-1} ۴x-۴ & \\ -۴x+۴ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

پس چندجمله‌ای $۲x^۳+۵x^۲-۳x-۴$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

خیلی از اوقات پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم راحت نیست و ممکن است خیلی طولانی شود. قضیهٔ صفحه بعد برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(ax+b)$ (درجه یک) است که بسیار کار راه‌انداز می‌باشد.

پیدا کردن باقی‌مانده بدون انجام تقسیم

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $r=f(-\frac{b}{a})$ است.

به زبان ساده، ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $ax+b=۰$ را به‌دست می‌آوریم $(x=-\frac{b}{a})$ و عدد به‌دست آمده را در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم. مقدار حاصل، همان باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ است.

مثال آموزشی **باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^{۱۰۰}+x^{۱۹}-۲x^{۱۱}+۳x^{۶}+۲$ بر $x+۱$ را به‌دست آورید.**

پاسخ به‌دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم بدون استفاده از قضیهٔ بالا خیلی خیلی طولانیه 😟

اما به‌کمک قضیه به راحتی، ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی معادلهٔ $x+۱=۰$ را به‌دست می‌آوریم $(x=-۱)$ و سپس این مقدار را در $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم، پس داریم:

$$r=f(-۱)=(-۱)^{۱۰۰}+(-۱)^{۱۹}-۲(-۱)^{۱۱}+۳(-۱)^{۶}+۲=۱-۱+۲+۳+۲=۷$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ برابر ۷ است.

۱ **باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{۴}+ax^{۲}+x-۲$ بر $x+۲$ برابر ۸ است. مقدار $a+\frac{۱}{a}$ کدام است؟**

① -۱

② -۲

③ $-\frac{۱}{۲}$

④ $-\frac{۹}{۴}$

پاسخ گزینه ۲ ریشهٔ مقسوم‌علیه $x=-۲$ است، پس طبق قضیهٔ گفته‌شده $P(-۲)=۸$ می‌باشد، داریم:

$$P(-۲)=(-۲)^{۴}+a(-۲)^{۲}-۲-۲=۱۶+۴a-۴=۸\Rightarrow ۴a=-۴\Rightarrow a=-۱$$

در نهایت مقدار $a+\frac{۱}{a}=-۱-۱=-۲$ می‌باشد.

تذکر **اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر باشد، $ax+b$ را یک عامل یا فاکتور برای $P(x)$ می‌نامیم.**

۲ **اگر $x-۱$ یک عامل برای $P(x)=x^{۴}-x^{۳}+ax+۲۷$ باشد، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=۰$ کدام است؟**

① ۳

② ۴

③ -۲

④ ۶

پاسخ گزینه ۲ $x-۱$ یک عامل برای $P(x)$ است، یعنی $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱: P(۱)=۰\Rightarrow (۱)^{۴}-(۱)^{۳}+a(۱)+۲۷=۰\Rightarrow a=-۲۷$$

حالا باید مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^{۴}-x^{۳}-۲۷x+۲۷=۰$ را به‌دست آوریم که به‌کمک فاکتورگیری داریم:

$$x^{۳}(x-۱)-۲۷(x-۱)=۰\Rightarrow (x-۱)(x^{۳}-۲۷)=۰\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \\ x^{۳}=۲۷\Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

در نتیجه مجموع ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=۰$ برابر ۴ است.

۳ **اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^{۴}+ax^{۲}-bx+۱$ بر $x-۱$ و $x+۱$ به‌ترتیب ۲ و -۲ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=ax^{۲}+bx-۱$ بر $x-۳$ کدام است؟**

① ۲۳

② ۱۷

③ -۲۵

④ -۱۳

پاسخ گزینه ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ و $x+۱$ به ترتیب ۲ و -۲ است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P(۱)=۲\Rightarrow (۱)^{۴}+a(۱)^{۲}-b+۱=۲ \\ P(-۱)=-۲\Rightarrow (-۱)^{۴}+a(-۱)^{۲}+b+۱=-۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a-b=۰ \\ a+b=-۴ \end{cases}\Rightarrow ۲a=-۴\Rightarrow a=-۲\,,\,b=-۲$$

در نتیجه ضابطهٔ $f(x)$ به‌صورت $f(x)=-۲x^{۲}-۲x-۱$ است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۳$ همان $f(۳)$ می‌باشد، پس داریم:

$$r=f(۳)=-۲(۳)^{۲}-۲(۳)-۱=-۱۸-۶-۱=-۲۵$$

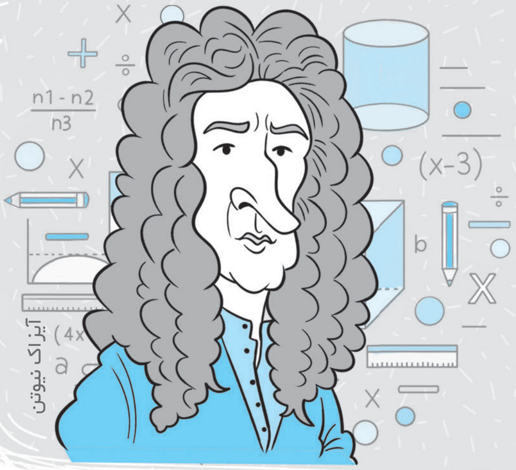
۴ **اگر $P(۲x+۱)=x^{۴}+(a-۱)x^{۳}+ax-۲$ باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x+۱)$ بر $x-۲$ برابر ۵ باشد، مقدار a کدام است؟**

① $\frac{۵}{۲}$

② ۳

③ $\frac{۷}{۲}$

④ ۴



فصل پنجم: کاربرد مشتق

بخش اول: یکنوایی

بخش دوم: نقطهٔ بحرانی

بخش سوم: اکسترمم نسبی

بخش چهارم: اکسترمم مطلق

بخش پنجم: بهینه‌سازی

بخش اول: یکنوایی

یکنوایی

وضعیت یکنوایی توابع را از دو دیدگاه می‌توان بررسی کرد. یکی از دیدگاه علم تابع و دیگری کاربرد مشتق. ماجرا به این صورت است که علم تابع خیلی اوقات توانایی بررسی یکنوایی یک تابع را ندارد، در این حالت کاربرد مشتق نقش‌آفرینی می‌کند.

توصیه می‌کنم قبل از ورود به تعیین یکنوایی به کمک مشتق، درسنامهٔ زیر را که خلاصه‌ای از یکنوایی از نگاه تابع است با دقت مطالعه کنید.

یادآوری

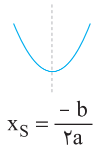
یادآوری از فصل تابع

در فصل تابع گفتیم اگر با افزایش x، مقدار تابع زیاد شود، تابع اکیداً صعودی و اگر با افزایش x، مقدار تابع کم شود، تابع اکیداً نزولی است. همچنین سه حالت معروف زیر را بررسی کردیم:

① **توابع چند ضابطه‌ای، براکتی و قدرمطلقی:** برای تعیین یکنوایی این توابع معمولاً از رسم نمودارشان کمک می‌گیریم.

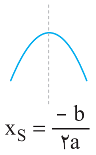
② **توابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ (سهمی):** این توابع با توجه به نمودارشان که به یکی از دو صورت ∪ یا ∩ است، غیر یکنوا هستند، اما اگر دامنه‌شان را به بازه‌ای محدود کنیم که طول رأس سهمی $(x_S = \frac{-b}{2a})$ درون بازه نباشد، تابع اکیداً یکنوا می‌شود:

الف $a > 0$:



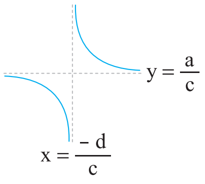
$$\begin{cases} x \geq \frac{-b}{2a} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } f(x) \\ x \leq \frac{-b}{2a} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \end{cases}$$

ب $a < 0$:

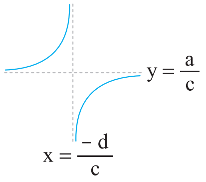


$$\begin{cases} x \geq \frac{-b}{2a} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \\ x \leq \frac{-b}{2a} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } f(x) \end{cases}$$

③ **توابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (هموگرافیک):** این توابع با توجه به نمودارشان که به یکی از دو صورت



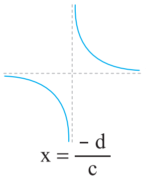
یا



است، غیر یکنوا می‌باشند.

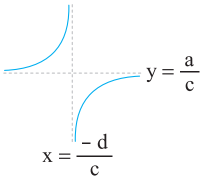
(مشکل، ریشهٔ مخرجه) اما اگر دامنه‌شان را به بازه‌ای محدود کنیم که ریشهٔ مخرج $(x = -\frac{d}{c})$ درون بازه نباشد، تابع اکیداً یکنوا می‌شود:

الف $ad - bc < 0$:



$$\begin{cases} x > -\frac{d}{c} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \\ x < -\frac{d}{c} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \end{cases}$$

ب $ad - bc > 0$:

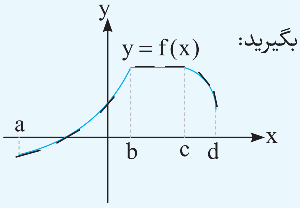


$$\begin{cases} x > -\frac{d}{c} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } f(x) \\ x < -\frac{d}{c} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } f(x) \end{cases}$$

در واقع اگر $ad - bc < ۰$ ، نمودار، دو شاخهٔ نزولی همچنین اگر $ad - bc > ۰$ ، نمودار، دو شاخهٔ صعودی دارد، اما تابع هموگرافیک در کل غیریکنوا است.

خلاصه این‌که برای بررسی یکنوایی توابعی از جمله چند ضابطه‌ای، جزءصحیح، قدرمطلق، سهمی و هموگرافیک معمولاً از تکنیک‌های بالا استفاده می‌کنیم و در سایر توابع سراغ مشتق می‌رویم.

ارتباط بین یکنوایی و مشتق



می‌دانیم که مشتق یک تابع، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع است. حالا تابع مقابل و خطوط مماس روی آن را در نظر بگیرید: همان‌طور که می‌بینید در بازهٔ (a,b) که نمودار تابع اکیداً صعودی است، شیب خط مماس بر تابع (f') مثبت بوده و همچنین در بازهٔ (b,c) که نمودار تابع ثابت است، شیب خط مماس بر تابع صفر و در نهایت در بازهٔ (c,d) تابع نزولی و f' در این بازه منفی است. پس می‌توان ارتباط بین یکنوایی و مشتق را به کمک قضیهٔ زیر به خوبی نشان داد.

قضیهٔ یکنوایی: فرض کنید تابع $y = f(x)$ در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد، داریم:

① تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است، هرگاه برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f'(x) > ۰$.

② تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f'(x) < ۰$.

③ تابع $f(x)$ ثابت است، هرگاه برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f'(x) = ۰$.

مثال آموزشی اگر $f(x) = x^{۲} + ۲x$ باشد، وضعیت یکنوایی این تابع را در دامنه‌اش بررسی کنید.

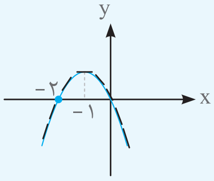
پاسخ برای مشخص کردن وضعیت یکنوایی تابع $f(x)$ ، ابتدا از آن مشتق می‌گیریم، پس داریم:

$$f(x) = x^{۲} + ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲x + ۲$$

حالا برای آنکه متوجه شویم $f'(x)$ در چه بازه‌هایی مثبت یا منفی است، تابع $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$f'(x) = ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	

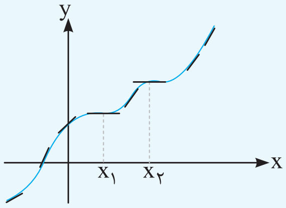


همان‌طور که می‌بینید در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ ، $f'(x) > ۰$ است، پس تابع $f(x)$ در این بازه اکیداً صعودی است. همچنین در بازهٔ $(-\infty,-۱)$ ، $f'(x) < ۰$ است، پس $f(x)$ در این بازه اکیداً نزولی می‌باشد.

دیدن نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x$ خالی از لطف نیست:

همان‌طور که از روی نمودار تابع $f(x)$ می‌بینید، این تابع در بازهٔ $(-\infty,-۱)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است (*حله؟*)

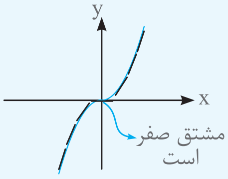
در تکمیل مطالب قبل بهتر است بدانید که اگر در یک بازه، $f'(x) > ۰$ و همچنین در تعداد متناهی نقطه $f'(x) = ۰$ باشد، تابع $y = f(x)$ باز هم اکیداً صعودی است.



برای مثال نمودار تابع $y = f(x)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

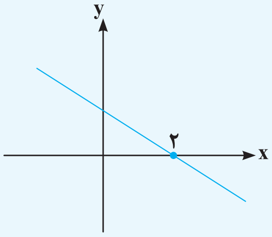
همان‌طور که می‌بینید تابع روبه‌رو، تابعی اکیداً صعودی است. این در حالی است که این تابع در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ مماس افقی دارد، یعنی $f'(x_۱) = f'(x_۲) = ۰$.

مثال آموزشی یکنوایی تابع $y = x^{۳}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.



پاسخ مشتق تابع $y = x^{۳}$ برابر با $y' = ۳x^{۲}$ است. همان‌طور که می‌دانید مشتق این تابع مثبت است و فقط به ازای $x = ۰$ برابر صفر می‌شود. حواستان باشد چون تعداد نقاطی که مشتق برابر صفر می‌شود متناهی است (*اینجا فقط* $x = ۰$) در نتیجه تابع $y = x^{۳}$ اکیداً صعودی است. این هم شکلش:

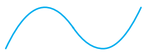
مثال آموزشی نمودار تابع $f'(x)$ به صورت مقابل است. مقادیر $f(۱)$ ، $f(۰)$ و $f(-۲)$ را با هم مقایسه کنید.



پاسخ با توجه به نمودار مقابل، واضح است که $f'(x)$ در بازهٔ $(-\infty,۲)$ مثبت (بالای محور xها) و در بازهٔ $(۲,+\infty)$ منفی است و این یعنی $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty,۲)$ اکیداً صعودی می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

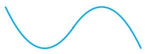
$$-۲ < ۰ < ۱ \Rightarrow f(-۲) < f(۰) < f(۱)$$

۱ **اگر $f'(x) = -x^۲ + ۵x - ۴$، نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟**

۱


۲


۳


۴


پاسخ گزینه ۴ برای تعیین نمودار تابع $f(x)$ باید $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم، پس داریم:

$$f'(x) = -x^۲ + ۵x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} x_۱ = ۱, x_۲ = ۴$$

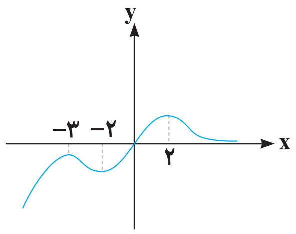
x	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	

همان‌طور که می‌دانیم علامت مشتق نشان دهندهٔ وضعیت یکنوایی تابع است پس با توجه به جدول تعیین علامت بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x < ۱ \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \\ ۱ < x < ۴ \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } f(x) \\ x > ۴ \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } f(x) \end{cases}$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به صورت  است.

۲ **نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. طول بزرگ‌ترین بازهٔ حاصل از حل نامعادلهٔ $ff' \geq ۰$ کدام است؟**



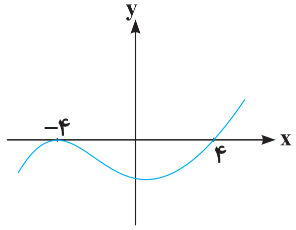
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ∞

پاسخ گزینه ۲ جواب حاصل از حل نامعادلهٔ $ff' \geq ۰$ به یکی از دو صورت زیر است:

$$ff' \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} f \geq ۰, f' \geq ۰ \Rightarrow & \text{نامنفی و تابع صعودی } y \\ f \leq ۰, f' \leq ۰ \Rightarrow & \text{نامثبت و تابع نزولی } y \end{cases}$$

با توجه به نمودار داده شده، بازه‌ای که در آن هم مقادیر تابع نامنفی و هم تابع در آن بازه صعودی است، بازهٔ $[۰,۲]$ و همچنین بازه‌ای که هم مقادیر تابع نامثبت و هم تابع در آن بازه نزولی است، بازه $[-۳,-۲]$ می‌باشد. پس بزرگ‌ترین بازه برای جواب نامعادلهٔ $ff' \geq ۰$ بازهٔ $[۰,۲]$ است که طول آن ۲ است.

۳ **نمودار تابع $f'(x)$ به صورت زیر است. اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ در آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $(-\infty, m^۲ - ۵]$ باشد، چند عدد صحیح بین مقادیر به دست آمده برای m وجود دارد؟**



۱) ۳
۲) ۱
۳) ۵
۴) ۷

پاسخ گزینه ۳ می‌دانیم هرگاه نمودار تابع $f'(x)$ زیر محور xها باشد، یعنی $f'(x) < ۰$ و تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی می‌باشد، از طرفی گفتیم که صفر شدن مشتق در تعداد متناهی نقطه وضعیت اکیداً یکنوایی یک تابع را به هم نمی‌زند، پس مطابق شکل، تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-\infty, ۴]$ اکیداً نزولی است و داریم:

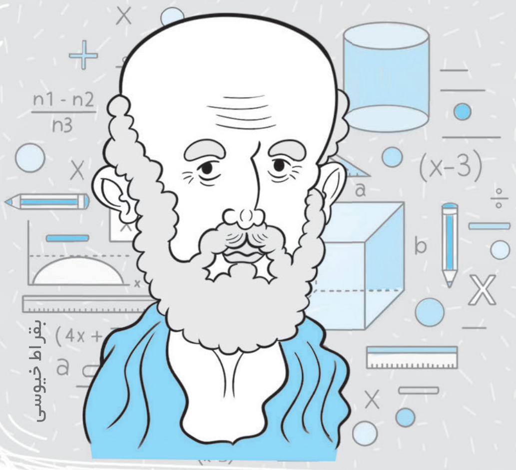
$$m^۲ - ۵ = ۴ \Rightarrow m^۲ = ۹ \Rightarrow m = \pm ۳$$

در نهایت عددهای صحیح بین دو عدد ± ۳، $\{\pm ۲, \pm ۱, ۰\}$ هستند که تعدادشان ۵ تا است.

تکنیک تعیین وضعیت یکنوایی توابع مشتق‌پذیر

برای مشخص کردن وضعیت یکنوایی یک تابع مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

① دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم.
② مشتق گرفته و در صورت نیاز مخرج مشترک می‌گیریم.
③ $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم (به این جدول، جدول رفتار یا جدول تغییرات تابع گفته می‌شود).
④ هر بازه‌ای که علامت $f'(x)$ در آن مثبت باشد، تابع در آن اکیداً صعودی و اگر علامت $f'(x)$ منفی باشد، تابع در آن اکیداً نزولی است.



فصل دهم: ریشه و توان

بخش اول: ریشه و توان

بخش دوم: عبارت‌های جبری

بخش اول: ریشه و توان

ریشه و توان

در هر جای ریاضی با مطالبی مواجه می‌شویم که برای حل آن‌ها باید نیم‌نگاهی به مبحث ریشه و توان داشته باشیم. شاید در تاریخ کنکور تست‌های زیادی از این فصل نیامده باشد، ولی اگر به مطالب این فصل مسلط نباشید، در اکثر فصل‌ها دچار مشکل می‌شوید.

ریشهٔ n ام

یکی از کلمات کلیدی این فصل، همین «ریشهٔ n ام» است. وقتی می‌گوییم b ریشهٔ n ام a است، یعنی $b^n = a$.

برای مثال ۰/۳ ریشهٔ سوم ۰/۰۲۷ است، زیرا $۰/۰۲۷ = (۰/۳)^{۳}$ و ریشه‌های چهارم ۱۶، ۲± است چرا که $۱۶ = (\pm۲)^{۴}$. همچنین عدد ۱۶ - ریشهٔ چهارم ندارد، زیرا هیچ عددی نیست که به‌توان ۴ برسد و جوابش ۱۶ - شود *(عدد به‌توان زوج، منفی نمی‌شه که)*. به زبان فارسی برای محاسبهٔ ریشهٔ n ام عدد a باید ببینیم چه اعدادی هستند که به توان n می‌رسند و جوابشان a می‌شود! *(حله؟)*

مثال آموزشی **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.**

الف) عددهای ۲ و ۲– ریشهٔ دوم عدد ۴ هستند. **ب) عدد ۴– تنها ریشهٔ سوم عدد ۶۴– است.**

ج) ریشه‌های چهارم عدد ۸۱– ، عددهای ۳ و ۳– هستند.

پاسخ الف) این گزاره درست است، زیرا ۲± به‌توان ۲ مساوی ۴ می‌شوند.

ب) تنها عدد دنیا که به توان ۳ می‌رسد و ۶۴– می‌شود، ۴ - است، پس این گزاره هم درست است.

ج) این گزاره نادرست است. زیرا ۳± به توان چهار ۸۱ می‌شوند نه ۸۱– . یادتان باشد که توان دوم، چهارم، ششم و ... و در کل توان زوج هیچ عددی منفی نمی‌شود. *(منطقیه نه؟)*

اتفاقی که اینجا می‌افتد این است که ریشهٔ n ام بعضی از عددها دوتا هستند، بعضی دیگر یکی و یک‌سری از عددها هم اصلاً ریشهٔ n ام ندارند. برای راحتی در به‌خاطر سپردن این حالت‌ها، جدول زیر را در نظر بگیرید:

عدد حقیقی a	عدد طبیعی n	ریشهٔ n ام a	تعداد	مثال فارسی
$a \in \mathbb{R}$	فرد	$\sqrt[n]{a}$	یکی	ریشهٔ سوم عدد ۸، فقط ۲ یا همان $\sqrt[۳]{۸}$ است.
$a > ۰$	زوج	$\pm\sqrt[n]{a}$	دوتا	ریشه‌های دوم عدد ۲۵، ۵± هستند.
$a < ۰$	زوج	ندارد	هیچی	ریشهٔ چهارم عدد ۱۶ - ، وجود ندارد.

یکی از اشکالات اساسی اغلب دانش‌آموزان این است که فرقی بین ریشهٔ n ام عدد a و $\sqrt[n]{a}$ قائل نیستند. تذکر صفحهٔ بعد را چند بار بخوانید!

تذکر **این‌طوری بگوییم که اگر n فرد باشد، ریشهٔ n ام a و $\sqrt[n]{a}$ دقیقاً یکی هستند ولی اگر n زوج باشد و a مثبت، ریشهٔ n ام a ، $\pm\sqrt[n]{a}$ است نه فقط $\sqrt[n]{a}$.**

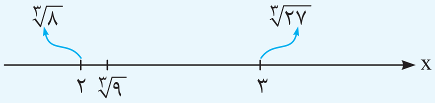
برای مثال $\sqrt{۴} = ۲$ ولی ریشهٔ دوم ۴ می‌شود ۲± .

تعیین حدود ریشهٔ n ام

گفتیم که برای پیداکردن ریشهٔ n ام عدد a ، باید بگوییم چه عددی به توان n ، جوابش a می‌شود. حالا یک سؤال؟ ریشهٔ سوم عدد ۹ چند است؟ یعنی چه عددی به‌توان ۳ برسد ۹ می‌شود؟

واقعیت این است که مقدار دقیقش را نمی‌دانیم. اما می‌توانیم برایش یک بازه، تعیین کنیم. به‌این صورت که دو عدد صحیح متوالی پیدا کنیم که a بین توان n ام آن‌ها باشد، بعد می‌گوییم $\sqrt[n]{a}$ بین این دو عدد است. برای مثال وقتی می‌خواهیم مقدار تقریبی ریشهٔ سوم عدد ۹ را محاسبه کنیم، ۹ را بین توان سوم دو عدد صحیح متوالی قرار می‌دهیم، بعد می‌گوییم $\sqrt[۳]{۹}$ بین این دو عدد است، پس می‌توان نوشت:

$$۲^۳ < ۹ < ۳^۳ \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۹} < ۳$$



همان‌طور که می‌بینید $\sqrt[۳]{۹}$ بین دو عدد ۲ و ۳ است، ولی به ۲ خیلی نزدیک‌تر است تا ۳.

۱ کدام عدد، دو تا ریشهٔ مرتبه ششم دارد؟

۱) $\pi - \frac{۷}{۲}$ ‏ ۲) $\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$ ‏ ۳) صفر ‏ ۴) $\sqrt[۳]{۱۷} - ۲$

پاسخ گزینه ۴ تنها عددهای مثبت هستند که دو تا ریشهٔ مرتبهٔ زوج دارند، پس پاسخ تست گزینه‌ای است که مقدارش مثبت باشد. از طرفی می‌دانیم که $۲۷ > ۱۷ > ۸$ است، پس می‌توان نوشت:

$$۲^۳ < ۱۷ < ۳^۳ \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۱۷} < ۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{۱۷} - ۲ > ۰$$

سایر گزینه‌ها هم به‌وضوح مثبت نیستند.

۲ ریشهٔ سوم ۷۹− بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

۱) ۴− و ۵− ‏ ۲) ۵− و ۶− ‏ ۳) ۳− و ۴− ‏ ۴) ۶− و ۷−

پاسخ گزینه ۱ می‌دانیم که $-۶۴ > -۷۹ > -۱۲۵$ است، پس می‌توان نوشت:

$$(-۵)^۳ < -۷۹ < (-۴)^۳ \Rightarrow -۵ < \sqrt[۳]{-۷۹} < -۴$$

همان‌طور که می‌بینید ریشهٔ سوم عدد ۷۹− بین دو عدد صحیح ۵− و ۴− قرار دارد.

۳ حاصل عبارت $[\sqrt[۵]{-۱۹۵}] + [\sqrt[۴]{۴۹۶}]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزءِ صحیح است.)

۱) صفر ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۱− ‏ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۲ عدد ۴۹۶ بین ۲۵۶ و ۶۲۵ است و همچنین ۱۹۵− بین دو عدد ۳۲− و ۲۴۳− است، پس می‌توان نوشت:

$$(۴)^۴ < ۴۹۶ < (۵)^۴ \Rightarrow ۴ < \sqrt[۴]{۴۹۶} < ۵ \Rightarrow [\sqrt[۴]{۴۹۶}] = ۴$$

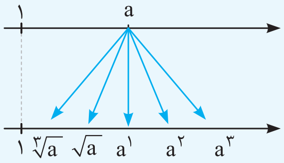
$$(-۳)^۵ < -۱۹۵ < (-۲)^۵ \Rightarrow -۳ < \sqrt[۵]{-۱۹۵} < -۲ \Rightarrow [\sqrt[۵]{-۱۹۵}] = -۳$$

در نهایت جواب مسئله برابر $۴ + (-۳) = ۱$ است.

مقایسهٔ بین ریشه‌ها و توان‌های عدد a

برای این‌کار، عدد حقیقی a را در چهار حالت $a > ۱$ ، $۰ < a < ۱$ ، $-۱ < a < ۰$ و $a < -۱$ در نظر می‌گیریم و هر حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $a > ۱$ باشد، با زیادشدن توان، مقدارش افزایش‌یافته و با زیادشدن مرتبهٔ ریشه، مقدار مثبت ریشه کاهش می‌یابد.



این را هم بلد باشید که در این حالت، a^n و $\sqrt[n]{a}$ هردو از یک بیشترند و داریم:

$$۱ < \cdots < \sqrt[۳]{a} < \sqrt{a} < a < a^۲ < a^۳ < \cdots$$

فصل چهاردهم: توابع نمایی و لگاریتمی

بخش اول: تابع نمایی

بخش دوم: تابع لگاریتمی

بخش اول: تابع نمایی

توابع نمایی

توابعی مانند $y=x , y=x^{۲} , y=x^{\frac{۱}{۲}}$ و ... را خیلی خوب می‌شناسیم. اما بعضی از توابع، توانشان x و پایه‌شان عدد ثابت مثل $y=۳^{x} , y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ و ... است.

به این توابع، نمایی گفته می‌شود.

به زبان علمی‌تر، توابع به فرم $y=a^{x}$ با شرط $a>۰ , a\neq ۱$ را نمایی می‌گوییم؛ پس $y=۲^{\sqrt{x}} , y=(-۳)^{x} , y=\sin x$ و ... نمایی نیستند.

برای فهم بهتر، مثال زیر را با دقت تحلیل کنید:

مثال آموزشی **نمایی بودن یا نبودن توابع زیر را بررسی کنید.**

$$۱)\ y=(\sqrt{۲})^{x} \qquad ۲)\ y=(-\frac{۱}{۲})^{x} \qquad ۳)\ y=۲^{x^{۲}} \qquad ۴)\ y=(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱} \qquad ۵)\ y=\frac{۳^{x}}{۲^{x-۱}}$$

پاسخ از بین تابع‌های داده‌شده فقط مورد (۲) و (۳) نمایی نیستند؛ زیرا در مورد (۲)، پایه عددی منفی و مورد (۳) هم که توانش $x^{۲}$ است که برخلاف تعریف تابع نمایی یعنی a^{x} است. برای اینکه خیالتان از نمایی بودن موارد (۴) و (۵) راحت شود، تابع‌های داده‌شده را کمی ساده می‌کنیم، ببینید:

$$۴)\ y=(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱}=(\frac{۱}{۲})^{۱}\times(\frac{۱}{۲})^{۲x}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۴})^{x} \checkmark$$

$$۵)\ y=\frac{۳^{x}}{۲^{x-۱}}=\frac{۳^{x}}{۲^{x}\times\frac{۱}{۲}}=۲\times(\frac{۳}{۲})^{x} \checkmark$$

۱ **به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{۴-m}{۲m+۱})^{x}$ نمایی است؟**

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۵

پاسخ گزینه ۱ شرط آنکه تابع داده‌شده نمایی باشد، آن است که $\frac{۴-m}{۲m+۱}>۰$ و البته $\frac{۴-m}{۲m+۱}\neq ۱$ باشد، پس می‌توان نوشت:

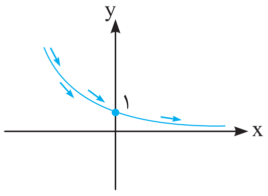
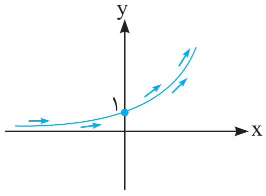
$$\frac{۴-m}{۲m+۱}>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{۱}{۲}<m<۴ \qquad (۱)$$

$$\frac{۴-m}{۲m+۱}\neq ۱ \Rightarrow ۴-m\neq ۲m+۱ \Rightarrow ۳m\neq ۳ \Rightarrow m\neq ۱ \qquad (۲)$$

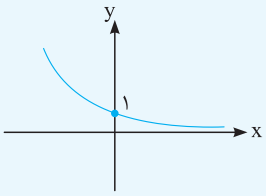
با اشتراک‌گیری از دو محدودهٔ به‌دست آمده، بازهٔ قابل‌قبول برای m به صورت $(-\frac{۱}{۲},۴)-\{۱\}$ است؛ یعنی برای m، سه عدد صحیح ۰، ۲ و ۳ قابل‌قبول است.

نمودار تابع نمایی

در تابع نمایی $f(x)=a^x$ ، گفتیم که a، عددی مثبت و غیر ۱ است؛ یعنی برای a، دو حالت رخ می‌دهد: یکی اینکه $a>۱$ و دیگری $۰<a<۱$ باشد. جدول زیر برای فهم و مقایسهٔ نمودار تابع نمایی در دو حالت گفته شده خیلی کار راه‌انداز است.

تابع نمایی	$۰<a<۱$	$a>۱$
نمودار		
شباهت	۱) دامنهٔ هر دو تابع $D=\mathbb{R}$ و بردشان $R=(۰,+\infty)$ است. ۲) هر دو تابع از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرند.	
تفاوت	۱) در این تابع با زیاد شدن x، مقدار تابع کم می‌شود. به زبان تابع، به این نوع توابع اکیداً نزولی می‌گوییم. ۲) هرچه x زیاد می‌شود، مقدار تابع به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان حد: $۰<a<۱: \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=۰$	۱) در این تابع با زیاد شدن x، مقدار تابع زیاد می‌شود. به زبان تابع، به این نوع توابع اکیداً صعودی می‌گوییم. ۲) هرچه x کم می‌شود، مقدار تابع به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان حد: $a>۱: \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=۰$

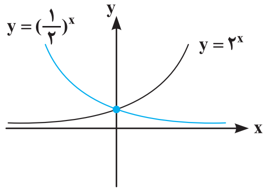
برای مثال به راحتی می‌توان گفت که نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$ به صورت مقابل است و می‌توانیم بگوییم با افزایش x، مقدار تابع همواره کم می‌شود.



راستی حواستان باشد که هیچ‌وقت یک عبارت نمایی، منفی یا صفر نمی‌شود *(بُرِش مثبته)*. مثلاً معادلهٔ $(\frac{۱}{۳})^x=-۲$ اصلاً ریشه ندارد.

نکته

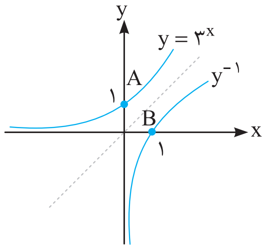
همان‌طور که می‌دانیم $\frac{۱}{a}$ همان $a^{-۱}$ است؛ یعنی $(\frac{۱}{a})^x$ مساوی a^{-x} است. در واقع اگر نمودار تابع $y=a^x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم *(جای x بذاریم −x)*، **به تابع $y=(\frac{۱}{a})^x$ می‌رسیم. مثلاً دو تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x, y=۲^x$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.** *(قبوله؟)*



۲ فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع $y=۳^x$ با محور yها از نقطهٔ برخورد وارون این تابع با محور xها برابر $\sqrt{a}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ گزینه ۲ نمودار هر تابع با وارونش نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌باشد؛ پس نمودار تابع نمایی $y=۳^x$ با وارونش در یک دستگاه به صورت مقابل رسم می‌شوند:



مطابق شکل روبه‌رو خواستهٔ مسئله پیدا کردن طول پاره‌خط AB است که برابر می‌شود با:

$$A(۰,۱),B(۱,۰): AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

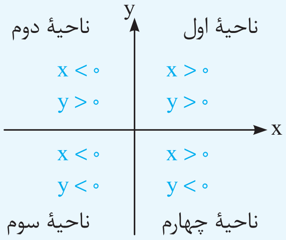
در نهایت $\sqrt{a}$ همان $\sqrt{۲}$ است؛ یعنی $a=۲$ است.

فصل پانزدهم:

هندسهٔ تحلیلی

هندسهٔ تحلیلی

هندسهٔ تحلیلی یا همان نقطه و خط خودمان از جمله فصل‌هایی است که توانایی ترکیب شدن با هر فصل دیگری را دارد. هرچیزی که برای یک شروع قدرتمند در این فصل نیاز داریم را برایتان آورده‌ایم.



داستان به این صورت است که آقایی به‌نام دکارت سال‌ها پیش، صفحه‌ای دوبعدی تعریف کرده که دو محور عمود برهم دارد. محور افقی آن، x و محور عمودی‌اش، y نام دارد. این صفحه به افتخار دکارت، به صفحهٔ دکارتی یا صفحهٔ مختصات دوبعدی معروف شده است. مطابق شکل مقابل، صفحهٔ مختصات به چهار ناحیه تقسیم می‌شود که نام‌گذاری آن به‌صورت مقابل است. همچنین علامت طول و عرض هر نقطه در این ناحیه‌ها مشخص شده است.

کسی هست که نداند هر نقطه روی محور x ها مختصاتش به‌صورت $M(x,۰)$ و مختصات هر نقطه روی محور y ها به‌صورت $N(۰,y)$ است!

۱ نقطهٔ $A(m^۲+۲m,-m+۱)$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد. حدود m کدام است؟

① $۰<m<۱$ ② $-۲<m<۰$ ③ $m<۱$ ④ $m>-۲$

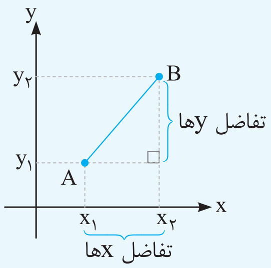
پاسخ گزینه ۲ نقطهٔ داده‌شده در ناحیهٔ دوم قرار دارد، بنابراین مؤلفهٔ اول آن منفی و مؤلفهٔ دوم آن مثبت می‌باشد، حالا داریم:

$$\text{مؤلفهٔ اول}: m^۲+۲m<۰ \Rightarrow m(m+۲)<۰ \Rightarrow -۲<m<۰ \quad (۱)$$

$$\text{مؤلفهٔ دوم}: -m+۱>۰ \Rightarrow -m>-۱ \xrightarrow{\times(-۱)} m<۱ \quad (۲)$$

در نهایت اشتراک دو محدودهٔ (۱) و (۲) به‌دست آمده به‌صورت $-۲<m<۰$ است.

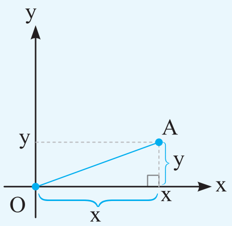
فاصلهٔ دو نقطه



برای این‌که فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ را به‌دست آوریم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

فرمول گفته‌شده، دقیقاً از دل قضیهٔ فیثاغورس آمده است.



برای مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۰)$ از $B(۷,۳)$ برابر $AB=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۳-۰)^۲}=۵$ است. همچنین بدانید که فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $A(x,y)$ از مبدأ مختصات برابر $AO=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است.

۲ اگر نقاط $A(۲,۴)$ ، $B(۵,۰)$ و $C(-۲,۱)$ رئوس یک مثلث باشند، نوع این مثلث کدام است؟

۱ قائم‌الزاویه ۲ متساوی الساقین و قائم‌الزاویه ۳ متساوی‌الساقین ۴ مختلف‌الاضلاع

پاسخ گزینه ۲ برای تشخیص نوع مثلث ABC ، کافی است طول اضلاع AB ، AC و BC را پیدا کنیم و از روی طول این اضلاع نوع مثلث را تعیین کنیم، داریم:

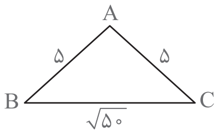
$$AB=\sqrt{(۰-۴)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$AC=\sqrt{(۱-۴)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۲-۵)^۲}=\sqrt{۱+۴۹}=\sqrt{۵۰}$$

مطابق اضلاع به‌دست آمده و برابر بودن طول AB و AC می‌فهمیم که مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌باشد. از طرفی باتوجه به این‌که هم گزینهٔ «۲» و هم گزینهٔ «۳» متساوی‌الساقین را دارد، باید به‌کمک قضیهٔ فیثاغورس قائم‌الزاویه بودن یا نبودن مثلث ABC را هم بررسی کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow(\sqrt{۵۰})^۲=(۵)^۲+(۵)^۲\Rightarrow ۵۰=۵۰ \checkmark$$



همان‌طور که می‌بینید اضلاع مثلث در شرط قضیهٔ فیثاغورس هم صدق می‌کند، پس این مثلث هم متساوی‌الساقین و هم قائم‌الزاویه است.

حالا یک تست متفاوت

۳ نقطهٔ A در ربع سوم روی خط $y=۳x$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱ ۴ ۲ -۴ ۳ -۸ ۴ ۸

پاسخ گزینه ۲ اول از همه دقت کنید که چون A در ربع سوم است، بنابراین مؤلفهٔ x و y آن هردو منفی هستند. از طرفی دیگر چون A روی خط $y=۳x$ قرار دارد، پس آن را به‌صورت $A(\alpha,۳\alpha)$ در نظر می‌گیریم. حالا فاصلهٔ نقطهٔ A را تا مبدأ مختصات محاسبه کرده و برابر $\sqrt{۱۰}$ قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$OA=\sqrt{(\alpha)^۲+(۳\alpha)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+۹\alpha^۲}=\sqrt{۱۰\alpha^۲}\xrightarrow{OA=\sqrt{۱۰}}\sqrt{۱۰\alpha^۲}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow ۱۰\alpha^۲=۱۰\Rightarrow\alpha^۲=۱\Rightarrow\alpha=\pm۱$$

چون A در ربع سوم است پس $\alpha=۱$ غیرقابل قبول است.

خلاصه این‌که مختصات نقطهٔ A به‌صورت $A(-۱,-۳)$ است و مجموع طول و عرض این نقطه برابر -۴ می‌شود.

مختصات وسط پاره‌خط

نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو سر پاره‌خط AB هستند، نقطهٔ وسط این پاره‌خط از رابطهٔ $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ به‌دست می‌آید که چیز عجیب و غریبی هم نیست، همان میانگین است. برای مثال نقطهٔ میانی پاره‌خطی که ابتدا و انتهایش $A(۲,۶)$ و $B(۰,-۴)$ می‌باشد، نقطهٔ $M(۱,۱)$ است.

تذکر **مهم‌ترین کاربرد فرمول مختصات وسط پاره‌خط برای محاسبهٔ میانه در مثلث‌ها و عمودمنصف است.**

مثال آموزشی **در مثلث ABC با رئوس $A(۲,۳)$ ، $B(۰,۴)$ و $C(-۲,۲)$ ، اندازهٔ طول میانهٔ وارد بر BC چند واحد است؟**

پاسخ میانهٔ وارد بر یک ضلع، خطی است که از یک رأس به‌وسط ضلع مقابل وارد می‌شود. میانهٔ وارد بر BC برابر پاره‌خط AN می‌باشد، که N وسط BC است.

حالا کافی است وسط ضلع BC را پیدا کنیم، داریم:

$$N=(\frac{۰+(-۲)}{۲},\frac{۲+۴}{۲})=N(-۱,۳)$$ وسط ضلع BC

در نهایت با داشتن مختصات A و N طول AN را پیدا می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$AN=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$