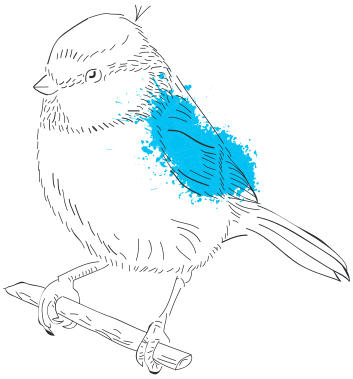
فصل اول

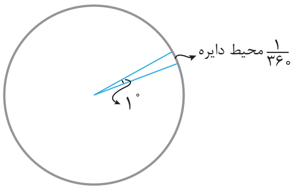
مثلثات

برای مشاهده فیلم های آموزشی این فصل
در سایت آلاء این کد را اسکن کنید.

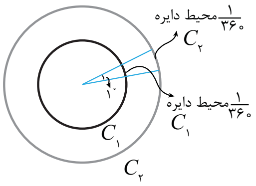


جلسه اول: زاویه ، نسبت‌های مثلثاتی و دایره‌ی مثلثاتی

زاویه

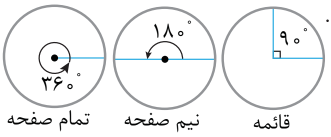


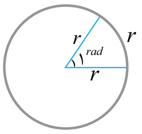
فضای بین دو نیم‌خط را زاویه می‌گوییم. برای اندازه‌گیری زاویه، دو واحد **درجه** و **رادیان** را در اختیار داریم. ابتدا درباره‌ی درجه که برای شما واحد قدیمی‌تر و آشناتری است کمی صحبت می‌کنیم. اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به هر قسمت **یک درجه** است. یک درجه را با نماد °۱ نشان می‌دهیم.



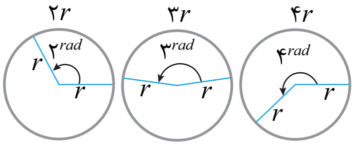
اگر دقت کنید می‌بینید که فرقی نمی‌کند که **شعاع دایره‌ای که برای تعریف** °۱ استفاده می‌کنیم چقدر باشد. به شکل مقابل دقت کنید:

نکته با توجه به آنچه که گفتیم زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به محیط یک دایره‌ی کامل معادل °۳۶۰ است. این زاویه را تمام صفحه هم می‌نامند. به همین ترتیب زاویه مرکزی روبه‌رو به نصف محیط دایره معادل °۱۸۰ است، این زاویه را نیم‌صفحه هم می‌نامند. همچنین زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به ربع دایره معادل °۹۰ است. این زاویه را قائمه هم می‌نامند.

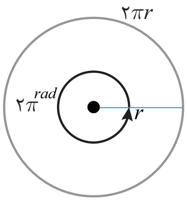




واحد دیگر اندازه‌گیری زاویه **رادیان** است. **یک رادیان**، زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول کمان برابر با شعاع دایره باشد. یک رادیان را با نماد ۱^{rad} نشان می‌دهیم.



معلوم است که طبق این تعریف ۲^{rad} زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که در آن طول کمان دو برابر طول شعاع دایره است. به همین ترتیب زوایای ۳^{rad}، ۴^{rad} و ... را می‌توان تعریف کرد.



چون می‌دانیم محیط دایره‌ای به شعاع r برابر با $۲\pi r$ است $(\pi \simeq ۳/۱۴)$، پس در واقع زاویه‌ی تمام صفحه معادل با $۲\pi^{rad}$ بوده است، چرا که کمان روبه‌رو به آن ۲π برابر شعاع دایره است:

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم $۲\pi^{rad}$ معادل با °۳۶۰ است. به این ترتیب مبنای تبدیل واحد رادیان به درجه و برعکس ساخته می‌شود. چون $۲\pi^{rad}$ معادل °۳۶۰ است، می‌توانیم با یک نسبت ساده زاویه‌ی D (درجه) را به R (بر حسب رادیان) تبدیل کنیم و برعکس:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi^{rad}} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{۳۶۰^\circ}=\frac{R}{۲\pi^{rad}}$$

مثال ① **زوایای °۳۰، °۶۰ و °۴۵ را به رادیان تبدیل کنید.**

پاسخ: با قرار دادن در تناسب بالا داریم:

$$\frac{۳۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow R=\frac{\pi}{۶}^{rad}$$

$$\frac{۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow R=\frac{\pi}{۳}^{rad}$$

$$\frac{۴۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow R=\frac{\pi}{۴}^{rad}$$

مثال ۲ زوایای $\frac{\pi}{۱۲}^{rad}$ ، $\frac{۳\pi}{۴}^{rad}$ و $\frac{۵\pi}{۲}^{rad}$ را به درجه تبدیل کنید.

پاسخ: با قرار دادن در تناسب مذکور داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۱۲}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow D=۱۵^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۳\pi}{۴}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow D=۱۳۵^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۵\pi}{۲}^{rad}}{\pi^{rad}}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow D=۴۵۰^\circ$$

نکته برای سریع‌تر شدن روند تبدیل زوایا از درجه به رادیان و برعکس می‌توانید از روش‌های زیر که از همان تناسب نتیجه شده است استفاده کنید:

درجه $\xrightarrow{\times\frac{\pi}{۱۸۰}}$ رادیان

رادیان $\xrightarrow{\times\frac{۱۸۰}{\pi}}$ درجه

مثال ۳ ۱ رادیان، چند درجه است؟ $(\pi\simeq ۳/۱۴)$

پاسخ: با قرار دادن در نسبت مذکور یا از نکته‌ی بالا داریم:

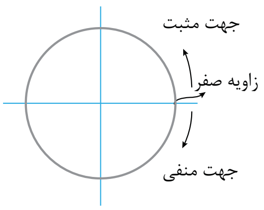
$$۱^{rad}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}\simeq\frac{۱۸۰^\circ}{۳/۱۴}=۵۷/۳^\circ$$

نکته حتماً حفظ کنید که $۱^{rad}\simeq ۵۷/۳^\circ$

نکته زوایای پر کاربرد را بر حسب دو واحد درجه و رادیان در جدول زیر آورده‌ایم. با توجه به کاربرد زیاد آن‌ها توصیه می‌کنیم آن‌ها را حفظ کنید:

D (درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
R (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

پیدا کردن زوایا در دایره مثلثاتی

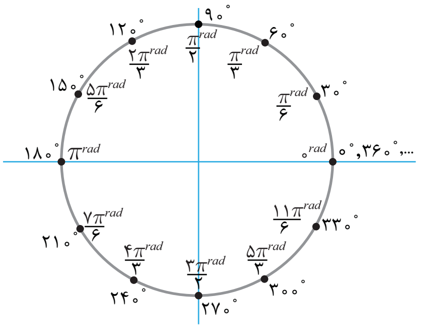


چون کمی بعدتر درباره‌ی دایره‌ی مثلثاتی[1] صحبت خواهیم کرد، ترجیح می‌دهیم همین‌جا درباره‌ی پیدا کردن یک زاویه در دایره‌ی مثلثاتی صحبت کنیم. برای پیدا کردن هر زاویه در دایره‌ی مثلثاتی دو قانون داریم:

قانون ۱: زاویه‌ی صفر، جهت مثبت محور x ها در نظر گرفته می‌شود.

قانون ۲: جهت مثبت، پادساعتگرد و طبیعتاً جهت منفی ساعتگرد است.

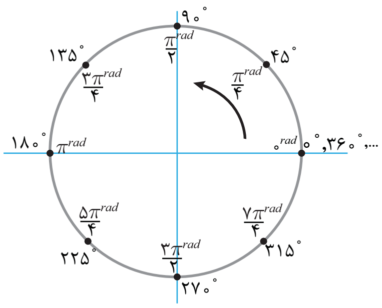
با این دو قانون زوایای معروف و پرکاربرد را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص کرده‌ایم:



---

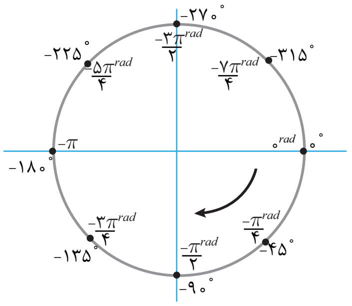
[1] بعداً در دایره‌ی مثلثاتی مفصل‌تر خواهیم گفت که شعاع دایره‌ی مثلثاتی یک واحد و مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است.

برای ساخت زوایای بالا با شروع از صفر، ۳۰ درجه، ۳۰ درجه، افزایش داده‌ایم. (در جهت مثبت حرکت کردیم). حال اگر با شروع از زاویه‌ی صفر، ۴۵ درجه، ۴۵ درجه، افزایش دهیم، به زوایای معروف پرکاربرد دیگری می‌رسیم:



در این حالت، وسط هر چهار ناحیه هم، ساخته خواهند شد. دقت کنید که وسط نواحی چهارگانه به ترتیب $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ هستند. پس در واقع **مضارب فرد** $\frac{\pi}{۴}$، **وسط چهار ناحیه** خواهند بود.

حال اگر در جهت منفی حرکت کنیم هم، **همین جایگاه‌ها** در دایره‌ی مثلثاتی با اعداد منفی خود را نشان می‌دهند، مثلاً وسط چهار ناحیه به شکل زیر خواهند شد:



تست ۱. **زوایای ۱۰۰۰°، $\frac{۸\pi}{۳}^{rad}$ و ۷^{rad} به ترتیب در کدام نواحی قرار می‌گیرند؟**

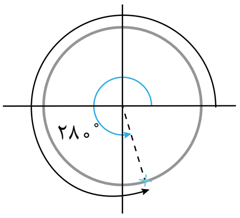
۱) سوم- دوم- اول
۲) چهارم- اول- اول
۳) چهارم- دوم- چهارم
۴) چهارم- دوم- اول

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

برای فهمیدن این‌که ۱۰۰۰° در کدام ناحیه قرار دارد، کافی است آن را به ۳۶۰° تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌ی آن را بیابیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰۰ & ۳۶۰ \\ \cline{2-2} ۷۲۰ & ۲ \\ \cline{1-1} ۲۸۰ & \end{array}$$

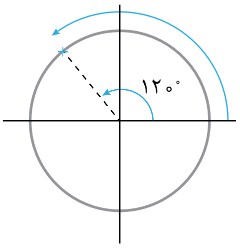
این یعنی برای رسیدن به ۱۰۰۰° باید دو دور کامل $(۲\times ۳۶۰^\circ)$ بعلاوه ۲۸۰° دور دایره مثلثاتی بزنیم. پس در ناحیه چهارم قرار خواهیم گرفت. دقت کنید که وقتی از صفر شروع کنید و دو دور بزنید در همان جایگاه صفر قرار خواهید گرفت:



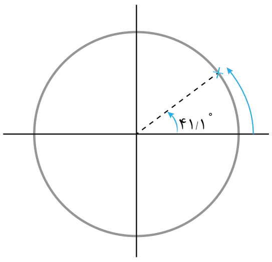
برای زاویه $\frac{۸\pi}{۳}^{rad}$ هم می‌توان آن را به درجه تبدیل کرد:

$$\frac{۸\pi}{۳}^{rad} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi^{rad}} = ۴۸۰^\circ$$

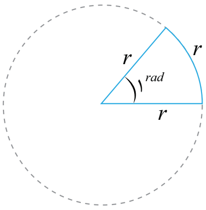
۴۸۰° برابر است با $۱۲۰^\circ + ۳۶۰^\circ$، پس باید یک دور کامل بزنیم بعلاوه‌ی ۱۲۰°، پس این زاویه در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.



بـرای زاویه ۷^{rad} هم می‌توانیم به این شـکل عمل کنیم که آن را به درجـه تبدیل کنیم. می‌دانیم هر ۱^{rad} معادل $۵۷/۳^\circ$ است. پس $۷\times۵۷/۳=۴۰۱/۱^\circ$. این زاویه برابر است با $۳۶۰^\circ+۴۱/۱^\circ$. پس این زاویه برابر است با یک دور کامل بعلاوه $۴۱/۱^\circ$ که در ناحیه اول قرار می‌گیرد:

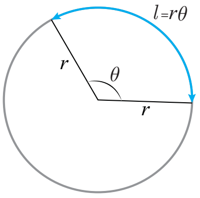


طول کمان

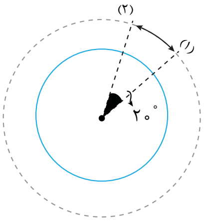


قبلاً زاویه‌ی ۱^{rad} را به این شکل تعریف کردیم که، زاویه‌ای مرکزی است از یک دایره، به طوری‌که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با شعاع آن دایره است:

به همین ترتیب طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۲^{rad} دو برابر شعاع دایره و ... است.



پس طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ^{rad} برابر $l=r\theta$ است، یعنی اگر θ زاویه‌ای مرکزی از یک دایره برحسب رادیان باشد، طول کمان روبه‌رو به آن برابر $l=r\theta$ خواهد بود که در آن r شعاع دایره است:



مثال ٤ ماهواره‌ای در ارتفاع ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین در گردش است. این ماهواره طی یک گردش، زاویه‌ی خود را نسـبت به مرکز زمین ۲۰° تغییر می‌دهد، در این صورت این ماهواره چه مسـافتی را پیموده است؟ (شعاع زمین حدود ۶۴۰۰ کیلومتر است.)

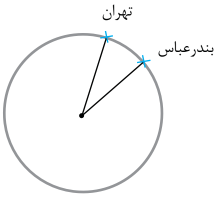
پاسخ: ابتدا زاویه‌ی داده شده را به رادیان تبدیل می‌کنیم:
$$۲۰^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۹}^{rad}$$

می‌دانیم ماهواره در دایره‌ای به شعاع $۶۴۰۰+۸۰۰=۷۲۰۰$ کیلومتر در حرکت است؛ پس مسافت پیموده شده برابر است با:

$$l=r\theta=۷۲۰۰\times\frac{\pi}{۹}=۸۰۰\pi$$

اگر $\pi\simeq۳/۱۴$ در نظر بگیریم، این مسافت برابر است با:
$$۸۰۰\pi\simeq۸۰۰(۳/۱۴)=۲۵۱۲km$$

تست ۲. تهران و بندرعباس تقریباً طول جغرافیایی یکسانی دارند. اگر مسافت تهران تا بندرعباس ۱۳۰۰ کیلومتر و شعاع کره‌ی زمین ۶۵۰۰ کیلومتر در نظر گرفته شود، عرض جغرافیایی بندرعباس حدوداً چند درجه است؟ (عرض جغرافیایی تهران ۳۵ درجه است.) $(\pi\simeq۳)$



۱) ۲۳°
۲) ۲۷°
۳) ۴۷°
۴) ۱۲°

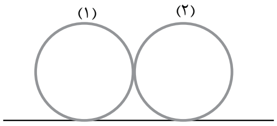
پاسخ: [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

طول کمان $l=۱۳۰۰$ کیلومتر و شعاع $r=۶۵۰۰$ کیلومتر است، پس:
$$l=r\theta\Rightarrow۱۳۰۰=۶۵۰۰\theta\Rightarrow\theta=\frac{۱}{۵}^{rad}$$

حال این زاویه را به درجه تبدیل می‌کنیم:
$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\xrightarrow{\pi\simeq۳}\frac{\frac{۱}{۵}}{۳}=\frac{D}{۱۸۰}\Rightarrow D=۱۲^\circ$$

پس عرض جغرافیایی بندرعباس $۳۵-۱۲=۲۳^\circ$ است.

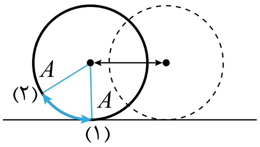
تست ۳. **چرخ‌های (۱) و (۲) برهم مماس هستند. چرخ (۱) چند رادیان بچرخد تا در جایگاه چرخ (۲) قرار بگیرد؟**



۱) π ۲) ۲π

۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴



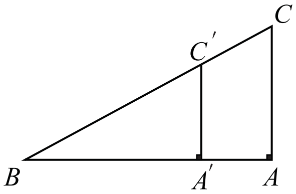
طول کمانی که یک چرخ طی می‌کند، برابر است با مقداری که مرکز چرخ جلو رفته است. به شکل دقت کنید:

در واقع دو قسمت مشخص شده با فلش‌ها هم طول‌اند. فرض کنید نقطه‌ی A روی چرخ ابتدا در جایگاه (۱) بوده و با چرخیدن در جایگاه (۲) قرار بگیرد.

حال راجع به این تست صحبت کنیم. مرکز چرخ به اندازه‌ی دو برابر شعاع $(۲r)$ جابه‌جا شده است. پس طول کمانی که چرخیده برابر $۲r$ است. یعنی زاویه چرخش برابر است با:

$$l = r\theta \Rightarrow ۲r = r\theta \Rightarrow \theta = ۲^{rad}$$

نسبت‌های مثلثاتی

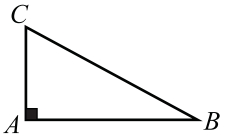


مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'BC'$ را در نظر بگیرید. این دو مثلث متشابهند، چون هر دو دارای یک زاویه‌ی قائمه و زاویه‌ی مشترک B هستند. بنابراین از نسبت تشابه اجزای متناظر در دو مثلث داریم:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{AC}{BC}$$

از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت برای زاویه‌ی حاده‌ی B مشخص در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت **ضلع روبه‌رو** به **وتر** مقدار ثابتی است.

این نسبت را در مثلث قائم‌الزاویه برای زاویه حاده‌ی B، **سینوس** می‌نامیم و می‌نویسیم: $\sin B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}}$



به همین شکل نسبت مثلثاتی **کسینوس** به صورت **ضلع مجاور** به **وتر** تعریف می‌شود و با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد برای یک زاویه‌ی مشخص این مقدار برابر با عدد ثابتی است. یعنی در مثلث ABC به شکل روبه‌رو داریم:

$$\cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad \text{و} \quad \sin B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

نسبت‌های مثلثاتی **تانژانت** و **کتانژانت** هم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

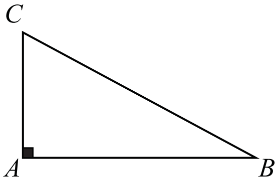
$$\tan B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع روبه‌رو}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{\cos B}{\sin B}$$

نکته از تعریف فوق مشخص است که نسبت‌های **تانژانت** و **کتانژانت** یک زاویه **معکوس** هم هستند. یعنی برای زاویه‌ی دلخواه حاده‌ی B همواره داریم:

$$\tan B = \frac{۱}{\cot B} \quad \text{یا} \quad \tan B \,.\, \cot B = ۱$$

حال می‌خواهیم برای دو زاویه‌ی حاده‌ی B و C در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ تمام نسبت‌های مثلثاتی را بنویسیم:



$$\sin B=\frac{AC}{BC} \qquad \sin C=\frac{AB}{BC}$$
$$\cos B=\frac{AB}{BC} \qquad \cos C=\frac{AC}{BC}$$
$$\tan B=\frac{AC}{AB} \qquad \tan C=\frac{AB}{AC}$$
$$\cot B=\frac{AB}{AC} \qquad \cot C=\frac{AC}{AB}$$

به تساوی‌های مشخص در نسبت‌های مثلثاتی زوایای B و C که با فلش مشخص کردیم، دقت کنید:

$\sin B=\cos C$, $\cos B=\sin C$, $\tan B=\cot C$, $\cot B=\tan C$

نتیجه: اگر دو زاویه باهم متمم باشند (جمعشان ۹۰° باشد)، سینوس و کسینوس آن‌ها و همچنین تانژانت و کتانژانت آن‌ها به شکل ضربدری باهم برابرند. مثلاً:

$\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$, $\cos ۱۰^\circ=\sin ۸۰^\circ$

$\cos ۴۰^\circ=\sin ۵۰^\circ$, $\tan ۲۵^\circ=\cot ۶۵^\circ$

$\cot ۱۷^\circ=\tan ۷۳^\circ$, $\cos ۴۳^\circ=\sin ۴۷^\circ$

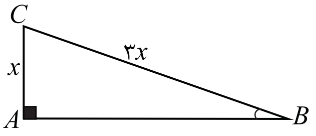
تست ۴. مقدار عبارت $\frac{\tan ۱۰^\circ\times\sin ۵۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$ در کدام بازه است؟

۱) $(۶,+\infty)$ ۲) $(۲,۶)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

می‌دانیم $\sin ۵۰^\circ=\cos ۴۰^\circ$ پس این دو عبارت از صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند و حاصل برابر است با $\tan ۱۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ$ می‌دانیم $\tan ۱۰^\circ=\cot ۸۰^\circ$، پس حاصل عبارت به شکل $\cot ۸۰^\circ\times\tan ۸۰^\circ$ است که می‌دانیم این عبارت برابر است با ۱، چون برای هر زاویه‌ی دلخواه حاده‌ی α، همواره $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ است. پس حاصل عبارت در بازه‌ی $(۰,۲)$ قرار دارد.

تست ۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل $\cos\hat{B}$ کدام است؟



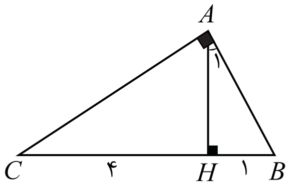
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

می‌دانیم $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$، پس از رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{BC^۲-AC^۲}=\sqrt{(۳x)^۲-x^۲}=\sqrt{۸x^۲}=۲\sqrt{۲}x\Rightarrow\cos\hat{B}=\frac{۲\sqrt{۲}x}{۳x}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

تست ۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. در این صورت $\sin\hat{A}_۱$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

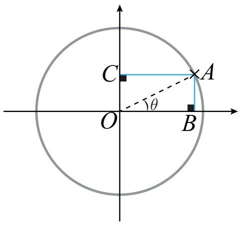
پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم: $AH^۲=BH\cdot CH$، پس:

$$AH^۲=۴\times۱=۴\Rightarrow AH=۲\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}AB^۲=HB^۲+AH^۲=۱^۲+۲^۲=۵\Rightarrow AB=\sqrt{۵}\Rightarrow\sin\hat{A}_۱=\frac{HB}{AB}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

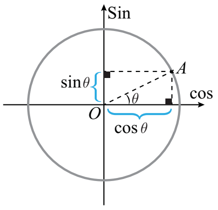
دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ی مثلثاتی ابزاری برای اندازه‌گیری نسبت‌های مثلثاتی است. دایره‌ی مثلثاتی دارای **شعاع یک واحد** است و **مرکز** آن روی **مبدأ مختصات** قرار گرفته است. فرض کنید زاویه‌ی θ در ناحیه‌ی اول قرار گرفته باشد، نقطه‌ی A روی انتهای کمان زاویه‌ی θ قرار گرفته است. نقطه‌ی B پای عمود از A بر محور x ها و نقطه‌ی C پای عمود از A بر محور y ها است. در این صورت داریم:



$$\sin\theta = \frac{AB}{OA} \xrightarrow{OA = \text{شعاع دایره} = ۱} \sin\theta = AB \xrightarrow[AB=OC]{OBAC \text{ مستطیل است}} \sin\theta = OC$$

$$\cos\theta = \frac{OB}{OA} \xrightarrow{OA = ۱} \cos\theta = OB$$

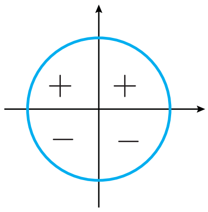


پس **فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور yها تا نقطه‌ی O** برابر **سینوس** θ و **فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور x ها تا نقطه‌ی O** برابر **کسینوس** θ است. بنابراین اگر در دایره‌ی مثلثاتی بخواهیم سینوس یک زاویه را محاسبه کنیم از انتهای کمان آن زاویه بر محور y ها عمود رسم می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود تا مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم، همچنین برای محاسبه‌ی کسینوس یک زاویه از انتهای کمان آن زاویه خطی بر محور x ها عمود می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود از مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم. به شکل روبه‌رو دقت کنید: بنابراین در مبحث مثلثات محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت مختصات نقطه‌ی A به شکل $A(\cos\theta, \sin\theta)$ است. چون طول این نقطه $\cos\theta$ و عرض آن $\sin\theta$ است.

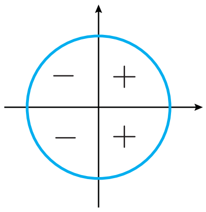
با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زوایای غیر حاده (کوچک‌تر یا مساوی صفر یا بزرگ‌تر یا مساوی ۹۰°) هم تعمیم می‌دهیم.[1]

مشخص است که نقاطی که در ناحیه‌ی دوم مختصات قرار دارند، دارای طول منفی و عرض مثبت هستند، بنابراین اگر انتهای کمان یک زاویه در ناحیه‌ی دوم باشد، کسینوس آن منفی و سینوس آن مثبت است. به همین ترتیب علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر یک از نواحی چهارگانه به شکل زیر است:

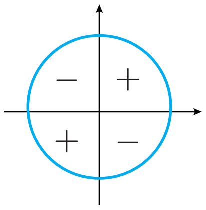
«علامت سینوس»



«علامت کسینوس»



« علامت تانژانت و کتانژانت[2]»



تست ۷. علامت‌های عبارات $\cos ۴$ و $\tan ۵$ به ترتیب چگونه است؟

۱) مثبت - مثبت
۲) منفی - منفی
۳) مثبت - منفی
۴) منفی - مثبت

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

دقت کنید که زوایا برحسب رادیان هستند. آن‌ها را به درجه تبدیل می‌کنیم تا تشخیص دهیم در کدام ناحیه قرار دارند. می‌دانیم هر یک رادیان تقریباً معادل $۵۷/۳^\circ$ است، پس:

$۴^{rad} \times ۵۷/۳ \simeq ۲۲۹/۲^\circ \rightarrow$ ناحیه سوم

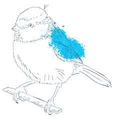
$۵^{rad} \times ۵۷/۳ \simeq ۲۸۶/۵^\circ \rightarrow$ ناحیه چهارم

در ناحیه‌ی دوم، کسینوس منفی است، پس $\cos ۴ < ۰$ و در ناحیه‌ی چهارم، کسینوس مثبت و سینوس منفی است، پس تانژانت منفی است، یعنی $\tan ۵ < ۰$

---

[1] چون نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویه و برای زوایای حاده تعریف کرده بودیم.

[2] از علامت سینوس و کسینوس نتیجه گرفتیم.



تست ۸. **اگر برای زاویه‌ی α داشته باشیم، $\sqrt{\cot\alpha} = -\sin\alpha$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟**

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

چون $\sqrt{\cot\alpha} \ge ۰$ پس: $-\sin\alpha \ge ۰ \Rightarrow \sin\alpha \le ۰ \Rightarrow$ در ناحیه‌ی سوم یا چهارم است. α (*)

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال (با فرجه‌ی زوج) باید نامنفی باشد:

$\cot\alpha \ge ۰ \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ge ۰ \xrightarrow{\sin\alpha \le ۰} \cos\alpha \le ۰ \Rightarrow$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم است. α (**)

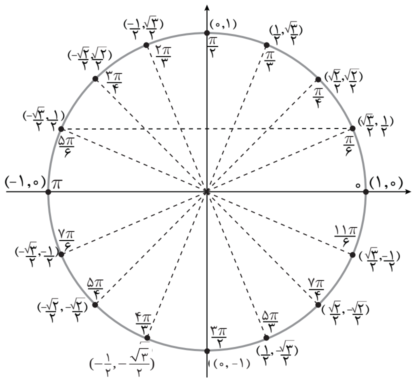
اشتراک موارد (*) و (**) ناحیه‌ی سوم است، دقت کنید که در ناحیه‌ی سوم هر دو نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف و پرکاربرد[1]

قبلاً گفتیم اگر نقطه‌ی A انتهای کمان زاویه‌ی α روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، مختصات آن به شکل $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ است، بنابراین نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به شکل جدول و بار دیگر به شکل مختصات در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم:

زاویه (درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
زاویه (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
سینوس	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	۰
کسینوس	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱-	۰	۱
تانژانت[2]	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	$-\sqrt{۳}$	۱-	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰
کتانژانت[3]	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱-	$-\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

حال همین نسبت‌ها (البته کامل‌تر) را در دایره‌ی مثلثاتی ببینید. در دایره‌ی مثلثاتی فعلاً فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را آورده‌ایم. کمی جلوتر درباره‌ی محور تانژانت صحبت می‌کنیم و آن را هم در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم.



---

[1] ۱- از اثبات محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف می‌گذریم.

[2] ۲ و ۳- برای مقادیر تانژانت و کتانژانت از تقسیم سینوس و کسینوس بر هم استفاده می‌کنیم.

نکته همان‌طور که قبلاً گفتیم مختصات هر نقطه به شکل $(\cos\theta,\sin\theta)$ است. مثلاً در زاویه‌ی $\frac{۲\pi}{۳}$ مختصات نقطه به شکل $(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نوشته شده است. این یعنی $\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ و $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

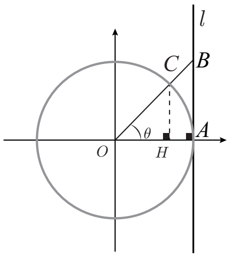
نکته به نقاط روبه‌روی هم (هم‌عرض یا هم‌طول) دقت کنید. مثلاً $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ روبه‌روی هم (هم‌عرض) هستند، پس دارای سینوس برابر و کسینوس قرینه‌اند، یعنی: $\sin\frac{\pi}{۶}=\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\cos\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

نکته به مضارب فرد $\frac{\pi}{۴}$، $\left(\frac{(۲k+۱)\pi}{۴}\right)$ دقت کنید. این نقاط در وسط چهار ناحیه قرار می‌گیرند. سینوس و کسینوس این زوایا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است که با توجه به علامت نسبت مثلثاتی در آن ناحیه می‌توانید علامت آن را تعیین کنید. مثلاً در وسط ناحیه‌ی دوم (چون در ناحیه‌ی دوم سینوس مثبت و کسینوس منفی است.) داریم: $\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

محور تانژانت‌ها

اگر بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی A خطی مماس کنیم، از تشابه مثلث‌های OAB و OCH داریم:

$$\frac{CH}{AB}=\frac{OH}{OA}\xrightarrow[OA=۱]{\substack{CH=\sin\theta\\ OH=\cos\theta}}\frac{\sin\theta}{AB}=\frac{\cos\theta}{۱}\Rightarrow AB=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$



یعنی برای این‌که تانژانت یک زاویه را بیابیم، کافیست از مرکز دایره به انتهای کمان آن زاویه (در اینجا نقطه‌ی C) وصل کنیم و امتداد دهیم تا خط l را در نقطه‌ی B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی B از نقطه‌ی A برابر تانژانت زاویه‌ی θ است. بنابراین خط l را **محور تانژانت‌ها** می‌نامیم.

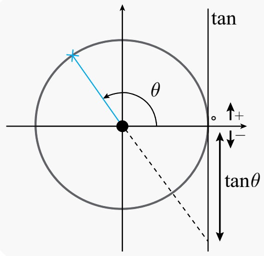
نکته می‌دانیم $\sin ۰=۰$ و $\cos ۰=۱$، پس $\tan ۰=۰$ است. بنابراین با امتداد زاویه‌ی صفر باید محور تانژانت‌ها را در عدد صفر قطع کنیم، پس نقطه‌ی A در واقع صفر محور تانژانت‌ها است.

نکته چون در ناحیه‌ی اول سینوس و کسینوس مثبت است، تانژانت هم مثبت است، بنابراین نقاط بالای نقطه‌ی A روی محور تانژانت‌ها نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت تانژانت هستند.

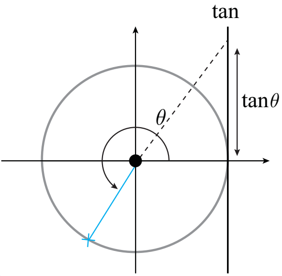
نکته در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است، پس تانژانت هم‌منفی است. ضمناً اگر زاویه در ناحیه‌ی دوم را امتداد دهیم، در همان جهت محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. پس در جهت مخالف امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را در نقطه‌ای پایین نقطه‌ی A قطع کند. بنابراین نقاط پایین نقطه‌ی A نشان دهنده‌ی مقادیر منفی روی محور تانژانت‌ها هستند.

تذکر

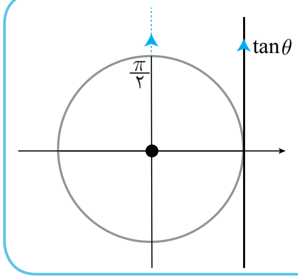
با این تعاریف می‌توان علامت تانژانت (و کتانژانت) را با محور تانژانت‌ها هم پیدا کرد.



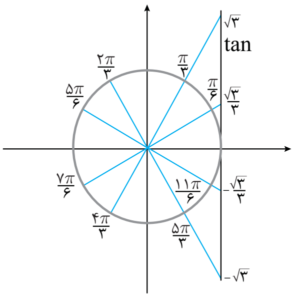
نکته در زوایای ناحیه‌ی سوم هم به همین شکل باید امتداد زاویه در جهت مخالف را برای پیدا کردن تانژانت زاویه مذکور، مورد‌نظر داشته باشیم:

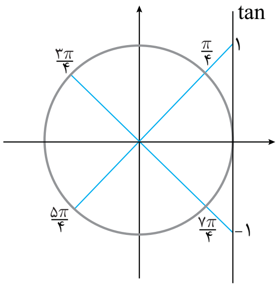


نکته از قبل می‌دانستیم $\tan\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است (چون $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ و $\cos\frac{\pi}{۲}=۰$). این موضوع را از دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها هم می‌توان فهمید. اگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ را امتداد دهیم هرگز محور تانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چرا که با آن موازی است. این موضوع برای زاویه $\frac{۳\pi}{۲}$ هم صادق است.



نکته تانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور تانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

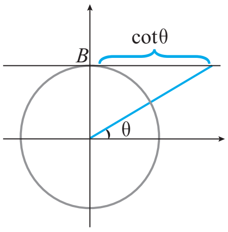

زوایای مرتبط با °۳۰


زوایای مرتبط با °۴۵ (وسط چهار ناحیه)

تذکر

با تصور کردن زوایای مرتبط با °۳۰ و °۴۵ در دایره‌ی مثلثاتی می‌توانید به راحتی تانژانت آن‌ها را حفظ کنید. همچنین دقت کنید که در وسط ناحیه‌ی اول و سوم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر ۱ و در وسط ناحیه‌ی دوم و چهارم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر ۱- است.

ویژه دکترها: محور کتانژانت‌ها[1]



مشابه با محور تانژانت، با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد، اگر خطی در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس کنیم، محور کتانژانت‌ها را رسم کرده‌ایم، چرا که اگر فاصله امتداد هر زاویه را از نقطه‌ی B بیابیم، کتانژانت آن زاویه را نشان می‌دهد:

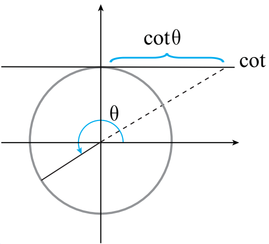
نکته چون $\cot\frac{\pi}{۲}=۰$ است، پس نقطه‌ی B صفر محور کتانژانت‌ها است.

نکته چون در ناحیه‌ی اول و دوم به ترتیب مقدار کتانژانت مثبت و منفی است، نقاط راست نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت و نقاط چپ نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر منفی کتانژانت روی محور است.

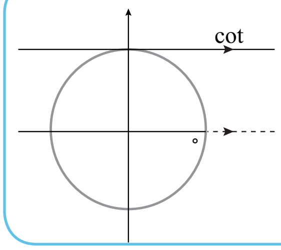
---

[1] محور کتانژانت‌ها در کتاب درسی نیست ولی یاد گرفتن آن ممکن است سرعت شما را در حل بعضی تست‌ها افزایش دهد.

نکته در ناحیه‌ی سوم و چهارم که امتداد زاویه محور کتانژانت را قطع نمی‌کند، آن را در جهت خلاف آن امتداد می‌دهیم:

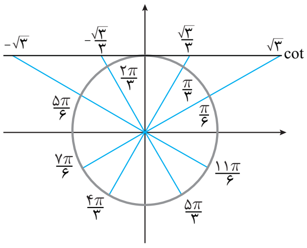


نکته از قبل می‌دانستیم $\cot ۰$ تعریف نشده است (چون $\cos ۰ = ۱$ و $\sin ۰ = ۰$). این موضوع را می‌توان از دایره‌ی مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها هم فهمید، چرا که اگر زاویه‌ی صفر را امتداد دهیم هرگز محور کتانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چون با آن موازی خواهد بود.

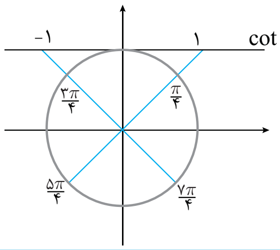


نکته کتانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور کتانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

زوایای مرتبط با °۳۰



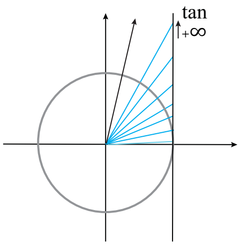
زوایای مرتبط با °۴۵ (وسط چهار ناحیه)

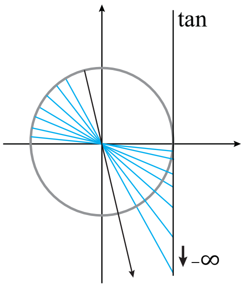


محدوده‌ی نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم هر نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی به شکل $A(\cos\theta, \sin\theta)$ است. همچنین واضح است که هر نقطه روی دایره دارای طول و عرض، درمحدوده‌ی $[-۱ , ۱]$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر زاویه دلخواه θ : $-۱ \leq \sin\theta \leq ۱$ و $-۱ \leq \cos\theta \leq ۱$ برخلاف نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت محدودیتی ندارند و می‌توانند خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشند. مثلاً برای نسبت مثلثاتی تانژانت با افزایش زاویه‌ی θ از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ روند افزایش تانژانت بدون هیچ محدودیتی ادامه پیدا می‌کند و با نزدیک شدن θ به $\frac{\pi}{۲}$ مقدار تانژانت خیلی بزرگ شده است.[۱]

همچنین به محض این‌که θ از $\frac{\pi}{۲}$ عبور کند، مقدار تانژانت به شدت کاهش پیدا کرده و خیلی کوچک می‌شود.[۲] پس از آن با افزایش θ از $\frac{\pi}{۲}$ به سمت π تانژانت **رشد کرده** و به صفر نزدیک می‌شود.





---

[۱] بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{۲}^-} \tan\theta = +\infty$

[۲] بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{۲}^+} \tan\theta = -\infty$

روی محور کتانژانت‌ها یا با استفاده از خواص نامساوی‌ها می‌توان این موضوع را برای کتانژانت هم نشان داد. پس می‌توان گفت:

$$-\infty<\tan\theta<+\infty \quad , \quad -\infty<\cot\theta<+\infty$$

یعنی تانژانت و کتانژانت یک زاویه ممکن است برابر هر عدد حقیقی باشند ولی سینوس و کسینوس یک زاویه عددی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ خواهند بود.

تست ۹. حداکثر مقدار عبارت $A=۲\sin\theta-۳$ از حداقل آن چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: [✓ ۱] ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $-۱\le\sin\theta\le۱$، پس:

$$-۲\le۲\sin\theta\le۲\Rightarrow-۵\le۲\sin\theta-۳\le-۱$$

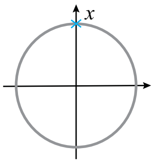
یعنی حداکثر این عبارت ۱- و حداقل آن ۵- است. پس حاصل نهایی $-۱-(-۵)=۴$ است.

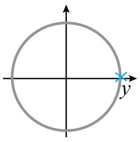
تست ۱۰. اگر $\sin x+\cos y=۲$ باشد، حاصل $\cot x+\sin y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

چون حداکثر مقدار $\sin x$ و $\cos y$، برابر ۱ است، پس حداکثر مقدار مجموع آن‌ها هم برابر ۲ است و این مجموع زمانی برابر ۲ خواهد شد که هر دو برابر با ۱ (یعنی حداکثرشان) باشند:

$\sin x=۱\xrightarrow{\text{جایگاه } x \text{ در دایره}}$  $\Rightarrow\cos x=۰\Rightarrow\cot x=۰$

$\cos y=۱\xrightarrow{\text{جایگاه } y \text{ در دایره}}$  $\Rightarrow\sin y=۰$

پس $\cot x+\sin y=۰$.

تست ۱۱. کم‌ترین مقدار عبارت $B=\frac{۳}{۲\sin^۲x+۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

از نامساوی $-۱\le\sin x\le۱$ شروع می‌کنیم:

$$-۱\le\sin x\le۱\Rightarrow۰\le\sin^۲x\le۱\Rightarrow۰\le۲\sin^۲x\le۲\Rightarrow۱\le۲\sin^۲x+۱\le۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\le\frac{۱}{۲\sin^۲x+۱}\le۱\Rightarrow۱\le\frac{۳}{۲\sin^۲x+۱}\le۳$$

پس کم‌ترین مقدار این عبارت برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار آن برابر ۳ است.

تست ۱۲. کم‌ترین مقدار عبارت $A=\cos^۲x-\cos x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱-

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

راه‌حل اول: عبارت داده شده را مربع کامل می‌کنیم:

$$A=(\cos x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}\xrightarrow{(\cos x-\frac{۱}{۲})^۲\ge۰}(\cos x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}\ge-\frac{۱}{۴}$$

پس حداقل مقدار این عبارت $-\frac{۱}{۴}$ است. (این مقدار به ازای $\cos x=\frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آید.)

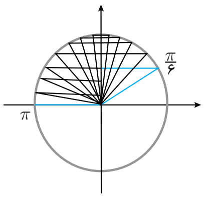
راه‌حل دوم: از تغییر متغیر $\cos x=t$ عبارت داده شده را به شکل یک عبارت درجه دوم درمی‌آوریم که حداقل آن $-\frac{\Delta}{۴a}$ خواهد بود:

$$\cos x=t\Rightarrow A=t^۲-t\Rightarrow A_{\min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱}{۴(۱)}=-\frac{۱}{۴}$$

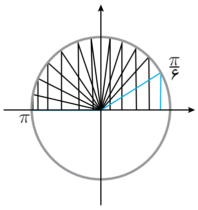
تذکر دقت کنید که این مقدار به ازای $t=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.

اگر محدوده‌ی تغییرات زاویه در صورت سؤال داده شود، با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، می‌توان محدوده‌ی تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را یافت. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ⑤ اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\pi$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ را بیابید.



پاسخ: با رسم دایره‌ی مثلثاتی محدوده‌ی تغییرات هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:
همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص است، در ابتدا $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است و با افزایش زاویه از $\frac{\pi}{۶}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ مقدار سینوس افزایش می‌یابد تا در $\frac{\pi}{۲}$ که $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ می‌شود و سپس با افزایش زاویه x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π مقدار سینوس روند کاهشی دارد تا در π که $\sin\pi=۰$ خواهد بود.
پس حداکثر مقدار آن برابر ۱ و حداقل آن برابر صفر خواهد بود. البته دقت کنید که $\frac{\pi}{۲}$ عضو بازه $(\frac{\pi}{۶},\pi)$ است ولی π عضو این بازه نیست، پس مقدار سینوس برابر ۱ می‌شود ولی برابر صفر نمی‌شود. یعنی: $۰<\sin x\le ۱$

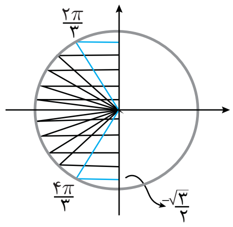


در نسبت مثلثاتی کسینوس هم با شروع از $\frac{\pi}{۶}$ داریم $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و با افزایش x از $\frac{\pi}{۶}$ تا π دائماً کسینوس کاهش می‌یابد تا π که در آن $\cos\pi=-۱$ است، پس: $-۱<\cos x<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست ۱۳. اگر $\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، حداقل مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴



ابتدا از محدوده‌ی تغییرات x، بازه‌ی تغییرات $۲x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}\le ۲x\le\frac{۴\pi}{۳}$$

حال تغییرات سینوس را در بازه‌ی $[\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ پیدا می‌کنیم:

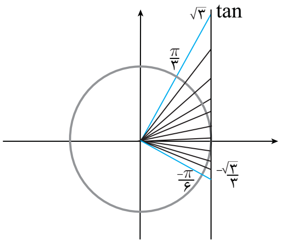
معلوم است در این بازه کم‌ترین مقدار سینوس برابر $\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

تست ۱۴. اگر $x\in[-\frac{\pi}{۲},۰]$، آن‌گاه $\tan(x+\frac{\pi}{۳})$ در کدام بازه است؟

۱) $[-\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}]$ ۲) $[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳}]$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $[-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

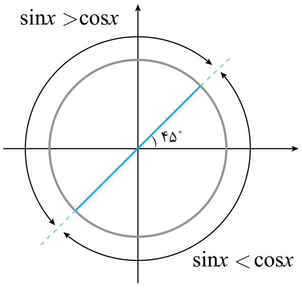
از بازه‌ی $-\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰$ بازه‌ی تغییرات کمان $(x+\frac{\pi}{۳})$ را پیدا می‌کنیم:

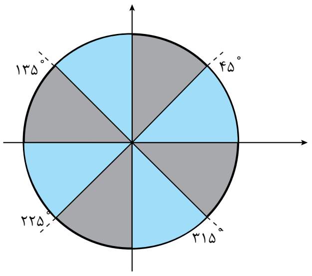


$$-\frac{\pi}{۲}\le x\le ۰\Rightarrow -\frac{\pi}{۶}\le x+\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\text{دایره‌ی مثلثاتی}}$$

از دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها معلوم است که $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\le\tan(x+\frac{\pi}{۳})\le\sqrt{۳}$.

نکته در دایره‌های مثلثاتی زیر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و همچنین تانژانت و کتانژانت را با هم مقایسه کرده‌ایم. بهتر است بعد از درک علت این محدوده‌ها، آن‌ها را به یاد بسپارید:





در نواحی روشن‌تر $\cot x > \tan x$ و در نواحی تیره‌تر $\tan x > \cot x$ است.

تست ۱۵. **چه تعداد از نامساوی‌های زیر صحیح هستند؟**

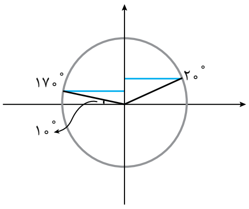
الف) $\sin ۱۷۰^\circ > \sin ۲۰^\circ$ **ب)** $\cos ۲ > \cos ۳$ **ج)** $\sin ۱۰۰۰^\circ > \cos ۱۰۰۰^\circ$ **د)** $\tan ۱ > \cot ۱$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

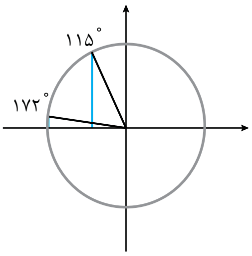
پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

بررسی همه‌ی موارد:

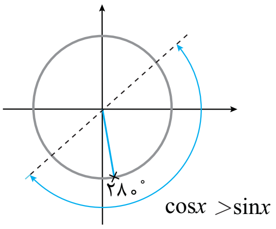
الف) $\sin ۲۰^\circ > \sin ۱۷۰^\circ$



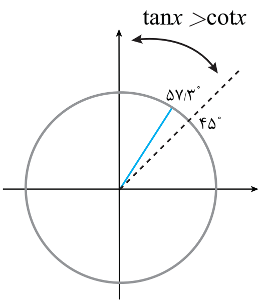
ب) دقت کنید که $۱۱۵^\circ \simeq ۲^{rad}$ و $۱۷۲^\circ \simeq ۳^{rad}$. از شکل معلوم است که $\cos ۱۱۵^\circ > \cos ۱۷۲^\circ$



ج) دقت کنید که $۱۰۰۰^\circ = ۲(۳۶۰^\circ) + ۲۸۰^\circ$، پس ۱۰۰۰° برابر با دو دور کامل و ۲۸۰° است. یعنی در جایگاه ۲۸۰° قرار می‌گیرد و در این جایگاه کسینوس از سینوس بزرگ‌تر است.



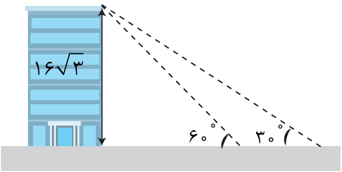
د) دقت کنید $۱^{rad} \simeq ۵۷/۳^\circ$ و این زاویه در محدوده‌ای است که در آن تانژانت از کتانژانت بیش‌تر است.



پس موارد «ب» و «د» صحیح هستند.

کاربرد مثلثات

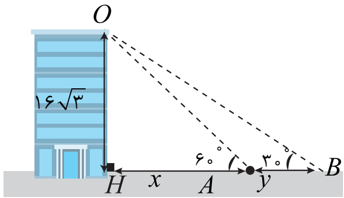
چند مثال از کاربردهای ساده‌ی مثلثات و با تعریف نسبت‌های مثلثاتی را ببینید:



مثال ۶ **یک شخص در جلوی یک ساختمان به ارتفاع $۱۶\sqrt{۳}$ متر آن را با زاویه ۶۰° می‌بینند. این شخص چقدر باید از ساختمان دور شود تا آن را با زاویه‌ی ۳۰° ببیند؟**

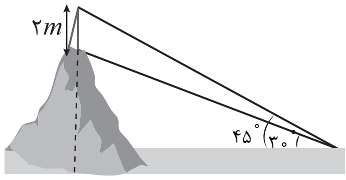
پاسخ: اگر فاصله‌ی شخص تا پای آپارتمان در حالت اول را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\overset{\Delta}{OAH} : \tan ۶۰^\circ = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow x = ۱۶$$



همچنین در مثلث OHB داریم:

$$\overset{\Delta}{OHB} : \tan ۳۰^\circ = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۱۶+y} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۱۶+y} \Rightarrow ۴۸ = ۱۶ + y \Rightarrow y = ۳۲$$



تست ۱۶. **یک سرباز تپه‌ای به ارتفاع h را با زاویه ۳۰° و نوک دکل بالای تپه را به زاویه ۴۵° می‌بینند. اگر دکل دارای ارتفاع ۲ متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟**

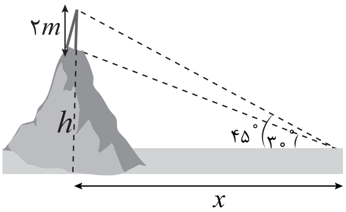
۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳}+۱$

۳) $\sqrt{۳}-۱$

۴) ۲

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

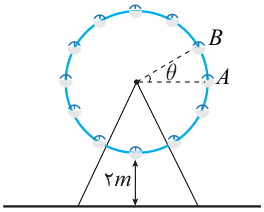


اگر فاصله‌ی افقی سرباز تا تپه را x درنظر بگیریم، داریم:

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{h+۲}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{h+۲}{x} \Rightarrow x = h+۲ \qquad (*)$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{۳}$$

$$(*) \xrightarrow{x=h\sqrt{۳}} h\sqrt{۳} = h+۲ \Rightarrow h(\sqrt{۳}-۱) = ۲ \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱} = \sqrt{۳}+۱$$



تست ۱۷. **کابین A از یک چرخ و فلک در راستای افقی قرار گرفته است. با چرخش چرخ و فلک به اندازه‌ی زاویه‌ی θ کابین A در جایگاه B قرار می‌گیرد. در این صورت ارتفاع کابین A از سطح زمین چقدر است؟ (شعاع چرخ و فلک ۱۰ متر است.)**

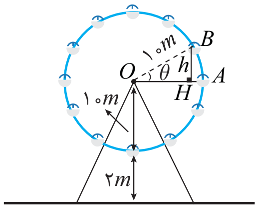
۱) $۱۰\sin\theta$

۲) $۱۲+۱۰\cos\theta$

۳) $۲+۱۰\sin\theta$

۴) $۱۲+۱۰\sin\theta$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]



طبق شکل ارتفاع کابین در نقطه‌ی B برابر با $h+۱۲$ است. در مثلث OBH داریم:

$\sin\theta = \frac{BH}{OB} \xrightarrow[OB=۱۰]{BH=h} \sin\theta = \frac{h}{۱۰} \Rightarrow h = ۱۰\sin\theta \Rightarrow$ ارتفاع کابین در نقطه‌ی B $= ۱۲+۱۰\sin\theta$

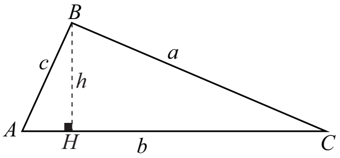
مثال ۷ **در تست قبل اگر چرخ و فلک هر دو دقیقه یک دور بزند، ارتفاع کابین را بعد از زمان t (برحسب ثانیه) به‌دست آورید.**

پاسخ: می‌دانیم در $۱۲۰s$، چرخ و فلک $۲\pi^{rad}$ می‌چرخد، پس اگر در زمان t به اندازه‌ی θ چرخیده باشد، داریم:

$$\frac{\theta}{۲\pi} = \frac{t}{۱۲۰} \Rightarrow \theta = \frac{\pi t}{۶۰} \Rightarrow h = ۱۲+۱۰\sin\theta = ۱۲+۱۰\sin\frac{\pi t}{۶۰}$$

مساحت مثلث

می‌دانیم در مثلث مساحت برابر نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده است:



$$S=\frac{hb}{۲}$$

از طرفی در مثلث ABH داریم:

$$\sin\hat{A}=\frac{h}{c}\Rightarrow h=c\sin\hat{A}$$

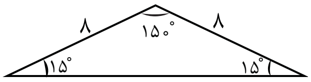
با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$S=\frac{c\sin\hat{A}\times b}{۲}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

پس مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌هاست. به همین ترتیب می‌توان مساحت را از روابط زیر هم به‌دست آورد:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ba\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$$

مثال ۸ در یک مثلث متســاوی الساقین، اندازه‌ی هر ســاق برابر ۸ واحد و زاویه مجاور به ساق برابر ۱۵ درجه است. مساحت این مثلث را بیابید.



پاسخ: مشخص است که زاویه‌ی رأس برابر است با:

$$۱۸۰-۲(۱۵)=۱۵۰^{\circ}$$

حال از رابطه‌ای که برای مساحت ارائه کردیم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\times \sin ۱۵۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\times\frac{۱}{۲}=۱۶$$

تست ۱۸. مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ کدام است؟

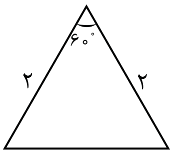
۱) $\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) ۲

پاسخ: [✓ ۱] ۲ ۳ ۴



می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع زوایای داخلی برابر ۶۰° هستند:

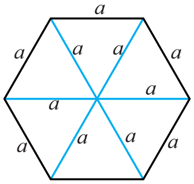
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۶۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a، مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times a\times a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

نکته هر شش ضلعی منتظم با رسم قطرهای بزرگ به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌شود.
اگر طول ضلع شش ضلعی را برابر a درنظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

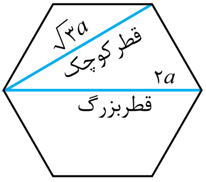
$$S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$$

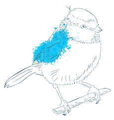


چند نکته‌ی تکمیلی درباره‌ی شش ضلعی منتظم

نکته در هر شش ضلعی منتظم به ضلع a با وصل کردن هر رأس به رأس روبه‌رویی، **قطر بزرگ** آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $۲a$ است.

نکته در هــر شــش ضلعی منتظم بــا ضلع a با وصل کردن هر رأس بــه رأس مجاور با رأس روبه‌رویی، **قطر کوچک** آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $\sqrt{۳}a$ است.





تست ۱۹. **در یک شش ضلعی منتظم اندازه‌ی قطر کوچک ۴ واحد است. در این صورت مساحت آن چقدر است؟**

۱) ۸

۲) $۸\sqrt{۳}$

۳) $۱۶\sqrt{۳}$

۴) ۱۶

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

اگر اندازه‌ی ضلع شش ضلعی را a درنظر بگیریم، طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ است. پس:

$$\sqrt{۳}a=۴\Rightarrow a=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۴}{\sqrt{۳}})^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱۶}{۳}=۸\sqrt{۳}$$

نکته قبلاً گفتیم مساحت مثلث ABC برابر است با:

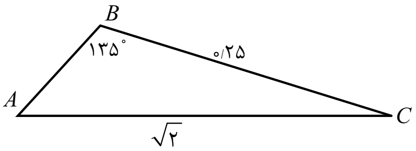
$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

با ساده کردن $\frac{۱}{۲}$ از عبارات و تقسیم آن‌ها بر abc داریم:

$$\frac{ab\sin\hat{C}}{abc}=\frac{ac\sin\hat{B}}{abc}=\frac{bc\sin\hat{A}}{abc}\Rightarrow\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{A}}{a}$$

این رابطه به **قضیه‌ی سینوس‌ها** معروف است. این قضیه بیان می‌کند که در هر مثلث **نسبت سینوس هر زاویه به ضلع روبه‌روی آن** عددی ثابت است.

تست ۲۰. **در مثلث مقابل اندازه‌ی $\cos\hat{A}$ کدام است؟**



۱) $\pm\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$

۲) $-\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها، ابتدا $\sin\hat{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۱۳۵^\circ}{\sqrt{۲}}=\frac{\sin\hat{A}}{۰/۲۵}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sin\hat{A}}{۰/۲۵}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۸}$$

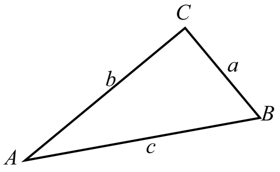
می‌دانیم $\cos\hat{A}=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\hat{A}}$، پس:

$$\cos\hat{A}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱}{۸})^{۲}}=\pm\sqrt{\frac{۶۳}{۶۴}}=\pm\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$$

دقت کنید که چون زاویه‌ی B منفرجه است، بنابراین زاویه‌ی A حاده است، پس $\cos\hat{A}>۰$ است. بنابراین $\cos\hat{A}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$ صحیح است.

ویژه دکترها: قضیه‌ی کسینوس‌ها

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها که اثبات آن خارج از قالب و چهارچوب کتاب است، می‌توان با داشتن دو ضلع از یک مثلث و زاویه بین آن‌ها اندازه‌ی ضلع سوم را محاسبه کرد. یعنی در هر مثلث مفروض ABC همواره روابط زیر برقرارند:



$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\hat{C}$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\hat{A}$$

$$b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos\hat{B}$$

تست ۲۱. **در یک مثلث زاویه‌ی روبه‌رو به یک ضلع با طول $\sqrt{۱۹}$ برابر ۶۰° است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع مثلث ۵ باشد، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟**

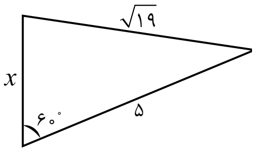
۱) ۲ یا ۳

۲) ۳ یا ۶

۳) ۲ یا ۵

۴) ۳ یا ۵

پاسخ: [✓ ۱] ۲ ۳ ۴



اندازه‌ی ضلع سوم را x درنظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها، داریم:

$$(\sqrt{۱۹})^{۲}=x^{۲}+۵^{۲}-۲(۵)(x)\cos ۶۰^\circ\Rightarrow ۱۹=x^{۲}+۲۵-۱۰x\times(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۵x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲\quad\text{یا}\quad x=۳$$

تست ۲۲. اگر در یک مثلث رابطه‌ی $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + \sqrt{۳}ab$ برقرار باشد، زاویه‌ی $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) ۶۰° ۲) ۳۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\hat{C}$$

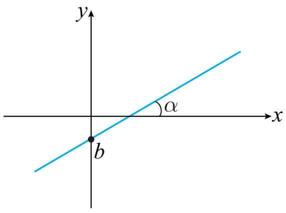
از طرفی از صورت سؤال داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + \sqrt{۳}ab$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۰ = \sqrt{۳}ab + ۲ab\cos\hat{C} \Rightarrow ۲ab\cos\hat{C} = -\sqrt{۳}ab \Rightarrow \cos\hat{C} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۱۵۰^\circ$$

شیب خط

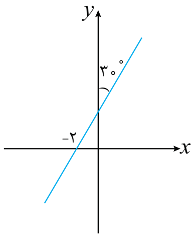
می‌دانیم معادله‌ی هر خط را می‌توان به شکل $y = ax + b$ هم نوشت که در آن a شیب و b عرض از مبدأ خط (همان محل برخورد خط با محور y ها) نام دارد. می‌توان نشان داد شیب خط (a) همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.



$$\text{شیب خط} = a = \tan\alpha$$

$$\text{معادله خط} \Rightarrow y = ax + b$$

تست ۲۳. معادله‌ی خط روبه‌رو کدام است؟



۱) $y = \sqrt{۳}x - ۲\sqrt{۳}$

۲) $y = \sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳}$

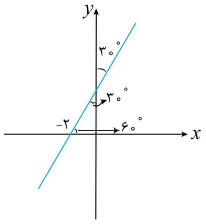
۳) $y = \frac{x}{\sqrt{۳}} + \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۴) $y = \frac{x}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

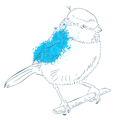
معادله‌ی خط را به شکل $y = ax + b$ در نظر می‌گیریم. معلوم است، زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر ۶۰° است. پس شیب آن $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ است.

بنابراین معادله‌ی آن را به شکل $y = \sqrt{۳}x + b$ در نظر می‌گیریم. حال نقطه‌ی $(-۲, ۰)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:



$$۰ = -۲\sqrt{۳} + b \Rightarrow b = ۲\sqrt{۳}$$

پس معادله‌ی این خط به شکل $y = \sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳}$ است.



پرسش‌های سطح ساده

۱. زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲۰° ۲) ۱۸° ۳) ۱۰° ۴) ۹°

۲. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $۲۵۲^\circ=\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان ۲) $۱۱۲/۵^\circ=\frac{۵\pi}{۸}$ رادیان ۳) $۳=(\frac{۵۴۰}{\pi})^\circ$ رادیان ۴) $۱۰۰^\circ=\frac{۹}{۵}$ رادیان

۳. مجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه برابر ۶۰ و اختلاف آن‌ها برحسب واحد رادیان برابر $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۲۵° ۲) ۲۴° ۳) ۱۵° ۴) ۱۴°

۴. اگر زاویه‌ی ۳۹۱۵° را به شکل $۲k\pi+\alpha$ رادیان بنویسیم و k عددی طبیعی باشد و $۰<\alpha<۲\pi$ باشد، در این صورت α کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۵. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

الف) یک رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با قطر دایره مساوی است.

ب) یک رادیان تقریباً برابر ۵۳ درجه است.

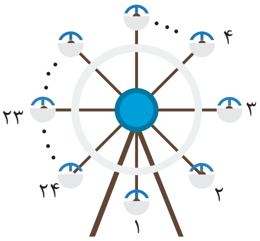
ج) اگر اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه را در $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب کنیم، اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶. در مدت زمان ۴۲ دقیقه، عقربه‌ی ساعت شمار چند رادیان دوران می‌کند؟

۱) $\frac{۹\pi}{۳۰}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۶۰}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۶۰}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۳۰}$

۷. یک چرخ و فلک مطابق شکل ۲۴ کابین دارد. در لحظه‌ی شروع حرکت چرخ و فلک، کابین شماره‌ی یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۵۳\pi}{۶}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره‌ی یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۱

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۸. انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی -۱۲ رادیان در کدام ناحیه‌ی دایره مثلثاتی واقع است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹. زوایای $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند؟ (کتاب درسی)

۱) سوم و اول ۲) سوم و دوم ۳) چهارم و اول ۴) چهارم و دوم

۱۰. انتهای کمان کدام‌یک از زوایای زیر، در دایره‌ی مثلثاتی، با بقیه زوایا «هم ناحیه» نیست؟

۱) ۱۷ رادیان ۲) $\frac{۸\pi}{۹}$ رادیان ۳) (-۳) رادیان ۴) $\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان

۱۱. انتهای کمان‌های مقابل به زوایای $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ را روی دایره‌ی مثلثاتی، به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

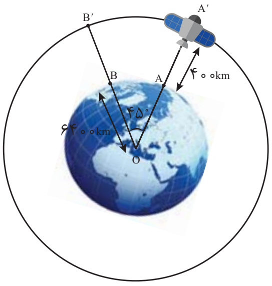
۱) مستطیل ۲) مربع ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) ذوزنقه

۱۲. زاویه‌ای با اندازه‌ی ۵۲۰° با زاویه‌ی θ هم انتهاست. اندازه‌ی زاویه‌ی θ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۴۰°
۲) -۵۶۰°
۳) $\frac{۴۴\pi}{۹}^{rad}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}^{rad}$

۱۳. طول برف پاک‌کن اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برف پاک‌کن، کمانی به اندازه‌ی ۱۲۰° طی کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵۰/۷۲
۲) ۵۰/۲۴
۳) ۵۲/۷۲
۴) ۵۲/۲۴

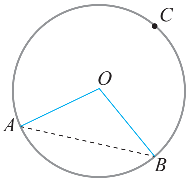


۱۴. ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل درنظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵° می‌سازند، رصد شوند، این ایستگاه تقریباً چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره‌ی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید. *(کتاب درسی)*

۱) ۵۳۲۸
۲) ۵۲۳۸
۳) ۵۳۳۸
۴) ۵۲۲۸

۱۵. دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\frac{۴}{۵}$ درجه
۲) $\frac{۴}{۵}$ رادیان
۳) $\frac{۵}{۴}$ درجه
۴) $\frac{۵}{۴}$ رادیان



۱۶. در شکل مقابل، شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان ACB برابر ۱۶π است. طول وتر AB کدام است؟

۱) ۱۲
۲) $۱۲\sqrt{۲}$
۳) $۱۲\sqrt{۳}$
۴) ۲۴

۱۷. حاصل عبارت $A=\frac{۳\cot\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos\pi}{۴\tan\frac{\pi}{۶}-\sqrt{۳}\cos^{۲}\frac{\pi}{۴}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۸. اگر $۲\sin a-۵\cos b=۷$ باشد، مقدار عبارت $\sin a\cos b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۳}{۱۵}$
۲) ۱
۳) ۱-
۴) $-\frac{۱۳}{۴۹}$

۱۹. در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه‌ی دلخواه α، رابطه‌ی $\sin\alpha<\cos\alpha$ برقرار است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۲۰. کدام‌یک از نامساوی‌های زیر صحیح نیست؟

۱) $\sin ۷۰^\circ>\sin ۴۰^\circ$
۲) $\cos ۷۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$
۳) $\tan ۷۰^\circ<\tan ۴۰^\circ$
۴) $\cot ۷۰^\circ<\cot ۴۰^\circ$

۲۱. مقدار کدام‌یک از گزینه‌های زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب واحد رادیان هستند.)

۱) $\sin ۷$
۲) $\sin ۸$
۳) $\sin ۹$
۴) $\sin ۱۰$

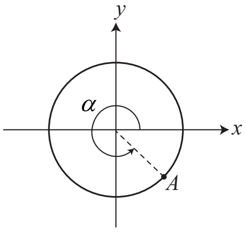
۲۲. کدام‌یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زاویه برحسب واحد رادیان است.)

۱) $\sin(-۸)$
۲) $\cos(-۸)$
۳) $\tan(-۸)$
۴) $\cot(-۸)$

۲۳. اگر $\tan\alpha\sin\alpha<۰$ و $\cot\alpha+\tan\alpha>۰$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۲۴. مطابق شکل نقطه‌ی $A(\frac{۸}{۱۷},-\frac{۱۵}{۱۷})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin\alpha-\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۳}{۱۷}$
۲) $-\frac{۲۳}{۱۷}$
۳) $\frac{۷}{۱۷}$
۴) $-\frac{۷}{۱۷}$

۲۵. نقطه‌ی $P(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. اگر این نقطه را ۲۱۰° در جهت منفی مثلثاتی دوران دهیم، طول نقطه‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) صفر

۲۶. اگر $\sin x+\cos y=۲$ باشد، حاصل $\sin(x+y)-\cos(x-y)$ کدام است؟ $(۰\le x,y<۳۶۰^\circ)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱-
۴) صفر

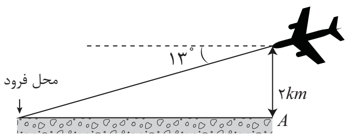
۲۷. اگر کمان x در محدوده‌ی $۴۵^\circ\le x\le ۱۵۰^\circ$ تغییر کند، حدود تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\le\sin x\le ۱\ ,\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\le\cos x\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}\le\sin x\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\le\cos x\le\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\sin x\le ۱\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\cos x\le\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $۰\le\sin x\le ۱\ ,\ -۱\le\cos x\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۸. اگر $-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۳}$ و $\cos x=\frac{۲m-۱}{۳}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

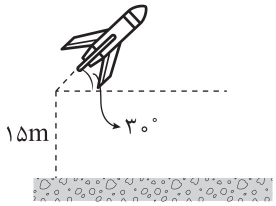
۱) $-\frac{۱}{۴}<m<\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۵}{۴}<m<۲$
۳) $-\frac{۱}{۴}<m\le\frac{۵}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۴}<m\le ۲$

۲۹. یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما تقریباً در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می آید؟ $(\tan ۱۳^\circ\simeq ۰/۲۳)$ *(کتاب درسی)*



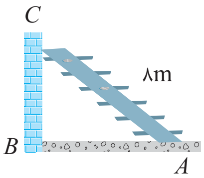
۱) ۹۲۹۵ متر
۲) ۸۲۹۵ متر
۳) ۹۶۹۵ متر
۴) ۸۶۹۵ متر

۳۰. یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی ۳۰° پرتاب می‌شود. پس از طی کردن ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۲۰۱۵
۲) ۱۰۱۵
۳) $۱۰۰۰\sqrt{۳}+۱۵$
۴) ۱۰۰۰

۳۱. مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار دارد. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین ۳۰° باشد، فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟ *(کتاب درسی)*



۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۸\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۲}$

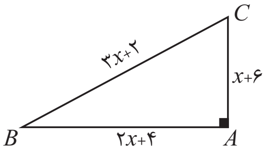
۳۲. علی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۹
۴) ۱۵

۳۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{B}=۹۰^\circ)$، نسبت دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{۱}{۳}$ است. در این مثلث حاصل $\sin^۲ C\ .\ \cos^۲ C$ کدام است؟

۱) ۰/۰۳
۲) ۰/۳
۳) ۰/۰۹
۴) ۰/۹

۳٤. در مثلث شکل مقابل، حاصل عبارت $(\tan C+\cot C)(\sin B+\cos B)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳۵}{۶}$

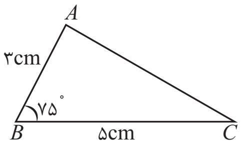
۲) ۵

۳) $\frac{۳۵}{۱۲}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

۳۵. مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟ $(\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶)$

(کتاب درسی)



۱) ۷/۶

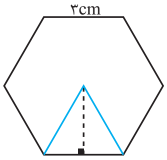
۲) ۷/۲

۳) ۷/۴

۴) ۷/۸

۳۶. مساحت شش ضلعی منتظم شکل مقابل کدام است؟

(کتاب درسی)



۱) $۱۸\sqrt{۳}$

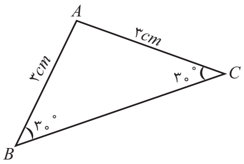
۲) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $۹\sqrt{۳}$

۳۷. مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟

(کتاب درسی)



۱) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

۳۸. مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازه‌ی قطرهای آن برابر ۱۲ و ۱۶ و زاویه‌ی بین دو قطرش برابر ۳۰° باشد، چقدر است؟

۱) ۲۴

۲) ۴۸

۳) ۳۶

۴) ۷۲

۳۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دارای یک زاویه‌ی ۳۰° است، طول وتر برابر ۱۲ است. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۳}$

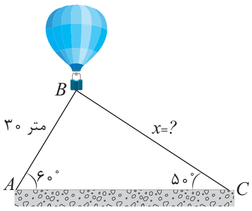
۲) $۳۶\sqrt{۳}$

۳) $۱۸\sqrt{۲}$

۴) $۳۶\sqrt{۲}$

٤۰. یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است طول طناب دوم کدام است؟ $(\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶)$

(کتاب درسی)



۱) $۱۷/۷۴\sqrt{۳}$

۲) $۱۸/۷۴\sqrt{۳}$

۳) $۱۹/۷۴\sqrt{۳}$

۴) $۲۰/۷۴\sqrt{۳}$

٤۱. زاویه‌ی خطوط $۳x+۱=۰$ و $\sqrt{۳}x+y-۶=۰$ با جهت مثبت محور x ها به ترتیب کدام است؟

۱) صفر و ۱۲۰°

۲) صفر و ۶۰°

۳) ۹۰° و ۱۲۰°

۴) ۹۰° و ۶۰°

٤۲. معادله‌ی خطی که زاویه‌ی آن با محور x ها برابر ۳۰° است و از نقطه‌ی $A(۱\,,\,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

(کتاب درسی)

۱) $y=\sqrt{۳}x-\sqrt{۳}$

۲) $۳y=\sqrt{۳}x-\sqrt{۳}$

۳) $۳y=\sqrt{۳}x+۳$

۴) $y=\sqrt{۳}x-۳$

٤۳. زاویه‌ی بین دو خط به معادلات $y=\sqrt{۳}x$ و $x=\sqrt{۳}y$ کدام است؟

۱) ۳۰°

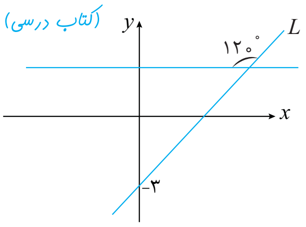
۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۹۰°

٤٤. با توجه به شکل مقابل، معادله‌ی خط L کدام است؟

(کتاب درسی)

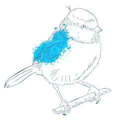


۱) $y=-\sqrt{۳}x-۳$

۲) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۳$

۳) $y=\sqrt{۳}x-۳$

۴) $y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۳$



۴۵. به ازای کدام مقدار m، خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(m,-۳)$ و $B(-۶,۱)$ با قسمت مثبت محور xها زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱۰

پرسش‌های سطح متوسط

۴۶. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟ *(کتاب درسی)*

الف) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، آن‌گاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث کوچک‌تر از اندازه‌ی هر یک از ساق‌های آن است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه‌ی π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

ج) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

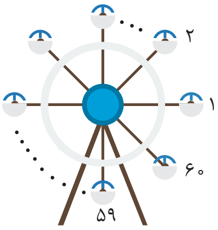
د) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷. اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت شمار، بین دو زمان خاص، طی می‌کند $\frac{۵\pi}{۳۶}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی دقیقه شمار در این مدت طی می‌کند، چند رادیان است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۶}$

۴۸. چرخ و فلکی مطابق شکل ۶۰ کابین دارد که از شماره‌ی ۱ تا ۶۰ شماره‌گذاری شده‌اند. این چرخ و فلک در هر ۵ دقیقه، ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۲ دقیقه بچرخد کابین شماره‌ی یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟



۱) کابین ۳۶ ۲) کابین ۴۸
۳) کابین ۴۹ ۴) کابین ۳۷

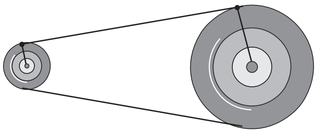
۴۹. زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت $۸:۱۲'$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۷\pi}{۹۰}$ رادیان ۲) $\frac{۸۳\pi}{۹۰}$ رادیان ۳) $\frac{۹۲\pi}{۹۰}$ رادیان ۴) $\frac{۹۵\pi}{۹۰}$ رادیان

۵۰. اندازه‌ی یک زاویه برحسب درجه، از $\frac{۲۴۰}{\pi}$ برابر اندازه‌ی آن برحسب واحد رادیان، ۷۰ واحد کم‌تر است. اندازه‌ی این زاویه برحسب واحد رادیان چند برابر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ است؟

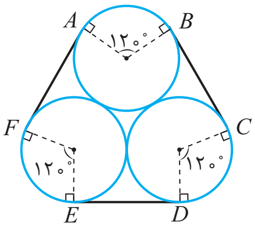
۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) ۱۴

۵۱. در شکل مقابل، دو قرقره که شعاع قرقره‌ی کوچک‌تر ۱۸ سانتی‌متر است، با یک تسمه به هم وصل شده‌اند. وقتی قرقره‌ی کوچک‌تر به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان می‌چرخد، قرقره‌ی بزرگ‌تر به اندازه‌ی ۲۲۵° می‌چرخد. شعاع قرقره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟



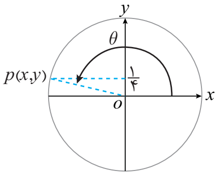
۱) $۲۰cm$ ۲) $۲۵cm$ ۳) $۱۸cm$ ۴) $۲۴cm$

۵۲. سه لوله‌ی آب جهت حمل و نقل، با یک تسمه‌ی فلزی به هم بسته شده‌اند. اگر شعاع هر لوله‌ی آب $۵۰cm$ باشد، طول بخشی از تسمه‌ی فلزی که $FABC$ نامیده شده است، کدام است؟



۱) $۱۰۰+\frac{۱۰۰\pi}{۳}$ ۲) $۲۰۰+\frac{۱۰۰\pi}{۳}$
۳) $۱۰۰+۷۵\pi$ ۴) $۲۰۰+۷۵\pi$

۵۳. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی شکل مقابل، حاصل $۲\cot^{۲}\theta + ۸\cos^{۲}\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۴}$ ۲) $\frac{۴۵}{۲}$

۳) $\frac{۷۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷۵}{۲}$

۵۴. اگر نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ را که روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، به اندازه‌ی ۵۱۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ۳) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$

۵۵. اگر $\frac{۵\pi}{۳} < x < \frac{۷\pi}{۴}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ کدام است؟

۱) $۲\cos x$ ۲) $-۲\cos x$ ۳) $-۲\sin x$ ۴) $۲\sin x$

۵۶. اگر $-\frac{\pi}{۱۸} < x < \frac{۵\pi}{۳۶}$ باشد، آن‌گاه محدوده‌ی تغییرات $\cos ۶x$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲} < \cos ۶x < \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲} < \cos ۶x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲} < \cos ۶x \le ۱$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲} < \cos ۶x \le ۱$

۵۷. چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح هستند؟ *(کتاب درسی)*

الف) اگر $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم علامت باشند، θ در ناحیه اول دایره‌ی مثلثاتی است.

ب) اگر $\sin\alpha\cos\alpha < ۰$ باشد، آن‌گاه α در ناحیه‌ی دوم یا سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

ج) اگر $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ و α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه $\sin\alpha = \pm\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۷}$.

د) در هیچ یک از نواحی چهارگانه‌ی دایره‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه دلخواه α در آن ناحیه، رابطه‌ی $\tan\alpha > \cot\alpha$ برقرار نیست.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A} = ۹۰^{\circ})$ اگر طول وتر برابر ۱۲ و $۲\tan B = ۳\sin B$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۵}$

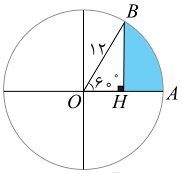
۵۹. در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای که اندازه‌های دو قاعده‌ی آن برابر ۱۲ و ۲۰ هستند، مساحت ذوزنقه برابر $۱۲۸\sqrt{۳}$ است. در این ذوزنقه، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه چقدر است؟

۱) ۹۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۳۵° ۴) ۱۰۵°

۶۰. زمینی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول قاعده‌ی کوچک آن ۳۰ متر و طول هریک از دو ساق آن ۲۰ متر است. اگر یکی از زوایای این ذوزنقه، ۶۰° باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۷۰۰\sqrt{۳}$ ۲) $۲۵۰\sqrt{۳}$ ۳) $۳۵۰\sqrt{۳}$ ۴) $۴۰۰\sqrt{۳}$

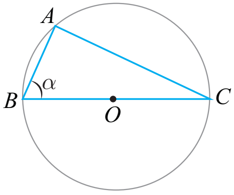
۶۱. در شکل مقابل، محیط قسمت رنگی کدام است؟



۱) $(\sqrt{۳}+۱)+۴$ ۲) $(\sqrt{۳}+۱)+۴\pi$

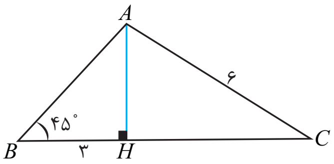
۳) $۶(\sqrt{۳}+۱)+۲\pi$ ۴) $۶(\sqrt{۳}+۱)+۴\pi$

۶۲. با توجه به شکل مقابل، مساحت دایره‌ای به مرکز O، برابر ۱۰۰π است. اگر $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ باشد، اندازه‌ی ضلع AB کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۲



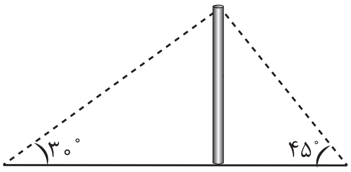
۶۳. در مثلث شکل مقابل، اندازه‌ی مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۹+۹\sqrt{۳}$

۲) $۳+۳\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۹+۹\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{۳+۳\sqrt{۳}}{۲}$



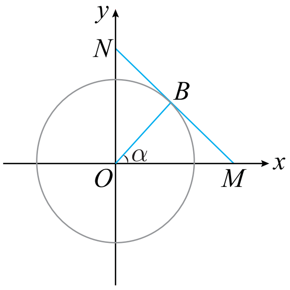
۶۴. دو شخص A و B در دو طرف یک دکل و با پای دکل بر یک خط راست واقعند. اگر زاویه‌ی دید اشخاص A و B با سر دکل به ترتیب ۳۰° و ۴۵° باشند و فاصله‌ی دو شخص A و B برابر ۸ متر باشد، ارتفاع دکل چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۲$

۲) $۴\sqrt{۳}+۴$

۳) $۴\sqrt{۳}-۴$

۴) $۲\sqrt{۳}+۲$



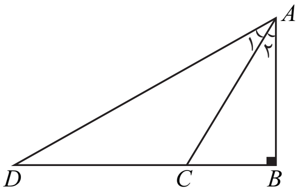
۶۵. در شکل مقابل پاره خط MN در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است. مقدار MN کدام است؟

۱) $\sin\alpha+\cos\alpha$

۲) $\sin\alpha+\tan\alpha$

۳) $\cos\alpha+\cot\alpha$

۴) $\tan\alpha+\cot\alpha$



۶۶. با توجه به شکل مقابل، اگر $\hat{A}_۲=۳۰^\circ$ ، $BC=۲\sqrt{۳}$ و $DC=۴\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ چقدر از زاویه‌ی D بزرگ‌تر است؟

۱) صفر

۲) ۱۵°

۳) ۳۰°

۴) ۲۰°

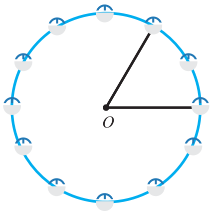
۶۷. برای تعیین فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند، نقطه‌ی C را در طرف A طوری اختیار می‌کنیم که $AC=۳۰$ و $B\hat{A}C=\frac{\pi}{۱۲}^{rad}$ و $A\hat{C}B=\frac{\pi}{۴}^{rad}$ ، در این صورت طول AB کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$

۲) $۱۰\sqrt{۶}$

۳) $۲۰\sqrt{۲}$

۴) $۲۰\sqrt{۶}$



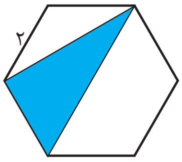
۶۸. در چرخ و فلک شکل مقابل، ارتفاع نقطه‌ی مفروض P که فاصله‌ی یکی از کابین‌ها تا سطح زمین است، برابر h و زاویه‌ی شعاع OP با سطح افقی برابر θ است. اگر ارتفاع نقطه‌ی P از رابطه‌ی $h(\theta)=۷۰+۴۰\sin\theta$ به‌دست آید، شعاع چرخ و فلک چقدر است؟

۱) ۸۰ متر

۲) ۶۰ متر

۳) ۴۰ متر

۴) ۳۰ متر



۶۹. در شش ضلعی منتظم شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۳}$

۷۰. طول هریک از اضلاع یک لوزی ۳۶ واحد و کسینوس بزرگ‌ترین زاویه‌ی آن $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ است. مساحت این لوزی چند واحد مربع است؟

۱) ۳۲۴

۲) ۳۱۶

۳) ۳۳۶

۴) ۳۴۴

۷۱. حداکثر مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن برابر ۶ و طول ضلع دیگر آن ۱۲ باشد، کدام است؟

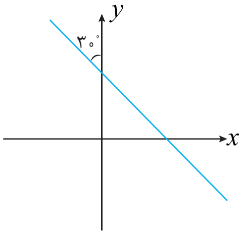
۱) ۷۲

۲) ۴۸

۳) $۱۸\sqrt{۳}$

۴) ۳۶

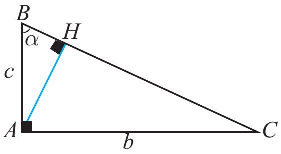
۷۲. به ازای کدام مقدار m، خط $(۳m-۱)y+\sqrt{۳}mx-۴=۰$ که نمودار آن در شکل روبه‌رو رسم شده است، با محور yها زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

پرسش‌های سطح دشوار

۷۳. در شکل مقابل، اندازه‌ی HC برابر کدام گزینه است؟

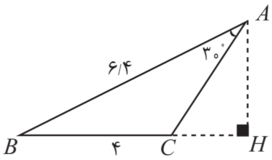


۱) $c\sin\alpha\tan\alpha$
۲) $c\cos^۲\alpha$
۳) $c\cos\alpha\cot\alpha$
۴) $c\sin^۲\alpha$

۷۴. کم‌ترین مقدار عبارت $A=\sin^۲x-\sin x+۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۷۵. در مثلث شکل مقابل، نسبت $\frac{AH}{AC}$ کدام است؟

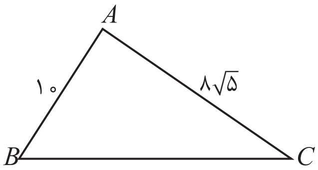


۱) ۰/۹
۲) ۰/۸
۳) ۰/۷
۴) ۰/۶

۷۶. در مثلثی با طول اضلاع $۶\sqrt{۲}$، ۱۰ و ۱۴، ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر، دو پاره‌خط روی آن ایجاد کرده است. طول قسمت کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۷۷. در شکل مقابل $\cos B=\frac{۳}{۵}$ است. اندازه‌ی ضلع BC کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۲
۳) ۲۴
۴) ۲۶

۷۸. اگر در مثلث ABC، داشته باشیم: $\hat{A}=۶۰^\circ$ ، $AB=۱+\sqrt{۳}$ و $AC=۲$. در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

۱) ۷۵°
۲) ۹۰°
۳) ۶۰°
۴) ۱۰۵°

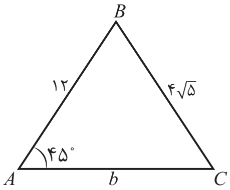
۷۹. در مثلثی با دو زاویه‌ی ۶۰° و ۴۵° ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۴۵° برابر ۱۲ است. اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی سوم کدام است؟

۱) $۶(\sqrt{۲}+۱)$
۲) $۶(\sqrt{۲}-۱)$
۳) $۶(\sqrt{۳}+۱)$
۴) $۶(\sqrt{۳}-۱)$

۸۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، داریم: $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و $BC=۱۲$، در این صورت طول میانه‌ی وارد بر ضلع AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۱}$
۲) $۲\sqrt{۲۱}$
۳) ۸
۴) ۶

۸۱. در مثلث شکل مقابل، اندازه‌ی ضلع b کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$ و $۸\sqrt{۲}$
۲) ۴ و ۸
۳) $۲\sqrt{۲}$ و $۴\sqrt{۲}$
۴) ۸ و ۱۲

۸۲. در مثلثی با اضلاع نابرابر، رابطه‌ی $b^۳+a^۲c=c^۳+a^۲b$ بین اضلاع برقرار است. زاویه‌ی A چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

پرسش‌های ترکیب سطوح

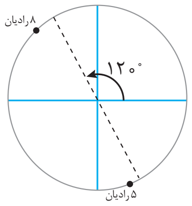
۸۳. مکمل زوایای -۲۵° و $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان به ترتیب کدام است؟ *(کتاب درسی)*

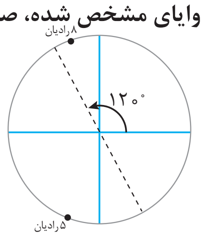
۱) ۱۵۵° و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
۲) ۲۰۵° و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
۳) ۱۵۵° و $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ رادیان
۴) ۲۰۵° و $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ رادیان

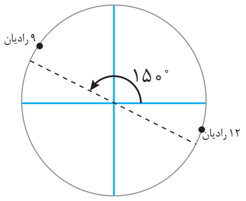
۸۴. انتهای کمان نظیر کدام زاویه در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار ندارد؟

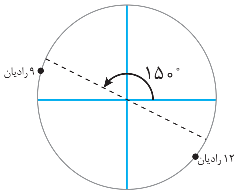
۱) ۱۰۰۰°
۲) $\frac{۳۵\pi}{۶}$ رادیان
۳) $-\frac{۷\pi}{۳}$ رادیان
۴) $\frac{۲۸\pi}{۳}$ رادیان

۸۵. در کدام شکل، انتهای کمان مربوط به زوایای مشخص شده، صحیح است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


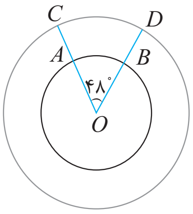
۸۶. انتهای کمانی که اندازه‌اش $\frac{۳۵\pi}{۶}$ رادیان است، بر انتهای کدام کمان منطبق است؟

۱) $-\frac{۵\pi}{۶}$
۲) $\frac{۱۳\pi}{۶}$
۳) $\frac{۸۳\pi}{۶}$
۴) $-\frac{۱۹\pi}{۶}$

۸۷. هنگامی که عقربه‌ی ساعت شمار یک ساعت عقربه‌ای، به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۲۴}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

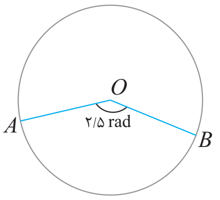
۱) ۵۰
۲) ۷۵
۳) ۸۰
۴) ۱۰۵

۸۸. در شکل مقابل دو دایره‌ی هم مرکز به شعاع‌های ۱۱ و ۱۷ واحد رسم شده‌اند. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیش‌تر است؟



۱) $\frac{۴\pi}{۵}$
۲) $\frac{۴\pi}{۱۵}$
۳) $\frac{۸\pi}{۵}$
۴) $\frac{\pi}{۱۵}$

۸۹. در شکل مقابل طول کمان کوچک‌تر AB برابر ۱۵ سانتی‌متر است. در این صورت مجموع اعداد محیط و مساحت دایره کدام است؟



۱) ۳۶π
۲) ۴۲π
۳) ۴۸π
۴) ۵۲π

۹۰. در دایره‌ای به شعاع r، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\frac{۹}{۴}$ رادیان، برابر $۳r-۹$ است. در این صورت طول کمان مقابل به زاویه‌ی ۷۵° در این دایره کدام است؟

۱) ۷π
۲) ۵π
۳) $۲/۵\pi$
۴) $۳/۵\pi$

۹۱. چه تعداد از مقادیر عبارات مثلثاتی زیر، تعریف نشده هستند؟ (کمان‌هایی که واحد آن‌ها معرفی نشده است، برحسب رادیان هستند.) *(کتاب درسی)*

الف) $\frac{\cos ۹۰^\circ}{۱+\sin ۲۷۰^\circ}$
ب) $\tan\frac{\pi}{۲}$
ج) $\cot ۲\pi$
د) $\frac{\cos ۰^\circ}{\sin ۱۸۰^\circ}$
هـ) $\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\cot\frac{\pi}{۴}}{\sin\frac{\pi}{۴}-\cos\frac{\pi}{۴}}$
و) $\tan\frac{۳\pi}{۲}-\cot\pi$

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۹۲. علامت عبارات $\cos(۱۱/۵)$ و $\cot(-۳)$ به ترتیب چگونه است؟ (زوایا برحسب واحد رادیان هستند.)

۱) مثبت- مثبت
۲) مثبت- منفی
۳) منفی- مثبت
۴) منفی- منفی

۹۳. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟ (زوایا برحسب واحد رادیان هستند.)

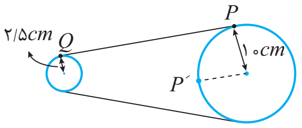
الف) $\sin ۴ \cos ۴ > ۰$
ب) $\tan ۳ + \cot ۳ < ۰$
ج) $\sin(-۲) < \cos(-۲)$
د) $\tan ۵ < \cot ۵$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹۴. فاصله‌ی مرکز یک چرخ و فلک به شعاع ۲۰ متر از سطح زمین ۲۵ متر است. اگر در نقطه‌ی شروع، کابین شماره ۱ در پایین‌ترین مکان چرخ و فلک باشد. بعد از چرخش چرخ و فلک به اندازه‌ی زاویه‌ی $\frac{۱۰\pi}{۳}$ رادیان، فاصله‌ی کابین شماره‌ی ۱ از سطح زمین چقدر است؟

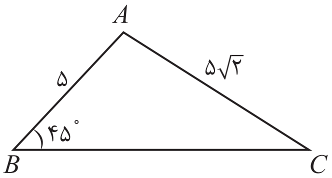
۱) ۳۰
۲) ۳۵
۳) ۴۰
۴) ۳۸

۹۵. در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $۱۰cm$ و $۲/۵cm$ را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر ۹۰° می‌چرخد (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره‌ی کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



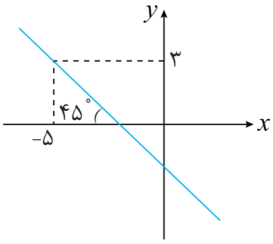
۱) ۲π
۲) $\frac{۵\pi}{۲}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۹۶. در مثلث شکل مقابل اندازه‌ی ضلع BC چقدر است؟



۱) $\frac{۵}{۴}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$
۲) $\frac{۵}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$
۳) $\frac{۵}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$
۴) $\frac{۵}{۴}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$

۹۷. عرض از مبدأ خط مقابل کدام است؟



۱) -۳
۲) -۲
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۹۸. خطی که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها ۴۵° است و نقطه‌ی $(۲ , ۰)$ روی آن قرار دارد، از کدام‌یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟ (کتاب درسی)

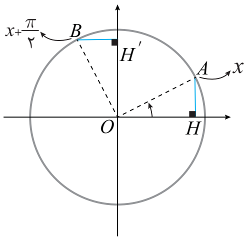
۱) $(۳ , ۶)$
۲) $(-۳ , ۱)$
۳) $(-۴ , -۲)$
۴) $(۴ , ۲)$

جلسه دوم: اتحادهای مثلثاتی و روابط $(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha)$

روابط $(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha)$

در این بخش می‌خواهیم ببینیم اگر مضربی از $\frac{\pi}{۲}$ به یک کمان اضافه شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چگونه تغییر خواهند کرد.

همین‌جا لازم است متذکر شویم منظورمان مضارب صحیح $\frac{\pi}{۲}$ است (یعنی $k\in\mathbb{Z}$)، مثلاً π مضربی از $\frac{\pi}{۲}$ است، چون $\pi=۲\times\frac{\pi}{۲}$، ولی دقت کنید که $\frac{\pi}{۴}$ مضرب $\frac{\pi}{۲}$ نیست، چون $\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ عددی صحیح نیست. حال فرض کنید به عنوان مثال می‌خواهیم ببینیم حاصل $\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ با کدام یک از نسبت‌های مثلثاتی x برابر است. اگر x را زاویه‌ای فرضی در نظر بگیریم زاویه‌ی $(x+\frac{\pi}{۲})$ هم در شکل مشخص شده است.



معلوم است که مثلث‌های OAH و OBH' هم‌نهشت هستند، پس $OH'=OH$.

از طرفی می‌دانیم $OH'=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ و $OH=\cos x$، پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۲})=\cos x$$

به همین روش می‌توان برای سایر نسبت‌های مثلثاتی همین کمان یا کمان‌های دیگری به شکل کلی $(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha)$ روابط مثلثاتی را پیدا کرد. برای این‌که در حل تست‌ها با سرعت این نتیجه‌ها را بگیریم، با استفاده از دو قانون همین روند را سریع‌تر انجام می‌دهیم.

قانون ۱: اگر k زوج باشد، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود و اگر k فرد باشد، نسبت مثلثاتی عوض می‌شود. (قانون تبدیل)

تذکر

وقتی می‌گوییم نسبت مثلثاتی عوض می‌شود یعنی سینوس به کسینوس و کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت تبدیل می‌شود.

قانون ۲: x را زاویه‌ای در ناحیه‌ی اول در نظر می‌گیریم و نسبت مثلثاتی زاویه‌ی مطلوب را تعیین علامت می‌کنیم. (قانون علامت)

حالا ببینید از این دو قانون چگونه استفاده می‌کنیم:

مثال ۹ نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را برحسب نسبت‌های مثلثاتی x بیابید.

$$\sin(x+\pi)\quad,\quad\cos(\frac{\pi}{۲}-x)\quad,\quad\tan(\pi-x)\quad,\quad\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)\quad,\quad\cot(۲\pi-x)$$

پاسخ:

$\frac{\pi}{۲}$ مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض شده

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=+\sin x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(\frac{\pi}{۲}-x)$ هم در ناحیه‌ی اول است و در ناحیه‌ی اول، کسینوس مثبت است.

π مضرب زوج $\frac{\pi}{۲}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\sin(x+\pi)=-\sin x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(x+\pi)$ در ناحیه‌ی سوم است و در ناحیه‌ی سوم، سینوس منفی است.

$\frac{۳\pi}{۲}$ مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض شده

$$\cos\left(\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}+x\right) = \boxed{+}\ \sin x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(\frac{۳\pi}{۲}+x)$ در ناحیه‌ی چهارم است

و در ناحیه‌ی چهارم، کسینوس مثبت است.

π مضرب زوج $\frac{\pi}{۲}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\tan(\boxed{\pi}-x) = \boxed{-}\ \tan x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(\pi - x)$ در ناحیه‌ی دوم است

و در ناحیه‌ی دوم، تانژانت منفی است.

۲π مضرب زوج $\frac{\pi}{۲}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\cot(\boxed{۲\pi}-x) = \boxed{-}\ \cot x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(۲\pi - x)$ در ناحیه‌ی چهارم است

و در ناحیه‌ی چهارم، کتانژانت منفی است.

نکته این‌که برای علامت این نسبت‌ها فرض می‌کنیم x در ناحیه‌ی اول است، به این معنی نیست که اگر x در ناحیه‌ی اول نباشد، این روابط برقرار نیست. در واقع فرض ناحیه‌ی اول بودن x فقط برای راحتی تشخیص علامت است.

مثال ۱۰ نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۰° بیابید.

$$\cos ۱۰۰^\circ\ ,\ \tan ۲۶۰^\circ\ ,\ \sin ۱۹۰^\circ\ ,\ \cot ۳۵۰^\circ\ ,\ \cos ۸۰^\circ\ ,\ \sin ۱۷۰^\circ$$

پاسخ: سعی می‌کنیم هریک از زوایا را به شکل $\frac{k\pi}{۲}+۱۰^\circ$ [۱] بنویسیم:

$$\cos ۱۰۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۱۰^\circ) = -\sin ۱۰^\circ$$

تذکر

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha$

$$\tan ۲۶۰^\circ = \tan(۲۷۰^\circ - ۱۰^\circ) = \cot ۱۰^\circ$$

تذکر

می‌دانیم $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha$

$$\sin ۱۹۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ) = -\sin ۱۰^\circ$$

تذکر

می‌دانیم $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$$\cot ۳۵۰^\circ = \cot(۳۶۰^\circ - ۱۰^\circ) = -\cot ۱۰^\circ$$

تذکر

می‌دانیم $\cot(۲\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

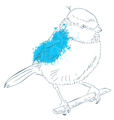
$$\cos ۸۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۱۰^\circ) = \sin ۱۰^\circ$$

تذکر

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \sin\alpha$

---

[۱] نوشتن یک زاویه به شکل $\frac{k\pi}{۲}+۱۰^\circ$ به لحاظ علمی صحیح نیست، چون واحد $\frac{k\pi}{۲}$ رادیان و واحد ۱۰ ، درجه است. در این‌جا فقط برای درک راحت‌تر این کار را انجام دادیم.



$$\sin ۱۷۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۰^\circ) = \sin ۱۰^\circ$$

تذکر می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) - \sin\alpha$

نکته نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم مرتبط با ۴۵° و ۳۰° را می‌توان با استفاده از همین روابط به‌دست آورد. البته توصیه می‌کنیم آن‌ها را حفظ باشید. اگر یادتان رفت از این روابط برای محاسبه‌ی آن‌ها استفاده کنید. مثلاً نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{۲\pi}{۳}$ (۱۲۰ درجه)، $\frac{۵\pi}{۶}$ (۱۵۰ درجه)، $\frac{۳\pi}{۴}$ (۱۳۵ درجه) و $\frac{۵\pi}{۴}$(۲۲۵ درجه) را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} & (\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha) \\ \cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲} & (\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha) \\ \tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳} & (\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha) \\ \cot\frac{۲\pi}{۳} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & (\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ \cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \tan\frac{۵\pi}{۶} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot\frac{۵\pi}{۶} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cot\frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳}\end{cases}$$

تذکر می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ از روابط ($\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}$) هم استفاده کنید.

$$\begin{cases}\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos\frac{۳\pi}{۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \tan\frac{۳\pi}{۴} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱ \\ \cot\frac{۳\pi}{۴} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱\end{cases}$$

تذکر می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ از روابط ($\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$) هم استفاده کنید.

$$\begin{cases}\sin\frac{۵\pi}{۴} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos\frac{۵\pi}{۴} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \tan\frac{۵\pi}{۴} = \tan(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱ \\ \cot\frac{۵\pi}{۴} = \cot(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cot\frac{\pi}{۴} = ۱\end{cases}$$

تذکر می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ از روابط ($\frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}$) هم استفاده کنید.

تست ۲٤. اگر $\cot ۱۰^\circ \simeq ۶$ باشد، حاصل $\dfrac{\sin ۱۰۰^\circ - \sin ۱۹۰^\circ}{\cos ۲۶۰^\circ - \cos ۱۷۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۸

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\sin ۱۰۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۱۰^\circ) = \cos ۱۰^\circ \qquad (\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha)$$

$$\sin ۱۹۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ) = -\sin ۱۰^\circ \qquad (\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha)$$

$$\cos ۲۶۰^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۰^\circ) = -\sin ۱۰^\circ \qquad (\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\sin\alpha)$$

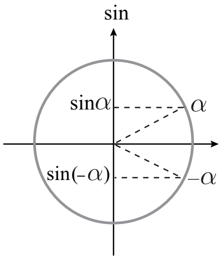
$$\cos ۱۷۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۱۰^\circ) = -\cos ۱۰^\circ \qquad (\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha)$$

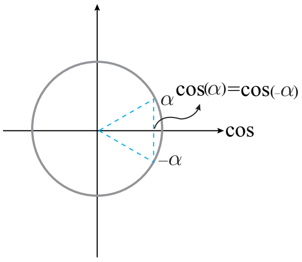
$$\frac{\sin ۱۰۰^\circ - \sin ۱۹۰^\circ}{\cos ۲۶۰^\circ - \cos ۱۷۰^\circ} = \frac{\cos ۱۰^\circ + \sin ۱۰^\circ}{-\sin ۱۰^\circ + \cos ۱۰^\circ} \xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \sin ۱۰^\circ} \frac{\cot ۱۰^\circ + ۱}{-۱ + \cot ۱۰^\circ} = \frac{۶ + ۱}{-۱ + ۶} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

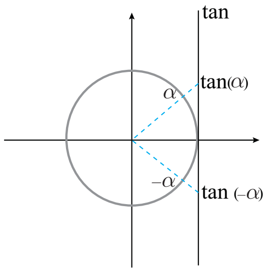
روابط $(-\alpha)$

با قرار دادن $k = ۰$ در روابط $\frac{k\pi}{۲} - \alpha$، روابط $-\alpha$ شکل می‌گیرند:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$



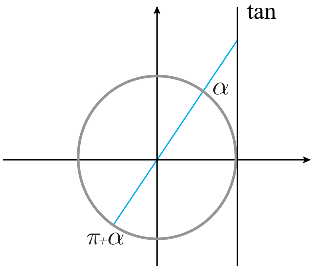




تذکر

دقت کنید از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت منفی از داخل کمان نسبت‌های مثلثاتی خارج می‌شود جز کسینوس. یعنی کسینوس منفی‌خور است.

نکته می‌دانیم زوایای α، $۲\pi + \alpha$، $۴\pi + \alpha$ و ... همگی در یک جایگاه در دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرند. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha$ و $\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$، یعنی در نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس از مضارب زوج π صرف‌نظر کنید. مثلاً $\sin(۱۰۰\pi + \alpha) = \sin(۶\pi + \alpha) = \sin(۱۲\pi + \alpha) = \sin\alpha$. همچنین زوایای α، $\pi + \alpha$، $۲\pi + \alpha$ و ... یا در یک جایگاه و یا در روبه‌روی آن قرار می‌گیرند که تانژانت و کتانژانت برابر دارند. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\tan(k\pi + \alpha) = \tan\alpha$ و $\cot(k\pi + \alpha) = \cot\alpha$. یعنی در نسبت تانژانت و کتانژانت می‌توان از هر مضرب π (چه زوج و چه فرد) صرف‌نظر کرد. مثلاً $\tan(۱۰۰\pi + \alpha) = \tan(۲\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.



مثال ۱۱ **حاصل مقادیر زیر را بیابید.**

$\cos\frac{۸\pi}{۳}$, $\sin\frac{۱۰۱\pi}{۴}$, $\tan\frac{۱۰۰\pi}{۳}$, $\cot(-\frac{۱۹\pi}{۴})$

پاسخ:

$\cos\frac{۸\pi}{۳}=\cos(\frac{۶\pi+۲\pi}{۳})=\cos(۲\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ (از ۲π صرف‌نظر کردیم)

$\sin\frac{۱۰۱\pi}{۴}=\sin(\frac{۱۰۰\pi+\pi}{۴})=\sin(۲۵\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (از ۲۴π صرف‌نظر کردیم)

$\tan\frac{۱۰۰\pi}{۳}=\tan(\frac{۹۹\pi+\pi}{۳})=\tan(۳۳\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan(\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}$ (از ۳۳π صرف‌نظر کردیم)

$\cot(-\frac{۱۹\pi}{۴})=-\cot(\frac{۱۹\pi}{۴})=-\cot(\frac{۱۶\pi+۳\pi}{۴})=-\cot(۴\pi+\frac{۳\pi}{۴})=-\cot\frac{۳\pi}{۴}=-(-۱)=۱$ (از ۴π صرف‌نظر کردیم)

تست ۲۵. **کدام گزینه غلط است؟**

۱) $\sin(\frac{۱۰۰\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\cos(\frac{۱۲۵\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\tan(\frac{۹۵\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\cot(\frac{۸۷\pi}{۴})=-۱$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

بررسی گزینه‌ها:

$$\sin(\frac{۱۰۰\pi}{۳})=\sin(\frac{۹۹\pi+\pi}{۳})=\sin(۳۳\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۲۵\pi}{۴})=\cos(\frac{۱۲۴\pi+\pi}{۴})=\cos(۳۱\pi+\frac{\pi}{۴})=\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۹۵\pi}{۶})=\tan(\frac{۹۰\pi+۵\pi}{۶})=\tan(۱۵\pi+\frac{۵\pi}{۶})=\tan(\frac{۵\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(\frac{۸۷\pi}{۴})=\cot(\frac{۸۴\pi+۳\pi}{۴})=\cot(۲۱\pi+\frac{۳\pi}{۴})=\cot(\frac{۳\pi}{۴})=-۱$$

تست ۲۶. **به ازای کدام مقدار k تساوی $\tan(\frac{k\pi}{۳})=\sqrt{۳}$ برقرار نیست؟**

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۳۷ ۴) ۴۷

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

بررسی گزینه‌ها:

$$k=۴\rightarrow\tan(\frac{۴\pi}{۳})=\tan(\frac{۳\pi+\pi}{۳})=\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$k=۱۶\rightarrow\tan(\frac{۱۶\pi}{۳})=\tan(\frac{۱۵\pi+\pi}{۳})=\tan(۵\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$k=۳۷\rightarrow\tan(\frac{۳۷\pi}{۳})=\tan(\frac{۳۶\pi+\pi}{۳})=\tan(۱۲\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$k=۴۷\rightarrow\tan(\frac{۴۷\pi}{۳})=\tan(\frac{۴۵\pi+۲\pi}{۳})=\tan(۱۵\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای اولیه

اتحادهای مثلثاتی اولیه نسبت‌های مثلثاتی را به هم مرتبط می‌کنند. بنابراین مهم‌ترین ویژگی آن‌ها این است که اگر نسبت مثلثاتی یک زاویه را داشته باشیم، می‌توانیم با این اتحادها بقیه نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه را بیابیم.

$$(۱)\ \sin^۲ x+\cos^۲ x=۱ \qquad (۲)\ \tan x.\cot x=۱ \qquad (۳)\ ۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x} \qquad (۴)\ ۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$$

یادآوری: روابط تانژانت و کتانژانت: $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

مثال ۱۲ اگر x زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم باشد و $\sin x=\frac{۱}{۳}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی x را بیابید.

پاسخ: از رابطه‌ی $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ مقدار $\cos x$ را پیدا می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{۳})^۲+\cos^۲ x=۱\Rightarrow \cos^۲ x=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\xrightarrow{\text{x در ناحیه دوم}}\cos x=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

حال از رابطه‌ی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$ داریم:

$$\tan x=\frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \qquad , \qquad \cot x=\frac{۱}{\tan x}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}}=-۲\sqrt{۲}$$

مثال ۱۳ اگر $\cot x=-۲$ و x زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی x را بیابید.

پاسخ: از رابطه‌ی $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ داریم:

$$۱+(-۲)^۲=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۵}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۵}}\xrightarrow{\text{x در ناحیه چهارم}}\sin x=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

حال از رابطه‌ی $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ داریم:

$$\frac{۱}{۵}+\cos^۲ x=۱\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}\xrightarrow{\text{x در ناحیه چهارم}}\cos x=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

و از رابطه‌ی $\tan x=\frac{۱}{\cot x}$ داریم:

$$\tan x=\frac{۱}{-۲}$$

تست ۲۷. اگر x زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم باشد و $\tan x=-۴$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$

۲) $\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$

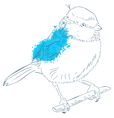
۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

اول دقت کنید که $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$. حال از رابطه‌ی $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$ داریم:

$$\cot x=\frac{۱}{\tan x}=-\frac{۱}{۴}\xrightarrow{۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}}۱+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱۶}{۱۷}$$

$$\Rightarrow \sin x=\pm\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\xrightarrow{\text{x در ناحیه چهارم}}\sin x=-\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\Rightarrow -\sin x=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\Rightarrow \cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$$



اتحادهای فرعی

۵ رابطه داریم که به نوعی با هم مرتبط هستند.[1] این ۵ رابطه را ببینید. همه‌ی آن‌ها با $\sin x.\cos x$ رابطه دارند. اگر $\sin x.\cos x$ را p بنامیم، حفظ کردن آن‌ها ساده‌تر است.

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{p}$$

$$(\sin x+\cos x)^{۲}=۱+۲\sin x\cos x=۱+۲p \qquad (\sin x-\cos x)^{۲}=۱-۲\sin x\cos x=۱-۲p$$

$$\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=۱-۲(\sin x\cos x)^{۲}=۱-۲p^{۲} \qquad \sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-۳(\sin x\cos x)^{۲}=۱-۳p^{۲}$$

با توجه به ارتباط این رابطه‌ها، می‌توان از مقدار هریک از آن‌ها مقدار سایر رابطه‌ها را پیدا کرد.

تست ۲۸. اگر $\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) ±۴ ۲) $\pm\sqrt{۳}$ ۳) ±۲ ۴) $\pm۲\sqrt{۳}$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

$$\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱-۲p^{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲p^{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow p^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow p=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow \tan x+\cot x=\frac{۱}{p}=\pm۲$$

تست ۲۹. کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (مخرج‌ها مخالف صفر هستند.)

۱) $\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{۱-\sin x}$ ۲) $\frac{۱+\tan^{۲}x}{۱+\cot^{۲}x}=\tan^{۲}x$

۳) $(\sin x+\cos x)^{۲}+(\sin x-\cos x)^{۲}=۲$ ۴) $\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}=۱-(\sin x+\cos x)^{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

اثبات گزینه‌ها:

$$\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{۱-\sin x}\Rightarrow \text{طرف چپ رابطه}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\times\frac{۱-\sin x}{۱-\sin x}=\frac{۱-\sin^{۲}x}{\cos x(۱-\sin x)}$$

$$=\frac{\cos^{۲}x}{\cos x(۱-\sin x)}=\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\text{طرف راست رابطه}$$ (گزینه ۱)

$$\frac{۱+\tan^{۲}x}{۱+\cot^{۲}x}=\frac{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}{\frac{۱}{\sin^{۲}x}}=\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}=\tan^{۲}x$$ (گزینه ۲)

$$(\sin x+\cos x)^{۲}+(\sin x-\cos x)^{۲}=۱+۲\sin x\cos x+۱-۲\sin x\cos x=۲$$ (گزینه ۳)

بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ صحیح هستند. یعنی اتحاد مثلثاتی محسوب می‌شوند ولی گزینه‌ی ۴ اتحاد مثلثاتی نیست زیرا

$$\text{طرف چپ}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}=۲\sin x\cos x\neq\text{طرف راست}$$

$$\text{طرف راست}=۱-(\sin x+\cos x)^{۲}=۱-(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x)=۱-۱-۲\sin x\cos x=-۲\sin x\cos x\neq\text{طرف چپ}$$

---

[1] از اثبات این روابط صرف‌نظر می‌کنیم، ولی سعی کنید خودتان آن‌ها را اثبات کنید.

تست ۳۰. اگر $\tan x+\cot x=۴$ باشد، مقدار $\sin^{۸} x+\cos^{۸} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۹۷}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۹۹}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۹۵}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۹۳}{۱۲۸}$

پاسخ: ● ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

می‌دانیم $\tan x+\cot x=\frac{۱}{p}$ پس: $\frac{۱}{p}=۴\Rightarrow p=\frac{۱}{۴}$ ، حال $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin^{۴} x+\cos^{۴} x)^{۲}=\sin^{۸} x+\cos^{۸} x+۲\sin^{۴} x\cos^{۴} x\Rightarrow \sin^{۸} x+\cos^{۸} x=(\sin^{۴} x+\cos^{۴} x)^{۲}-۲\sin^{۴} x\cos^{۴} x$$

$$\sin^{۸} x+\cos^{۸} x=(۱-۲p^{۲})^{۲}-۲p^{۴}=(۱-۲(\frac{۱}{۱۶}))^{۲}-۲(\frac{۱}{۲۵۶})=(\frac{۷}{۸})^{۲}-\frac{۱}{۱۲۸}=\frac{۴۹}{۶۴}-\frac{۱}{۱۲۸}=\frac{۹۷}{۱۲۸}$$

روابط $(۲x)$

در این‌جا روابطی ارائه می‌کنیم که نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به نسبت‌های مثلثاتی نصف آن زاویه ربط می‌دهد.

$$(۱)\quad \sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha \qquad\qquad (۲)\quad \cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$$

با جایگذاری $\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$ یا $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$ در رابطه‌ی (۲) می‌توانیم روابط زیر را هم بسازیم:

$$(۳)\quad \cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱ \qquad\qquad (۴)\quad \cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$$

بنابراین روابط ۲ و ۳ و ۴ را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱=۱-۲\sin^{۲}\alpha$$

با تقسیم روابط ۱ و ۲ برهم رابطه‌ای برای تانژانت به‌دست می‌آید:

$$(۵)\quad \tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

تذکر

رابطه‌ای برای کتانژانت ۲α ارائه نمی‌کنیم و اگر نیاز به محاسبه آن داشتیم، تانژانت ۲α را محاسبه می‌کنیم و سپس معکوس می‌کنیم. چند نمونه از استفاده از روابط بالا را ببینید:

$$\sin ۲۰^{\circ}=۲\sin ۱۰^{\circ}\cos ۱۰^{\circ} \quad,\quad \cos ۷۰^{\circ}=۲\cos^{۲}۳۵^{\circ}-۱=۱-۲\sin^{۲}۳۵^{\circ}$$

$$\tan ۱۵۰^{\circ}=\frac{۲\tan ۷۵^{\circ}}{۱-\tan^{۲}۷۵^{\circ}} \quad,\quad \sin ۴x=۲\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha$$

$$\tan ۴\alpha=\frac{۲\tan ۲\alpha}{۱-\tan^{۲}۲\alpha} \quad,\quad \cos\alpha=\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱=۱-۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

مثال ۱۴ **مقادیر $\sin ۱۵^{\circ}$ و $\cos ۲۲/۵^{\circ}$ را محاسبه کنید.**

پاسخ: از رابطه‌ی $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$ داریم:

$$\cos ۳۰^{\circ}=۱-۲\sin^{۲}۱۵^{\circ}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱-۲\sin^{۲}۱۵^{\circ}\Rightarrow ۲\sin^{۲}۱۵^{\circ}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\sin^{۲}۱۵^{\circ}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow\sin ۱۵^{\circ}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

تذکر

توجه شود که تساوی $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$ همواره برقرار است، زیرا:

$$\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۴}=\frac{\sqrt{۸-۴\sqrt{۳}}}{۴}=\frac{\sqrt{(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^{۲}}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

بنابراین $\sin ۱۵^{\circ}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ نیز برقرار است.

حال از رابطه‌ی $\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱$ داریم:

$$\cos ۴۵^\circ = ۲\cos^{۲} ۲۲/۵^\circ - ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲\cos^{۲} ۲۲/۵^\circ - ۱ \Rightarrow ۲\cos^{۲} ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱ = \frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos^{۲} ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}+۲}{۴} \Rightarrow \cos ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{۲}$$

تست ۳۱. مقدار $\cos ۱۱۲/۵^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha$، پس $\cos(۹۰^\circ + ۲۲/۵^\circ) = -\sin ۲۲/۵^\circ$. از رابطه‌ی $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$ داریم:

$$\cos ۴۵^\circ = ۱ - ۲\sin^{۲} ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱ - ۲\sin^{۲} ۲۲/۵^\circ \Rightarrow ۲\sin^{۲} ۲۲/۵^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} ۲۲/۵^\circ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} \Rightarrow \cos ۱۱۲/۵^\circ = -\sin ۲۲/۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

تست ۳۲. مقدار $\frac{\cos ۴۰^\circ + ۱}{\sin ۴۰^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\tan ۲۰^\circ$ ۲) $\tan ۷۰^\circ$ ۳) $\tan ۴۰^\circ$ ۴) $\tan ۵۰^\circ$

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

می‌دانیم $\cos ۴۰^\circ = ۲\cos^{۲} ۲۰^\circ - ۱$ و $\sin ۴۰^\circ = ۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ$، پس:

$$\frac{\cos ۴۰^\circ + ۱}{\sin ۴۰^\circ} = \frac{۲\cos^{۲} ۲۰^\circ - ۱ + ۱}{۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ} = \frac{۲\cos^{۲} ۲۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ} = \frac{\cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = \cot ۲۰^\circ$$

می‌دانیم $\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$، پس: $\cot ۲۰^\circ = \cot(۹۰^\circ - ۷۰^\circ) = \tan ۷۰^\circ$

نکته قبلاً دیدیم که $\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$، از این روابط می‌توان نتیجه گرفت:

$$۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^{۲}\alpha \quad , \quad \cos ۲\alpha + ۱ = ۲\cos^{۲}\alpha$$

این روابط جدید نیستند ولی در مباحث دیگر نیز کارایی دارند. بهتر است آن‌ها را حفظ کنید. در تست بالا از این رابطه استفاده کردیم.

تست ۳۳. اگر $\tan ۲\alpha = ۴\tan\alpha$ باشد، $\tan\alpha$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

می‌دانیم $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^{۲}\alpha}$، پس:

$$\tan ۲\alpha = ۴\tan\alpha \Rightarrow \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha} = ۴\tan\alpha \Rightarrow ۲\tan\alpha = ۴\tan\alpha - ۴\tan^{۳}\alpha \Rightarrow ۴\tan^{۳}\alpha - ۲\tan\alpha = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\tan\alpha(۲\tan^{۲}\alpha - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲\tan\alpha = ۰ \Rightarrow \tan\alpha = ۰ \\ ۲\tan^{۲}\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

روابط تکمیلی (۲α)

دو رابطه‌ی زیر، سینوس و کسینوس یک زاویه را به تانژانت نصف آن زاویه ربط می‌دهند:

$$(۲)\ \cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \qquad (۱)\ \sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

تذکر

دقت کنید که با تقسیم این دو رابطه برهم رابطه‌ی $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ *ساخته می‌شود.*

تست ۳۴. اگر $\tan\alpha = ۵$ باشد، مقدار $\sin ۴\alpha$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱۱۰}{۱۶۹}$ ۲) $-\dfrac{۱۱۵}{۱۶۹}$ ۳) $-\dfrac{۱۲۰}{۱۶۹}$ ۴) $-\dfrac{۱۲۵}{۱۶۹}$

پاسخ: ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

از روابـط قبل می‌دانیم $\sin ۴\alpha = \dfrac{۲\tan ۲\alpha}{۱+\tan^۲ ۲\alpha}$، پس نیاز به دانسـتن مقدار $\tan ۲\alpha$ داریم. بـرای این هم از رابطه‌ی $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲(۵)}{۱-۲۵} = \frac{۱۰}{-۲۴} = -\frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \sin ۴\alpha = \frac{۲(-\frac{۵}{۱۲})}{۱+(-\frac{۵}{۱۲})^۲} = \frac{-\frac{۵}{۶}}{\frac{۱۶۹}{۱۴۴}} = -\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

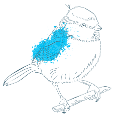
رابطه‌ی تکمیلی دیگر برای (۲α) رابطه‌ی مقابل است: $(۳)\ \cot\alpha - \tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha$

تست ۳۵. اگر $\alpha = ۱۱/۲۵^\circ$ باشد، مقدار $\cot\alpha - \tan\alpha - ۲\tan ۲\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

$$\underbrace{\cot\alpha - \tan\alpha}_{۲\cot ۲\alpha} - ۲\tan ۲\alpha = ۲(\cot ۲\alpha - \tan ۲\alpha) = ۲\times ۲\cot ۴\alpha = ۴\cot ۴\alpha = ۴\cot ۴۵^\circ = ۴(۱) = ۴$$



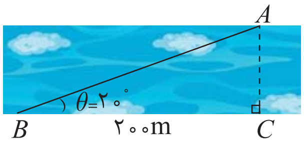
پرسش‌های سطح ساده

۹۹. حاصل عبارت $\dfrac{\tan^{۲}\frac{\pi}{۶}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}}{\cot^{۲}\frac{\pi}{۴}-\cos^{۲}\frac{\pi}{۳}}+\cos^{۲}۷۵^{\circ}+\sin^{۲}۷۵^{\circ}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۱۱}{۹}$
۲) $\frac{۱۱}{۱۰}$
۳) $\frac{۱۹}{۱۰}$
۴) $\frac{۱۹}{۹}$

۱۰۰. اگر $\cos\theta=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $\cot\theta>۰$ باشد، مقدار $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۸}$



۱۰۱. شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای مانند C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه‌ی ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی B برسد. اگر زاویه‌ی دید این شخص (از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A) ۲۰° باشد و $\sin ۲۰^{\circ}\simeq ۰/۳۴$ باشد، عرض رودخانه تقریباً چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) ۷۰/۴۶
۲) ۷۲/۴۶
۳) ۷۴/۴۶
۴) ۷۶/۴۶

۱۰۲. حاصل عبارت $A=\dfrac{\cos(-۹۰^{\circ})+\sin(-۲۷۰^{\circ})}{\sin(-۱۸۰^{\circ})-\cos(-۳۶۰^{\circ})}$ چند برابر حاصل عبارت $B=\cot(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۳})$ است؟ (کتاب درسی)

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

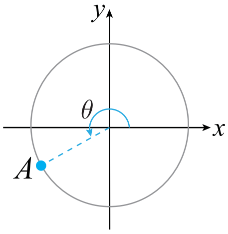
۱۰۳. اگر $\sin x-\frac{۱}{\sin x}=a^{۳}$ و $\cos x-\frac{۱}{\cos x}=b^{۳}$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $b=a\tan x$
۲) $a=b\tan x$
۳) $\tan x=ab$
۴) $\tan x=\frac{۱}{ab}$

۱۰٤. اگر به ازای هر x، تساوی $\frac{b}{۱-\sin x}+\frac{a}{۱+\sin x}=۱+\tan^{۲}x$ برقرار باشد، مقدار ab کدام است؟ (با فرض $\sin x\neq\pm۱$)

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰۵. در دایـره‌ی مثلثاتی شـکل مقابل، مختصات نقطه‌ی A به صورت $A(-\frac{۴}{۵},y)$ اسـت. در این صورت مقدار عبارت $۲\cot\theta-۳\cos\theta$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۱۵}$
۲) $-\frac{۱۳}{۱۵}$
۳) $\frac{۶۷}{۱۵}$
۴) $\frac{۷۶}{۱۵}$

۱۰۶. چه تعداد از تساوی‌های زیر، یک اتحاد است؟ (مخرج‌ها مخالف صفر هستند) (کتاب درسی)

الف) $\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$
ب) $\tan\alpha=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}$
ج) $\sin\alpha=۱-\frac{\cos^{۲}\alpha}{۱+\sin\alpha}$
د) $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha}=\frac{۱}{\cos\alpha}-\tan\alpha$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۷. اگر $\sin x+\tan x>۰$ و $\sin x\tan x<۰$ $-\frac{۱}{\cos x}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه واقع است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۱۰۸. ساده شده‌ی عبارت $(\cot x-\frac{۱}{\sin x})(\cot x+\frac{۱}{\sin x})+\frac{\cot^{۲} x}{\cot^{۲} x-\cos^{۲} x}$ کدام است؟

۱) $\tan^{۲} x$
۲) $۱+\tan^{۲} x$
۳) $\cot^{۲} x$
۴) $۱+\cot^{۲} x$

۱۰۹. اگر $\frac{۲\pi}{۳}\le x\le\frac{۷\pi}{۶}$ باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار عبارت $A=\cos x(\frac{۱}{۱+\sin x}+\frac{۱}{۱-\sin x})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۴
۳) ۲
۴) ۴

۱۱۰. اگر $\cos\alpha=\frac{۳}{۷}$ و α در ناحیه چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار داشته باشد، حاصل عبارت $A=\sqrt{۱۰}\sin\alpha-\frac{۴-\tan^{۲}\alpha}{۱-۴\cot^{۲}\alpha}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۶۳}{۱۰۰}$
۲) $\frac{۱۰۰}{۶۳}$
۳) $-\frac{۴۶۰}{۶۳}$
۴) $-\frac{۶۳}{۴۶۰}$

۱۱۱. در صورت برقراری تساوی $\tan x-\frac{۱}{\cos x}=\sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول یا دوم
۲) دوم یا سوم
۳) سوم یا چهارم
۴) اول یا چهارم

۱۱۲. حاصل عبارت $\sqrt{۱-۲\sin x\cos x}+\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}$ به ازای $x=۲۰^\circ$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $۲\sin ۲۰^\circ$
۲) $۲\cos ۲۰^\circ$
۳) $\sin ۴۰^\circ$
۴) $\cos ۴۰^\circ$

۱۱۳. اگر $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x=\frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل $\sin^{۶} x+\cos^{۶} x$ کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۴
۳) ۰/۱
۴) ۰/۳

۱۱۴. اگر $\tan x+\cot x=۲$ باشد، حاصل عبارت $A=\sin^{۸} x+\cos^{۶} x+\tan^{۴} x+\cot^{۲} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۳}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۷}{۸}$
۳) $\frac{۳۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۸}{۸}$

۱۱۵. اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ و $\gamma+\theta=۱۸۰^\circ$ در این صورت چه تعداد از گزاره‌های زیر قطعاً صحیح است؟

الف) $\tan\gamma+\tan\theta=۰$
ب) $\sin(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\theta)$
ج) $\tan(\gamma-\alpha)=\cot(\theta-\beta)$
د) $\sin\gamma=\sin\theta$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۶. مقدار $\tan ۶۶۰^\circ$ با مقدار $\cot\alpha$ برابر است. α کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۲۴۰°
۴) ۲۱۰°

۱۱۷. حاصل عبارت $A=\cos^{۳}\frac{\pi}{۱۳}+\cos^{۳}\frac{۲\pi}{۱۳}+\cos^{۳}\frac{۳\pi}{۱۳}+\cdots+\cos^{۳}\frac{۱۲\pi}{۱۳}$ کدام است؟

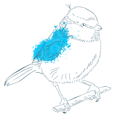
۱) صفر
۲) ۱
۳) $۱۲\cos^{۳}\frac{۶\pi}{۱۳}$
۴) $۶\cos^{۳}\frac{۶\pi}{۱۳}$

۱۱۸. اگر A، B و C زوایای یک مثلث باشند، حاصل $\tan(B+C)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\tan A$
۲) $-\tan A$
۳) $\cot A$
۴) $-\cot A$

۱۱۹. در مثلث ABC، رابطه‌ی $\tan(B+۲۰^\circ)\tan(C+۴۰^\circ)=۱$ برقرار است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\hat{A}=۹۰^\circ$
۲) $\hat{A}=۱۱۰^\circ$
۳) $\hat{A}=۱۲۰^\circ$
۴) $\hat{A}=۱۵۰^\circ$



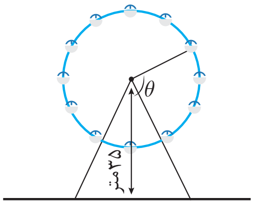
۱۲۰. اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos ۷۰^\circ + ۲\sin ۱۱۰^\circ}{\cos ۱۶۰^\circ - ۲\sin ۲۰۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴۱}{۷}$
۲) $\frac{۱۵}{۸}$
۳) $\frac{۱۷}{۸}$
۴) $-\frac{۵۹}{۷}$

۱۲۱. اگر $\sin ۲۴^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin ۶۶^\circ + \tan ۲۴^\circ \sin ۲۴^\circ}{\cos ۱۵۶^\circ}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a^۲ - ۱}$
۲) $\frac{۱}{۱ - a^۲}$
۳) $\frac{a}{۱ - a}$
۴) $\frac{a}{a - ۱}$

۱۲۲. یک چرخ و فلک که شعاع دایره‌ی آن ۲۵ متر است، مفروض است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا زمین ۳۵ متر است. با فرض این‌که شخصی از پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک شروع به حرکت کند، وقتی چرخ و فلک به اندازه‌ی θ رادیان بچرخد، ارتفاع شخص از سطح زمین چقدر خواهد بود؟



۱) $h(\theta) = ۳۵ + ۲۵\sin\theta$
۲) $h(\theta) = ۳۵ - ۲۵\sin\theta$
۳) $h(\theta) = ۳۵ + ۲۵\cos\theta$
۴) $h(\theta) = ۳۵ - ۲۵\cos\theta$

۱۲۳. $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})$ را در کدام عبارت زیر ضرب کنیم تا حاصل‌ضرب برابر یک شود؟

۱) $\cot ۳۰^\circ$
۲) $\cot ۲۱۰^\circ$
۳) $\cot ۲۴۰^\circ$
۴) $\cot ۳۰۰^\circ$

۱۲۴. حاصل عبارت $A = \frac{\tan ۲۲۵^\circ - \cos(-\frac{۴\pi}{۳})}{\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) + \cot(\frac{۵\pi}{۴})}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۱-
۴) ۳-

۱۲۵. حاصل عبارت $\tan ۷۲۰^\circ + \sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) + \cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) - \tan(-۶۰۰^\circ)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $-۲ + \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $۲ - \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۲۶. تساوی $\tan(۲x - \frac{\pi}{۱۵}) = \cot(\frac{۳\pi}{۱۵} + ۳x)$، به ازای کدام مقدار x می‌تواند برقرار باشد؟

۱) $\frac{۱۱\pi}{۱۵}$
۲) $\frac{۱۱\pi}{۵۰}$
۳) $\frac{۱۱\pi}{۱۵۰}$
۴) $\frac{۱۱\pi}{۳۰}$

۱۲۷. حاصل عبارت $A = ۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) - ۳\sin(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha) - ۴\sin(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha) + ۵\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{۲۲\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۲۸. مقدار $\sin ۱۵^\circ$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}$
۲) $\frac{\sqrt{۳ - \sqrt{۲}}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}$
۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳ - \sqrt{۲}}}$

۱۲۹. حاصل عبارت $A = \frac{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ (۲\cos^۲ ۱۵^\circ - ۱)}{\sin^۶ ۱۵^\circ + \cos^۶ ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۵}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۵}$

۱۳۰. حاصل عبارت $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{۸}(\cos\frac{\pi}{۸}-\sin\frac{\pi}{۸})}{(\sin ۱۵^\circ)\left(\sin^{۴}(۷/۵)^\circ-\cos^{۴}(۷/۵)^\circ\right)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۳۱. اگر $\dfrac{\cos x}{۲\sin x+۵\cos x}=۳$ آن‌گاه مقدار $\cot ۲x$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۲۱}{۲۹}$ ۲) $-\dfrac{۲۹}{۲۱}$ ۳) $\dfrac{۲۱}{۲۰}$ ۴) $\dfrac{۲۰}{۲۱}$

۱۳۲. اگر $\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۹$ و انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی x در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه مقدار $\tan\dfrac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۳. اگر $\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=\dfrac{۱}{۴}$ باشد، $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $\pm\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\pm\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ± ۱ ۴) $\pm\dfrac{۳}{۴}$

پرسش‌های سطح متوسط

۱۳٤. اگر $\cos(\frac{۵\pi}{۲}-x)=۲\sin(\frac{۱۱\pi}{۲}+x)$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $B=۳\cot(x-۷\pi)+\tan(\frac{۴۱\pi}{۲}+x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۳۵. اگر $۲۷/۵^\circ<\alpha<۷۵^\circ$ و $\sin(۱۲۶۰^\circ-۲\alpha)=\dfrac{۲m-۱}{m}$، آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}<m\le ۱$ ۲) $۱\le m<\dfrac{۳}{۲}$ ۳) $-۱\le m<-\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۲}<m\le -۱$

۱۳۶. اگر $\alpha-\beta=\dfrac{۳\pi}{۲}$ آن‌گاه $A=\sin(\beta-۲\alpha)+\cos(۴\alpha-۳\beta)$ کدام است؟

۱) $۲\cos\alpha$ ۲) $۲\sin\alpha$ ۳) $\cos\alpha-\sin\alpha$ ۴) $\cos\alpha+\sin\alpha$

۱۳۷. حاصل عبارت $A=\tan ۱^\circ\times\tan ۲^\circ\times\tan ۳^\circ\ldots\tan ۸۹^\circ$ چند برابر حاصل عبارت $B=\cos\dfrac{\pi}{۵}\cos\dfrac{۲\pi}{۵}$ است؟

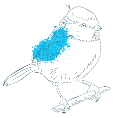
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۱۳۸. مقدار عبارت $A=\dfrac{۱}{۱+\cot ۱^\circ}+\dfrac{۱}{۱+\cot ۲^\circ}+\dfrac{۱}{۱+\cot ۳^\circ}+\cdots+\dfrac{۱}{۱+\cot ۸۹^\circ}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۸۹}{۲}$ ۲) $\dfrac{۹۱}{۲}$ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۱۳۹. مقدار عبارت $A=\dfrac{۱-\sin ۸۰^\circ-\sin^{۲}۳۵^\circ-\sin^{۲}۵۵^\circ}{\tan ۳۵^\circ\tan ۵۵^\circ-۱-۲\cos ۱۰^\circ}$ چند برابر حاصل عبارت $B=\sin\dfrac{۳\pi}{۴}+\sin\dfrac{۵\pi}{۴}+\sin\dfrac{۷\pi}{۴}$ است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$



۱٤۰. **کدام‌یک از گزینه‌های زیر برای قرار گرفتن به‌جای x و y در تساوی $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$ و $\tan(y + \frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹} + y)$ می‌توانند مناسب باشند؟** (کتاب درسی)

۱) $\begin{cases} x = \frac{۴\pi}{۹} \\ y = \frac{۱۰\pi}{۹} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = \frac{۴\pi}{۹} \\ y = \frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = \frac{۴۳\pi}{۳۶} \\ y = \frac{۱۰\pi}{۹} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = \frac{۴۳\pi}{۳۶} \\ y = \frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases}$

۱٤۱. **چه تعداد از تساوی‌های زیر یک اتحاد هستند؟ (تمام مخرج‌ها مخالف صفر هستند.)** (کتاب درسی)

الف) $(۱ - \sin\theta)(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta) = \cos\theta$ ب) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

ج) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha$ د) $\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱٤۲. **حاصل عبارت $A = \frac{\sin^۲ ۱۰^\circ + \sin^۲ ۲۰^\circ + \sin^۲ ۳۰^\circ + \cdots + \sin^۲ ۹۰^\circ}{\cos^۲ ۱۰^\circ + \cos^۲ ۲۰^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ + \cdots + \cos^۲ ۹۰^\circ}$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۰/۸ ۴) تعریف نشده

۱٤۳. **اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = -\frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{۲\sin\alpha - ۳\cot\alpha}{۴\cos\alpha}$ کدام است؟** (کتاب درسی)

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸}$ ۳) $-\frac{۱۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۷}{۸}$

۱٤٤. **حاصل عبارت $A = \sin^۲\theta(۳ + ۲\cot^۲\theta) + \frac{۸ - \sin^۳\theta}{۲ - \sin\theta} + ۱ - ۲\sin\theta$ برابر کدام گزینه است؟**

۱) $۲\sin^۲\theta + ۵$ ۲) $۳\sin^۲\theta + ۷$ ۳) $۲\sin^۲\theta + ۷$ ۴) $۳\sin^۲\theta + ۵$

۱٤۵. **اگر $\cos\alpha = \frac{۱}{۳}$ وانتهای کمان روبه‌روبه زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، مقدار عبارت $۳\sin(۲۷۰^\circ - \alpha) - \sqrt{۲}\cot(۶۳۰^\circ + \alpha)$ کدام است؟**

۱) ۵- ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵

۱٤۶. **حاصل عبارت $A = \frac{\sin^۲ ۳۸۵^\circ + \sin^۲ ۷۸۵^\circ}{\tan ۷۵۱^\circ \times \cot ۱۰۴۹^\circ}$ چند واحد کم‌تر از حاصل عبارت $B = \frac{\sin\frac{۵\pi}{۱۶}\tan\frac{\pi}{۸}}{\cot\frac{۳\pi}{۸}\cos\frac{۳\pi}{۱۶}}$ است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۱٤۷. **اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱۳}{۱۰}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟**

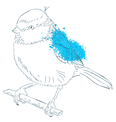
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱٤۸. **اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

۱٤۹. **اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + kx + k - ۲ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$ کدام است؟**

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۳



۱۵۰. حاصل عبارت $A=\frac{\cos^{۲}۱۳۰^\circ-\sin^{۲}۵۰^\circ}{\sin ۱۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $-۲\cot ۸۰^\circ$
۲) $۲\cot ۸۰^\circ$
۳) $\frac{۱}{۲}\cot ۸۰^\circ$
۴) $-\frac{۱}{۲}\cot ۸۰^\circ$

۱۵۱. اگر $\frac{\sqrt{۱+\sin ۵۰^\circ}}{۳\sin ۲۵^\circ-۲\sin ۶۵^\circ}=a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\cot ۲۵^\circ$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱+۲a}{۳a-۱}$
۲) $\frac{۳a-۱}{۱+۲a}$
۳) $\frac{۱+۳a}{۲a-۱}$
۴) $\frac{۲a-۱}{۱+۳a}$

۱۵۲. حاصل عبارت $A=\cos\frac{\pi}{۲۴}\cos\frac{۵\pi}{۲۴}\cos\frac{۷\pi}{۲۴}\cos\frac{۱۱\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۱۵۳. حاصل عبارت $A=\frac{\sin^{۴}\frac{\pi}{۸}+\cos^{۴}\frac{\pi}{۸}}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}-\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۸}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$
۲) $-\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۱۵۴. مقدار عبارت $A=\cos^{۵}۲x\sin ۲x-\sin^{۵}۲x\cos ۲x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۴۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۱۵۵. حاصل عبارت $A=۴\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})\sin(۲\pi-۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin ۴\alpha$
۲) $\sin ۴\alpha$
۳) $\sin^{۲}۲\alpha$
۴) $-\sin^{۲}۲\alpha$

۱۵۶. حاصل عبارت $A=\frac{\sin ۴۴^\circ \cos ۲۲^\circ}{(۱+\cos ۴۴^\circ)(۱-\cos ۲۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) $۲\cot ۱۱^\circ$
۲) $۲\tan ۱۱^\circ$
۳) $\cot ۱۱^\circ$
۴) $\tan ۱۱^\circ$

۱۵۷. حاصل عبارت $\frac{۱+\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}{۱+\sin ۴۰^\circ+\cos ۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$
۲) $\tan ۲۰^\circ$
۳) $\cot ۱۰^\circ$
۴) $\cot ۲۰^\circ$

۱۵۸. حاصل عبارت $A=\frac{\cos ۲x}{\tan x+\cot x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۳۲}$ کدام است؟

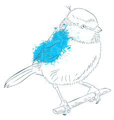
۱) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۸}$
۲) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۸}$
۴) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۴}$

۱۵۹. اگر $\sin x-\cos x=-\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۸۱}$
۲) $\frac{۴۷}{۸۱}$
۳) $-\frac{۴۷}{۸۱}$
۴) $-\frac{۳۷}{۸۱}$

۱۶۰. اگر رابطه‌ی $\frac{۱}{\sin^{۲}x}+\frac{۱}{\tan^{۲}x}+\frac{۱}{\cos^{۲}x}+\frac{۱}{\cot^{۲}x}=۱۴$ برقرار باشد، حاصل $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{۱}{۲}$
۲) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\pm\frac{۱}{۴}$



۱۶۱. اگر $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ باشد و $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴}$ باشد، مقدار عبارت $\tan ۲\alpha+\cot ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۲۵}{۱۶۸}$ ۲) $-\frac{۶۲۵}{۱۶۸}$ ۳) $\frac{۵۲۷}{۱۶۸}$ ۴) $-\frac{۵۲۷}{۱۶۸}$

۱۶۲. اگر $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=-۴$ باشد، حاصل $\tan ۴x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۲) $\frac{۲۴}{۷}$ ۳) $-\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۶۳. اگر $\frac{(۱-\tan^۲\alpha)\tan\alpha}{(۱+\tan^۲\alpha)^۲}=\frac{۳}{۱۶}$ باشد، حاصل $\cos ۸\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۷}{۱۶}$

۱۶۴. اگر $\frac{\pi}{۳}\le\alpha\le\frac{۵\pi}{۱۲}$ باشد، بیش‌ترین مقدار عبارت $A=\frac{۱-\tan^۲(۴۵^\circ-۲\alpha)}{۱+\tan^۲(۴۵^\circ-۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۶۵. حاصل عبارت $A=\frac{۱-\cot^۲\frac{۵\pi}{۱۲}}{۱+\cot^۲\frac{۵\pi}{۱۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پرسش‌های سطح دشوار

۱۶۶. در مثلثی بین زوایای A، B و C رابطه‌ی $\sin^۲A+\cos^۲B+\cos^۲C=۲$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۶۷. اگر $\sin^۲x+۴\sin x\cos x+۵\cos^۲x=۳$ باشد، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۶۸. اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $\tan^۴\alpha+\cot^۴\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۸۴۴}{۸۱}$ ۲) $\frac{۱۸۵۴}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۹۵۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱۹۴۴}{۸۱}$

۱۶۹. اگر $f(\sin x)=\cos ۴x$ باشد، در این صورت $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

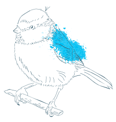
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۷۰. حاصل عبارت $A=\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۸۰^\circ$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۱۷۱. حاصل عبارت $\sin ۱۸^\circ\sin ۵۴^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$



۱۷۲. اگر $\tan\frac{x}{۲}=۲-\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　۲) $-\frac{۱}{۲}$　۳) $\frac{۲}{۳}$　۴) $-\frac{۲}{۳}$

۱۷۳. حاصل عبارت $A=\tan ۲۰^\circ+۲\tan ۴۰^\circ+۴\cot ۸۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\tan ۷۰^\circ$　۲) $\tan ۸۰^\circ$　۳) $\tan ۵۰^\circ$　۴) $\tan ۴۰^\circ$

۱۷۴. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{B}=۹۰^\circ)$، مقدار $\tan\frac{A}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{b+c}$　۲) $\frac{b}{a+c}$　۳) $\frac{a}{b-c}$　۴) $\frac{b}{a-c}$

پرسش‌های ترکیب سطوح

۱۷۵. حاصل عبارت $A=\tan\frac{\pi}{۹}+\tan\frac{۲\pi}{۹}+\tan\frac{۳\pi}{۹}+\cdots+\tan\frac{۱۷\pi}{۹}$ کدام است؟

۱) ۱　۲) صفر　۳) ۱-　۴) ۲

۱۷۶. کدام گزینه درباره‌ی عبارت $A=\frac{\sin ۱۰^\circ+\sin ۲۰^\circ+\sin ۳۰^\circ+\cdots+\sin ۹۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ+\cos ۲۰^\circ+\cos ۳۰^\circ+\cdots+\cos ۹۰^\circ}$ صحیح است؟

۱) $A=۰$　۲) $A=۱$　۳) $A>۱$　۴) $A<۱$

۱۷۷. حاصل عبارت $A=\sin^۲\frac{\pi}{۲۰}+\sin^۲\frac{۲\pi}{۲۰}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۲۰}+\cdots+\sin^۲\frac{۱۰\pi}{۲۰}$ کدام است؟

۱) ۵　۲) ۴/۵　۳) ۴　۴) ۵/۵

۱۷۸. حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴})+\frac{۱}{۲}\tan(-\frac{۴\pi}{۳})}$ چند واحد کم‌تر از حاصل عبارت $B=\sin^۲\frac{۲۵\pi}{۳}-\cos^۲\frac{۲۳\pi}{۴}$ است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{۳}{۴}$　۲) $\frac{۵}{۴}$　۳) $\frac{۱}{۴}$　۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۷۹. اگر α کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A=\sqrt{\frac{\cot^۲\alpha}{۱+\cot^۲\alpha}}(\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha}+\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha})$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱-　۳) ۲-　۴) ۲

۱۸۰. اگر θ کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی بوده و $\frac{\sin\theta+۳\cos\theta}{\sin\theta-۲\cos\theta}=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\cos\theta$ کدام است؟

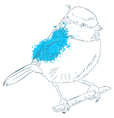
۱) $-\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$　۲) $\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$　۳) $-\frac{۴}{۵\sqrt{۵}}$　۴) $\frac{۴}{۵\sqrt{۵}}$

۱۸۱. اگر α کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی بوده و رابطه‌ی $۶\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=۳$ برقرار باشد، مقدار عبارت $\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۲}-\alpha)-\cot(-۹\pi-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$　۲) $-\frac{۳}{۲}$　۳) $\frac{۸}{۳}$　۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۸۲. مجموع کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A=\frac{۱-۴\cos^۲x}{-۳+۲\cos^۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$　۲) ۲　۳) $\frac{۸}{۳}$　۴) ۴



۱۸۳. حاصل عبارت $A=\sin^{۴}\frac{\pi}{۸}+\sin^{۴}\frac{۳\pi}{۸}+\sin^{۴}\frac{۵\pi}{۸}+\sin^{۴}\frac{۷\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۳
۴) ۱

۱۸۴. اگر $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\sqrt{۱+\sin ۲x}+\sqrt{۱-\sin ۲x}=\frac{۴}{۵}$ آن‌گاه حاصل $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۶۷}{۶۲۵}$
۲) $-\frac{۵۷}{۶۲۵}$
۳) $-\frac{۴۷}{۶۲۵}$
۴) $-\frac{۳۷}{۶۲۵}$

۱۸۵. حاصل عبارت $A=\frac{\sin ۲x+\sin ۴x}{۱+\cos ۲x+\cos ۴x}-\cot ۲x$ کدام است؟

۱) $-۲\cot ۴x$
۲) $۲\cot ۴x$
۳) $-\cot ۴x$
۴) $\cot ۴x$

۱۸۶. اگر حاصل عبارت $A=\frac{۴\cos ۲x}{\tan x+\cot x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۱۶}$ را a و حاصل عبارت $B=\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴}+x)-\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴}-x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ را b بنامیم، مقدار $a+b$ کدام است؟

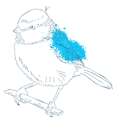
۱) صفر
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۸۷. حاصل عبارت $A=\sin^{۲}(۳۸^{\circ}+\alpha)+\cot(۲۲^{\circ}+\beta)\cot(\beta-۶۸^{\circ})+\sin^{۲}(۵۲^{\circ}-\alpha)$ چند واحد کم‌تر از حاصل عبارت $B=\frac{\sin\frac{۲\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۵}}{\sin\frac{۴\pi}{۵}+\sin\frac{۳\pi}{۵}}$ است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

۱۸۸. اگر $\cos\alpha=\frac{۱}{۵}$ باشد، حاصل عبارت $A=۳\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}+۲۵\cos ۴\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۸۳}{۲۵}$
۲) $\frac{۴۷۳}{۲۵}$
۳) $\frac{۴۹۳}{۲۵}$
۴) $\frac{۴۶۳}{۲۵}$



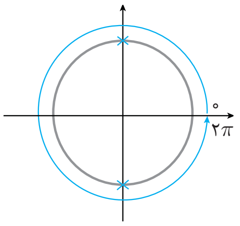
جلسه سوم: معادلات مثلثاتی

هر معادله‌ای که شامل نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادله‌ی مثلثاتی نام دارد. تست‌ها و سؤالات معادله‌ی مثلثاتی دارای دو تیپ اصلی هستند: **۱-** شمارش تعداد جواب‌های معادله **۲-** جواب کلی یک معادله‌ی مثلثاتی. در اینجا هر تیپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

شمارش تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی ساده

معادلات مثلثاتی ساده به شکل $\sin x = b$، $\cos x = b$ $(-۱\le b\le ۱)$، $\tan x = c$ [1] و $\cot x = c$ [2] هستند. معلوم است که این دست معادلات، دارای بی‌شمار جواب هستند. مثلاً معادله‌ی ساده $\sin x = ۰$ را در نظر بگیرید. جواب‌های این معادله به شکل $...,۰ , \pm\pi , \pm ۲\pi$ هستند که به‌طور کلی می‌توان آن‌ها را $k\pi$ (همه مضارب π) نامید. معلوم است که این معادله دارای بی‌شمار جواب است چون بی‌شمار عدد مضرب π داریم. بنابراین در تیپ سؤالات شمارش تعداد جواب‌ها، بازه‌ای را مشخص می‌کنند تا تعداد جواب‌ها در آن بازه شمارش شود.

حال فرض کنید می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $\cos x = ۰$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیدا کنیم. روش حل این دست معادلات به این شکل است که با رسم دایره‌ی مثلثاتی، مکان‌هایی را که مقدار کسینوس در آن‌ها برابر صفر می‌شود را مشخص می‌کنیم. پس از آن با توجه به بازه‌ی داده شده از زاویه‌ی صفر شروع می‌کنیم و در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) می‌چرخیم تا به انتهای بازه یعنی ۲π برسیم.



معلوم است که در طی چرخیدن یک دور (از صفر تا ۲π)، دو بار از روی جواب‌های معادله (که با علامت × مشخص کرده‌ایم) عبور می‌کنیم، پس این معادله در این بازه دارای دو جواب است. این جواب‌ها $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ هستند.

مثال ۱۵ **تعداد جواب‌های هریک از معادلات زیر را در بازه‌ی داده شده بیابید.**

$\sin x = \frac{۱}{۵} \quad , \quad x\in[۰ \,, ۴\pi]$

$\tan x = ۸ \quad , \quad x\in[۰ \,, ۲\pi]$

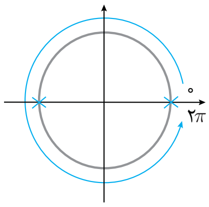
$\cot x = ۴ \quad , \quad x\in[\pi \,, ۲\pi]$

$\sin x = ۰ \quad , \quad x\in[۰,۲\pi]$

$\sin x = ۱ \quad , \quad x\in[۰ \,, \pi]$

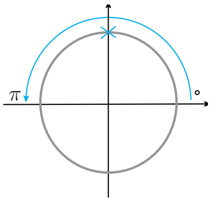
$\cos x = -\frac{۱}{۳} \quad , \quad x\in[\frac{\pi}{۲} \,, \frac{۳\pi}{۲}]$

پاسخ:

تعداد جواب‌ها	دایره‌ی مثلثاتی	معادله
۳		$\sin x = ۰$

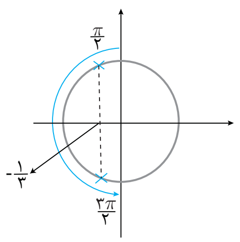
تذکر

دقت کنید که از صفر شروع می‌کنیم (توجه شود که یکی از جواب‌ها $x = ۰$ است) و با حرکت به سمت ۲π از π عبور می‌کنیم و دوباره به ۲π می‌رسیم که در همان جایگاه صفر قرار دارد. بنابراین ۲π و π و ۰ جواب‌های معادله هستند. حواستان باشد که صفر و ۲π در دایره در یک‌جا قرار می‌گیرند ولی دو زاویه متفاوت هستند.

تعداد جواب‌ها	دایره‌ی مثلثاتی	معادله
۱		$\sin x = ۱$

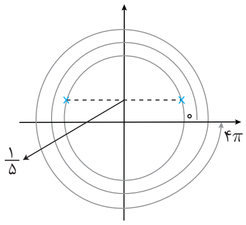
---

[1] و [2] ۱ و ۲- معادلات مثلثاتی دارای تانژانت و کتانژانت به شکل مستقیم در کتاب درسی مطرح نشده‌اند.

۲		$\cos x = -\frac{۱}{۳}$

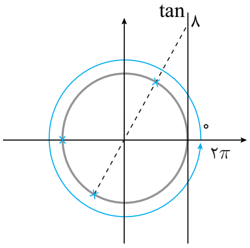
تذکر

مهم نیست که چه زاویه‌ای‌ست که کسینوس آن $-\frac{۱}{۳}$ می‌شود. مهم تعداد جواب‌هاست. عدد $-\frac{۱}{۳}$ را روی محور کسینوس پیدا می‌کنیم و عمودی بر آن رسم می‌کنیم تا دایره‌ی مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند.

۴		$\sin x = \frac{۱}{۵}$

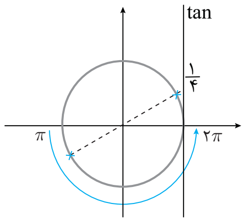
تذکر

دقت کنید که از صفر تا ۴π باید دو دور، دور دایره‌ی مثلثاتی بزنیم. بنابراین ۴ بار از روی جواب‌ها عبور می‌کنیم.

۲		$\tan x = ۸$

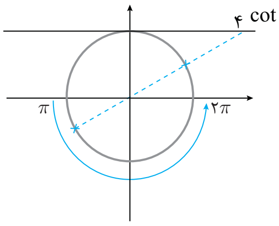
تذکر

لازم است در این معادله محور تانژانت را هم رسم کنیم. عدد ۸ را روی محور تانژانت پیدا می‌کنیم و به مرکز دایره‌ی مثلثاتی وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. این نقاط تقاطع، جواب‌های معادله هستند.

۱		$\cot x = ۴ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{۴}$

تذکر

اگر محور کتانژانت (که در کتاب درسی نیست ولی ما آن را یاد داده‌ایم) را رسم کنید می‌توانید بدون تغییر معادله مستقیماً آن را حل کنید.

۱		$\cot x = ۴$