

جلد اول: درس نامه + آزمون های مبحثی و جامع

جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون

کازم اجلالی، ارشک حمیدی



انتگرالگو

به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب ریاضی ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ را مرور کنید. این کتاب پانزده فصل دارد. به جز فصل پانزدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل پانزدهم ویژه «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب ریاضی ۳ را در هفت فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ که پیش‌زمینه درس‌های متناظرشان از کتاب ریاضی ۳ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هر چه جلوتر برود، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیده کنکورهای سراسری است. فایل PDF این آزمون‌های تألیفی را می‌توانید با اسکن QR Code انتهای پیشگفتار یا از سایت انتشارات الگو به آدرس www.olgoobooks.ir دریافت کنید. سؤال‌های مربوط به کنکور را در همین کتاب آورده‌ایم.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آماده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شماره این مطلب را در کنار شماره سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامه تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخه چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را با اسکن QR Code پشت جلد کتاب یا از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج آزمون ریاضی رشته تجربی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج آزمون نیز است.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان



می‌توانید فایل PDF آزمون‌های تألیفی جامع فصل‌ها را به صورت رایگان با اسکن QR Code مقابل دریافت کنید.

◆ فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۶) ۱

آزمون‌های ۱ و ۲ ۶

درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۷ تا ۱۲) ۸

آزمون‌های ۳ و ۴ ۱۳

درس سوم: سهمی و تابع درجه دوم (گام‌های ۱۳ تا ۲۰) ۱۵

آزمون‌های ۵ تا ۷ ۲۳

درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۱ تا ۲۳) ۲۶

آزمون‌های ۸ تا ۱۰ ۳۲

درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۴) ۳۵

آزمون ۱۱ ۳۷

درس ششم: جبر توابع (گام ۲۵) ۳۸

آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴ ۴۱

درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۶ تا ۲۸) ۴۴

آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸ ۴۹

درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۲۹ تا ۳۸) ۵۳

آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲ ۶۸

درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۳۹ تا ۴۵) ۷۶

آزمون‌های ۲۳ و ۲۴ ۸۰

درس دهم: توابع یکنوا (گام‌های ۴۶ تا ۵۸) ۸۲

آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷ ۹۰

درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۵۹ تا ۶۸) ۹۳

آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲ ۱۰۰

آزمون‌های ۳۳ و ۳۴: آزمون‌های فصل اول (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۰۵

◆ فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۶۹ تا ۷۱) ۱۰۷

آزمون‌های ۳۵ و ۳۶ ۱۱۱

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (گام‌های ۷۲ تا ۸۰) ۱۱۳

آزمون‌های ۳۷ و ۳۸ ۱۲۰

درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۱ تا ۸۳) ۱۲۲

آزمون‌های ۳۹ تا ۴۲ ۱۲۷

درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۴ تا ۸۹) ۱۳۱

آزمون‌های ۴۳ و ۴۴ ۱۳۶

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (گام‌های ۹۰ تا ۹۲) ۱۳۸

آزمون‌های ۴۵ تا ۴۷ ۱۴۲

درس ششم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α (گام‌های ۹۳ تا ۹۹) ۱۴۵

آزمون‌های ۴۸ تا ۵۱ ۱۵۰

درس هفتم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۰ تا ۱۰۵) ۱۵۴

آزمون‌های ۵۲ تا ۵۴ ۱۶۳

درس هشتم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۶) ۱۶۶

آزمون‌های ۵۵ تا ۵۹ ۱۷۴

آزمون‌های ۶۰ و ۶۱: آزمون‌های فصل دوم (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۷۹

◆ فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۱۷ تا ۱۲۵) ۱۸۱

آزمون‌های ۶۲ تا ۶۵ ۱۸۹

درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ (گام‌های ۱۲۶ تا ۱۲۹) ۱۹۳

آزمون‌های ۶۶ و ۶۷ ۱۹۸

درس سوم: پیوستگی (گام‌های ۱۳۰ تا ۱۳۷).....	۲۰۰
آزمون‌های ۶۸ و ۶۹.....	۲۰۵
درس چهارم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰).....	۲۰۷
آزمون‌های ۷۰ تا ۷۲.....	۲۱۱
درس پنجم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۵).....	۲۱۴
آزمون‌های ۷۳ تا ۷۵.....	۲۲۰
آزمون‌های ۷۶ و ۷۷: آزمون‌های فصل سوم (برگزیده کنکورهای سراسری)	۲۲۳

◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۴۶ تا ۱۶۰).....	۲۲۵
آزمون‌های ۷۸ تا ۸۰.....	۲۳۳
درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۶۱ تا ۱۶۵).....	۲۳۶
آزمون‌های ۸۱ تا ۸۴.....	۲۴۱
درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۶۶ تا ۱۶۸).....	۲۴۵
آزمون‌های ۸۵ تا ۸۷.....	۲۴۸
درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۶۹ تا ۱۷۵).....	۲۵۱
آزمون‌های ۸۸ و ۸۹.....	۲۵۶
درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۱۷۶ تا ۱۷۹).....	۲۵۸
آزمون‌های ۹۰ و ۹۱.....	۲۶۱
درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۱۸۰ و ۱۸۱).....	۲۶۳
آزمون ۹۲.....	۲۶۵
درس هفتم: مشتق دوم (گام ۱۸۲).....	۲۶۶
آزمون ۹۳.....	۲۶۸
درس هشتم: قاعده هویتنال (گام ۱۸۳).....	۲۶۹
آزمون ۹۴.....	۲۷۱
آزمون‌های ۹۵ تا ۹۸: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیده کنکورهای سراسری)	۲۷۲

◆ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۱۸۴ و ۱۸۵).....	۲۷۶
آزمون‌های ۹۹ و ۱۰۰.....	۲۷۹

درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۱۸۶).....	۲۸۱
آزمون‌های ۱۰۱ و ۱۰۲.....	۲۸۳
درس سوم: اکسترم‌های نسبی (گام‌های ۱۸۷ تا ۱۹۱).....	۲۸۵
آزمون‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵.....	۲۹۰
درس چهارم: اکسترم‌های مطلق (گام‌های ۱۹۲ تا ۱۹۴).....	۲۹۳
آزمون‌های ۱۰۶ و ۱۰۷.....	۲۹۷
درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۱۹۵).....	۲۹۹
آزمون‌های ۱۰۸ تا ۱۱۰.....	۳۰۳

آزمون‌های ۱۱۱ و ۱۱۲: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیده کنکورهای سراسری)

.....	۳۰۶
-------	-----

◆ فصل ششم: هندسه تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۱۹۶ تا ۲۰۳).....	۳۰۸
آزمون‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵.....	۳۱۵
درس دوم: تفکر تجسمی (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵).....	۳۱۸
آزمون ۱۱۶.....	۳۲۱
درس سوم: بیضی (گام‌های ۲۰۶ تا ۲۱۰).....	۳۲۲
آزمون‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹.....	۳۲۶
درس چهارم: دایره (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۸).....	۳۲۹
آزمون‌های ۱۲۰ تا ۱۲۴.....	۳۳۷
آزمون‌های ۱۲۵ و ۱۲۶: آزمون‌های فصل ششم (برگزیده کنکورهای سراسری)	۳۴۲

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: اصل جمع و اصل ضرب (گام‌های ۲۱۹ تا ۲۲۳).....	۳۴۴
آزمون‌های ۱۲۷ تا ۱۲۹.....	۳۴۸
درس دوم: جایگشت (گام‌های ۲۲۴ تا ۲۲۶).....	۳۵۱
آزمون‌های ۱۳۰ و ۱۳۱.....	۳۵۴
درس سوم: ترکیب (گام‌های ۲۲۷ تا ۲۳۰).....	۳۵۶
آزمون‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴.....	۳۶۱

درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۹۱) ۴۴۵
 آزمون ۱۶۹ ۴۴۷
 درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۹۲ تا ۲۹۴) ۴۴۸
 آزمون‌های ۱۷۰ و ۱۷۱ ۴۵۰

◆ فصل یازدهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

درس اول: حل معادله درجه دوم (گام‌های ۲۹۵ تا ۳۰۱) ۴۵۲
 آزمون‌های ۱۷۲ و ۱۷۳ ۴۵۶
 درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵) ۴۵۸
 آزمون‌های ۱۷۴ و ۱۷۵ ۴۶۲
 درس سوم: رابطه بین ضرایب و علامت جواب‌های معادله درجه دوم (گام‌های ۳۰۶ و ۳۰۷) ۴۶۴
 آزمون ۱۷۶ ۴۶۶
 درس چهارم: معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم خاص (گام‌های ۳۰۸ تا ۳۱۱) ۴۶۷
 آزمون ۱۷۷ ۴۷۱
 درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۱۲ تا ۳۱۶) ۴۷۲
 آزمون‌های ۱۷۸ و ۱۷۹ ۴۷۶
 درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۷ تا ۳۲۴) ۴۷۸
 آزمون‌های ۱۸۰ و ۱۸۱ ۴۸۵
 درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۲۵ تا ۳۲۸) ۴۸۷
 آزمون‌های ۱۸۲ و ۱۸۳ ۴۹۰
 آزمون‌های ۱۸۴ و ۱۸۵: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیده کنکورهای سراسری) ۴۹۲

◆ فصل دوازدهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام ۳۲۹) ۴۹۴
 آزمون ۱۸۶ ۴۹۶
 درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۳) ۴۹۷
 آزمون‌های ۱۸۷ تا ۱۸۹ ۵۰۳
 درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۴ تا ۳۳۶) ۵۰۶
 آزمون‌های ۱۹۰ و ۱۹۱ ۵۰۹

درس چهارم: احتمال مقدماتی (گام‌های ۲۳۱ و ۲۳۲) ۳۶۴
 آزمون‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹ ۳۷۰
 درس پنجم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل (گام‌های ۲۳۳ تا ۲۳۶) ۳۷۵
 آزمون‌های ۱۴۰ تا ۱۴۲ ۳۸۰
 درس ششم: قانون احتمال کل (گام‌های ۲۳۷ و ۲۳۸) ۳۸۳
 آزمون‌های ۱۴۳ تا ۱۴۵ ۳۸۷
 درس هفتم: آمار (گام‌های ۲۳۹ تا ۲۴۳) ۳۹۰
 آزمون‌های ۱۴۶ و ۱۴۷ ۳۹۳
 آزمون‌های ۱۴۸ و ۱۴۹: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیده کنکورهای سراسری) ۳۹۵

◆ فصل هشتم: بازه و مجموعه

درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۴۴ و ۲۴۵) ۳۹۷
 آزمون‌های ۱۵۰ و ۱۵۱ ۴۰۰
 درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۴۶ تا ۲۵۴) ۴۰۲
 آزمون‌های ۱۵۲ و ۱۵۳ ۴۰۶

◆ فصل نهم: الگو و دنباله

درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۵۵ تا ۲۵۷) ۴۰۸
 آزمون‌های ۱۵۴ و ۱۵۵ ۴۱۲
 درس دوم: دنباله حسابی (گام‌های ۲۵۸ تا ۲۶۶) ۴۱۴
 آزمون‌های ۱۵۶ و ۱۵۷ ۴۱۷
 درس سوم: دنباله هندسی (گام‌های ۲۶۷ تا ۲۷۴) ۴۱۹
 آزمون‌های ۱۵۸ و ۱۵۹ ۴۲۳
 آزمون ۱۶۰: آزمون فصل نهم (برگزیده کنکورهای سراسری) ۴۲۵

◆ فصل دهم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۰) ۴۲۶
 آزمون‌های ۱۶۱ و ۱۶۲ ۴۲۹
 درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۸۱ تا ۲۸۸) ۴۳۱
 آزمون‌های ۱۶۳ تا ۱۶۶ ۴۳۶
 درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۹ و ۲۹۰) ۴۴۰
 آزمون‌های ۱۶۷ و ۱۶۸ ۴۴۳

◆ فصل پانزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۲۳ تا ۲۲۹: آزمون‌های جامع ۵۹۲

◆ فصل شانزدهم: پاسخنامه کلیدی

دست‌گرمی‌ها ۶۱۳

آزمون‌ها ۶۱۵

درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۷ و ۳۳۸) ۵۱۱

آزمون‌های ۱۹۲ و ۱۹۳ ۵۱۴

درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۹ تا ۳۴۱) ۵۱۶

آزمون‌های ۱۹۴ و ۱۹۵ ۵۱۹

آزمون ۱۹۶: آزمون فصل دوازدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۲۱

◆ فصل سیزدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۴۲ تا ۳۴۴) ۵۲۲

آزمون‌های ۱۹۷ و ۱۹۸ ۵۲۶

درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۵ و ۳۴۶) ۵۲۸

آزمون‌های ۱۹۹ و ۲۰۰ ۵۳۱

درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۷ تا ۳۴۹) ۵۳۳

آزمون‌های ۲۰۱ تا ۲۰۳ ۵۳۶

درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ تا ۳۵۳) ۵۳۹

آزمون‌های ۲۰۴ و ۲۰۵ ۵۴۴

درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۴ و ۳۵۵) ۵۴۶

آزمون‌های ۲۰۶ تا ۲۰۸ ۵۵۰

آزمون‌های ۲۰۹ و ۲۱۰: آزمون‌های فصل سیزدهم (برگزیدهٔ کنکورهای

سراسری) ۵۵۳

◆ فصل چهاردهم: استدلال و هندسه

درس اول: استدلال، عمودمنصف و نیمساز (گام‌های ۳۵۶ تا ۳۵۹) ۵۵۵

آزمون ۲۱۱ ۵۵۸

درس دوم: نسبت و تناسب (گام ۳۶۰) ۵۵۹

آزمون ۲۱۲ ۵۶۰

درس سوم: قضیهٔ تالس (گام‌های ۳۶۱ تا ۳۶۶) ۵۶۱

آزمون‌های ۲۱۳ تا ۲۱۵ ۵۶۷

درس چهارم: تشابه (گام‌های ۳۶۷ تا ۳۷۰) ۵۷۱

آزمون‌های ۲۱۶ تا ۲۱۹ ۵۷۶

درس پنجم: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۳۷۱ و ۳۷۲) ۵۸۴

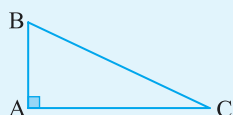
آزمون‌های ۲۲۰ و ۲۲۱ ۵۸۷

آزمون ۲۲۲: آزمون فصل چهاردهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۹۱

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:



$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده (به جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

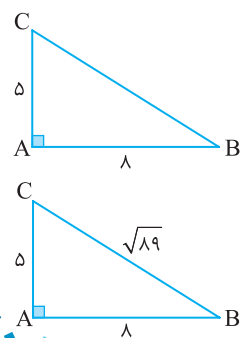
$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کتانژانت** این زاویه می‌نامند:



در شکل مقابل مقدار $\sin \hat{B} + \cos \hat{B}$ کدام است؟

(۲) $\frac{40}{89}$
(۴) $\frac{\sqrt{89}}{13}$

(۱) $\frac{89}{40}$
(۳) $\frac{13}{\sqrt{89}}$

از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به دست آوریم: $BC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$. بنابراین

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{89}} + \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{13}{\sqrt{89}}$$

تست

راه‌حل

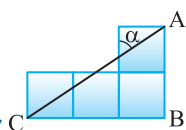


(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$



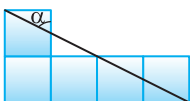
در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{CAB}$. بنابراین

$$\tan \alpha = \tan \hat{CAB} = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{2}$$

تست

راه‌حل

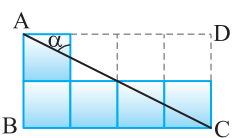


(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{ACD}$. بنابراین

$$\sin \alpha = \sin \hat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ACD ، $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. پس

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

تست

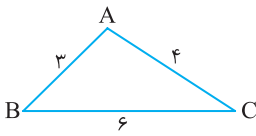
راه‌حل

تست



۴

در شکل مقابل مقدار $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C}$ کدام است؟



۱ (۲)
 $\frac{3}{4}$ (۴)

۲ (۱)
 $\frac{4}{3}$ (۳)

راه حل

مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH، $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{3}$. در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{4}$. بنابراین $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C} = \frac{BH}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{HC}{4} \right) = \frac{BH+HC}{3} = \frac{BC}{3} = 2$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

مقدار نسبت مثلثاتی	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$	$\cot \hat{A}$
مقدار زاویه A				
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست



۵

مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه A با زاویه 14° و از نقطه B با زاویه 50° دیده می‌شود. فاصله A از B تقریباً چقدر است؟ ($\tan 50^\circ \approx 1/19$, $\tan 14^\circ \approx 0/25$)



۱۲/۵۲ (۴)

۱۴/۵۲ (۳)

۱۳/۵۲ (۲)

۱۲ (۱)

راه حل

مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه CBH، $\tan 50^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{BH}$. پس $\frac{3}{BH} = \frac{1}{19}$ ، یعنی $BH = \frac{3}{1/19} \approx 2/52$.

در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\tan 14^\circ = \frac{CH}{HA} = \frac{3}{HA}$. پس $\frac{3}{HA} = \frac{0}{25}$ ، یعنی $HA = \frac{3}{0/25} = 12$.

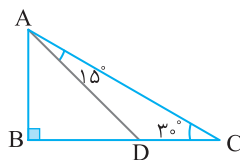
بنابراین فاصله دو نقطه B و A تقریباً برابر است با $BA = BH + HA \approx 2/52 + 12 = 14/52$.

تست



۶

در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ($AD = 2\sqrt{2}$)



$2(\sqrt{3}+1)$ (۲)
 $3\sqrt{3}$ (۴)

$2(\sqrt{3}-1)$ (۱)
 $2\sqrt{3}$ (۳)

راه حل

ابتدا توجه کنید که $\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. پس $\hat{BAD} = \hat{BAC} - \hat{DAC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

در مثلث قائم‌الزاویه DBA، $\cos \hat{BAD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$

$\sin \hat{BAD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2\sqrt{2}}$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$

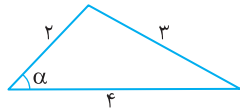
بنابراین $AB = 2$. همچنین، در همین مثلث،

بنابراین $BD = 2$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

به این ترتیب $CD = BC - BD = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$.

تست ۷

در شکل مقابل مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{13}{16}$

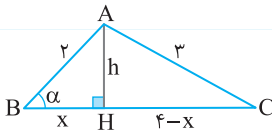
(۱) $\frac{7}{8}$

(۴) $\frac{11}{16}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH با توجه به قضیه فیثاغورس،



$$x^2 + h^2 = 4, \quad h^2 + (4-x)^2 = 9 \Rightarrow h^2 + x^2 + 16 - 8x = 9$$

اگر به جای $x^2 + h^2$ در معادله دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می‌توان مقدار x را به دست آورد

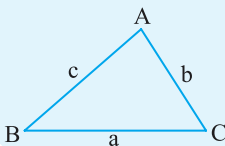
$$4 + 16 - 8x = 9 \Rightarrow 8x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH مقدار $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$ پس $\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{11}{16}$.

۷۱

محاسبه مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

تست ۸

در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $AB=AC$ ، $\hat{B} = 67/5^\circ$ و مساحت مثلث $9\sqrt{2}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟

(۴) ۶

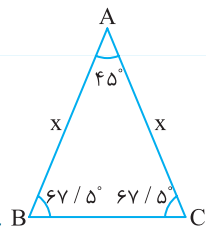
(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

راه حل

مطابق شکل مقابل اندازه زاویه A برابر 45° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر

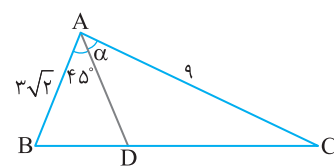


$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin \hat{A} \text{ است. پس}$$

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

تست ۹

در شکل روبه‌رو $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{2}{4}$

راه حل

توجه کنید که

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AD \times AC \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تست ۱۰

در یک متوازی‌الاضلاع که مساحت آن برابر $10\sqrt{3}$ است، اندازه یک ضلع برابر ۲ و اندازه یک زاویه 60° است. اندازه ضلع دیگر کدام است؟

(۴) ۱۲

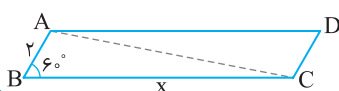
(۳) ۸

(۲) ۱۰

(۱) ۵

راه حل

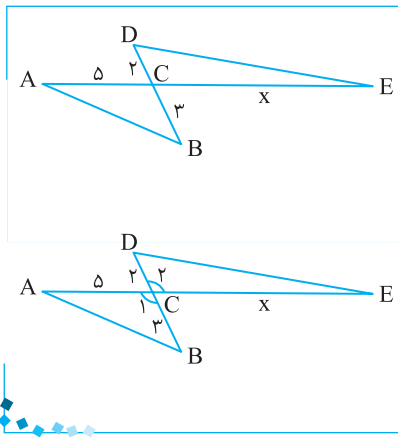
مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC برابر $5\sqrt{3}$ است. بنابراین



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 60^\circ \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \Rightarrow x = 10$$

تست ۱۱

راه حل



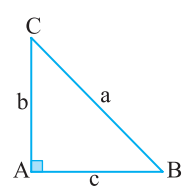
در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE برابر $\frac{3}{4}$ است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

توجه کنید که $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس $\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2$. از طرف دیگر،

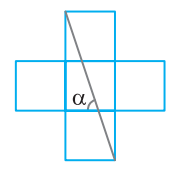
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}_1}{\frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \hat{C}_2} = \frac{CA \times CB}{CD \times CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times x} \Rightarrow x = 10$$

دست گرمی



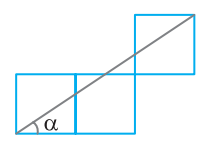
۵۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر $b=5$ و $\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) ۱۴



۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

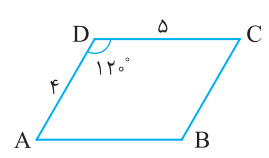


۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{11}}$

۶۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin^3 6^\circ - 3 \sin 6^\circ}{4 \cos^3 2^\circ - 3 \cos 2^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر



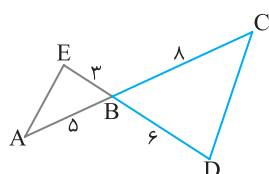
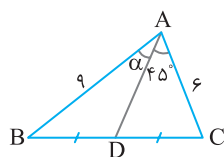
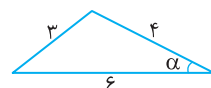
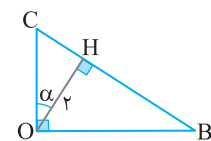
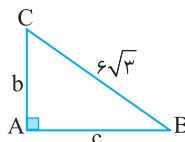
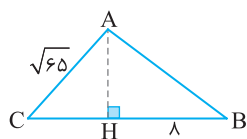
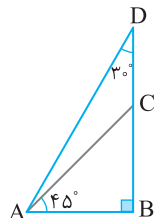
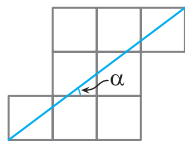
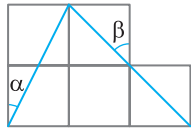
۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چقدر است؟

- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $10\sqrt{3}$ (۳) ۵ (۴) ۱۰

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

سؤال	گام
۳۴۱	۶۹
۳۴۲	۶۹
۳۴۳	۶۹
۳۴۴	۶۹ ۷۰
۳۴۵	۶۹
۳۴۶	۶۹
۳۴۷	۶۹
۳۴۸	۶۹
۳۴۹	۷۰ ۷۱
۳۵۰	۷۱

- ۳۴۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{1}{3}$ و $AC=2$. مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$
- ۳۴۲- در شکل زیر طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha - \cos \beta$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$
- ۳۴۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟
 (۱) $\frac{25}{6}$ (۲) $\frac{49}{16}$ (۳) $\frac{49}{15}$ (۴) $\frac{25}{12}$
- ۳۴۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
- ۳۴۵- در شکل مقابل $HB=8$ و $\tan \hat{B}=\frac{3}{4}$. طول CH کدام است؟
 (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{35}$ (۴) $\sqrt{24}$
- ۳۴۶- در شکل مقابل $\cot \hat{B}=\sqrt{2}$. مساحت مثلث چقدر است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۳۶ (۳) $18\sqrt{2}$ (۴) $36\sqrt{2}$
- ۳۴۷- در شکل مقابل $OH=2$. مقدار $OB+OC$ کدام است؟
 (۱) $\tan \alpha + \cot \alpha$ (۲) $\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$ (۳) $2 \tan \alpha$ (۴) $2 \cot \alpha$
- ۳۴۸- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{455}}{36}$ (۲) $\frac{\sqrt{455}}{48}$ (۳) $\frac{29}{36}$ (۴) $\frac{29}{48}$
- ۳۴۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۳۵۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟
 (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

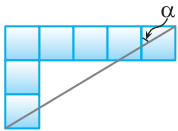


نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

آزمون ۳۶

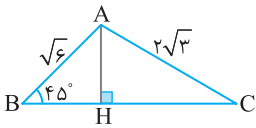
۳۵۱- در مثلث ABC ، اگر $\hat{C}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{4}{5}$ و $b+c=7$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{11}{3}$



۳۵۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$



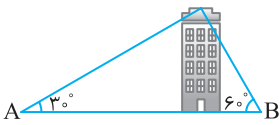
۳۵۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع HC به طول ضلع BH چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{5}$

۳۵۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه A و B روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند،

بالاترین قسمت یک ساختمان به ترتیب با زاویه‌های 30° و 60° دیده می‌شود. ارتفاع ساختمان کدام است؟

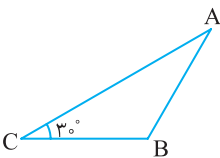
- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$



۳۵۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر

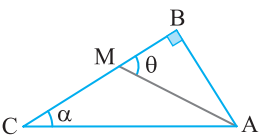
$8\sqrt{3}$ است. طول ضلع BC کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴) $16\sqrt{3}$



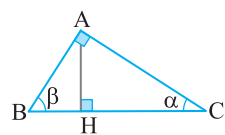
۳۵۶- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan \theta = 3 \tan \alpha$. حاصل عبارت $\cot \alpha + \cot \theta$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷



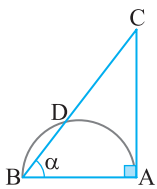
۳۵۷- در شکل مقابل $BC=4$. مقدار $\frac{BH}{HC}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 \alpha$ (۲) $\tan^2 \beta$ (۳) $\sin \alpha \cos \alpha$ (۴) $\sin \beta + \cos \beta$



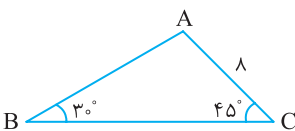
۳۵۸- در نیم‌دایره شکل روبه‌رو، $BD=x$ و $DC=8x$. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$



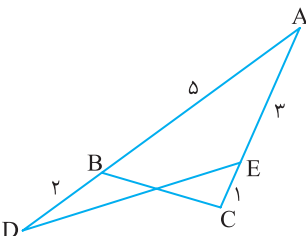
۳۵۹- در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $8\sqrt{2}$



۳۶۰- در شکل روبه‌رو $S_{ADE} + S_{ABC} = \frac{41}{4}$. اندازه زاویه حاده A کدام است؟

- (۱) 60° (۲) 45° (۳) 30° (۴) 15°

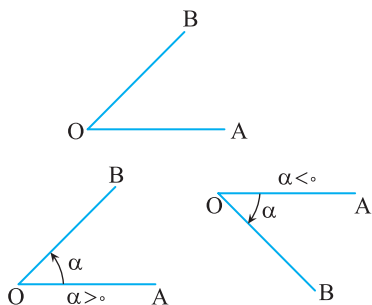


سؤال	گام
۳۵۱	۶۹
۳۵۲	۶۹
۳۵۳	۶۹ ۷۰
۳۵۴	۶۹ ۷۰
۳۵۵	۶۹ ۷۰
۳۵۶	۶۹
۳۵۷	۶۹
۳۵۸	۶۹
۳۵۹	۶۹ ۷۰ ۷۱
۳۶۰	۷۰ ۷۱

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

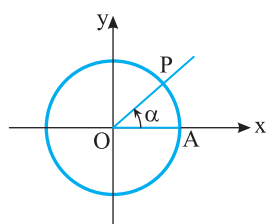
تعاریف اولیه

زاویه مثلثاتی

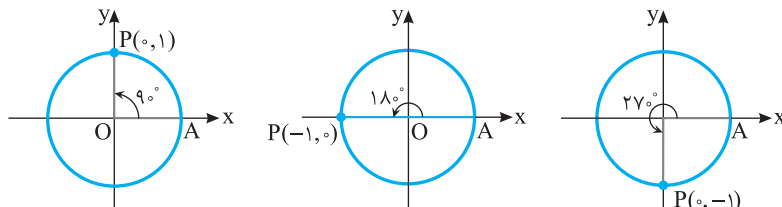


دو نیم خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطه O مشترک‌اند. اگر نیم خط OA حول نقطه O دوران کند و بر نیم خط OB منطبق شود، زاویه‌ای مثلثاتی ایجاد می‌شود. OA را ضلع ابتدایی، OB را ضلع انتهایی و مقدار دوران را مقدار زاویه مثلثاتی می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در موقعیت استاندارد است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

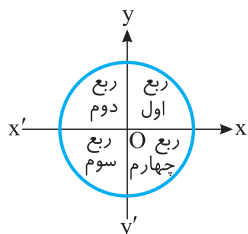
دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، دایره مثلثاتی می‌نامند. نقطه تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1, 0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازه α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازه زاویه مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویه α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطه P روی دایره و جهت دوران، زاویه α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه بین Ox و Oy را ناحیه اول یا ربع اول مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه بین Oy و Ox' را ربع دوم مثلثاتی، ناحیه بین Ox' و Oy' را ربع سوم مثلثاتی و ناحیه بین Ox و Oy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامند.

تذکر اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ یا $(1, 0)$ قرار داشته باشد، زاویه α در هیچ‌یک از چهار ناحیه مثلثاتی قرار ندارد.

نکته

ناحیه‌ای که نقطه P ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α ، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

حدود α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم

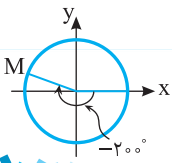
تست ۱

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در کدام ناحیه قرار دارد؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

راه‌حل

مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در ناحیه دوم قرار دارد.



تست ۲

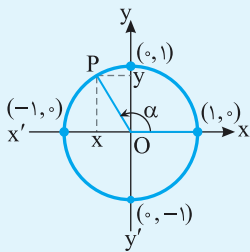
اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

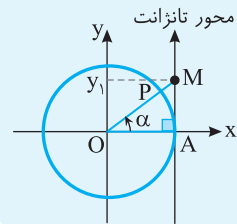
راه‌حل

چون α زاویه‌ای حاده است، پس $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، بنابراین $18^\circ < \alpha + 18^\circ < 27^\circ$ ، در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در ناحیه سوم قرار دارد.

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



در دایره مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α ، $\sin \alpha$ برابر عرض نقطه P یعنی y است. پس $\sin \alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را محور سینوس می‌نامند و چون $-1 \leq y \leq 1$ ، پس $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. همچنین $\cos \alpha$ برابر طول نقطه P یعنی x است. پس $\cos \alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را محور کسینوس می‌نامند و چون $-1 \leq x \leq 1$ ، پس $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.



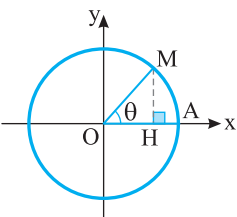
در نقطه $A(1, 0)$ محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را محور تانژانت می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویه دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویه OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت $\tan \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$. برای مشخص کردن تانژانت زاویه α ، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویه α ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه $M(1, y_1)$ قطع کند. در این صورت $y_1 = \tan \alpha$.

نکته

اگر ضلع انتهایی زاویه α روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویه α تعریف نمی‌شود.

تست ۳

در دایره مثلثاتی مقابل، $\cos \theta = \frac{2}{3}$. اندازه پاره خط AH چقدر است؟



- اول (۱) $\frac{1}{3}$
دوم (۲) $\frac{2}{3}$
سوم (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
چهارم (۴) $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$

راه‌حل

با توجه به شکل،

$$OH = \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

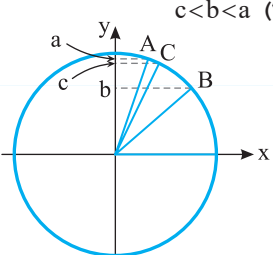
تست ۴

اگر $a = \sin 71^\circ$ ، $b = \sin 41^\circ$ و $c = \sin 67^\circ$ ، کدام درست است؟

- اول (۱) $a < b < c$ دوم (۲) $b < c < a$ سوم (۳) $a < c < b$ چهارم (۴) $c < b < a$

راه‌حل

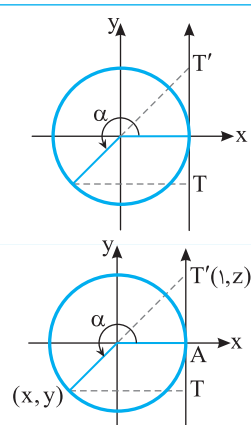
فرض کنید نقاط A، B و C به ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های 71° ، 41° و 67° روی دایره مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b < c < a$.



تست

 در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره خط TT' برابر کدام عبارت است؟

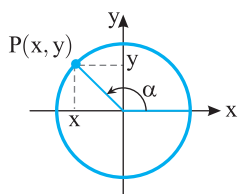
- (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$
- (۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$
- (۳) $\sin \alpha - \cos \alpha$
- (۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$

راه حل

 با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که $\sin \alpha = y$ و $\tan \alpha = z$. بنابراین طول پاره خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

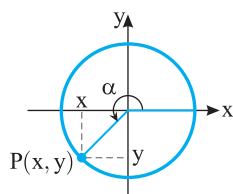
۷۴
علامت نسبت‌های مثلثاتی

اگر نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α ، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند. اگر نقطه P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطه P در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



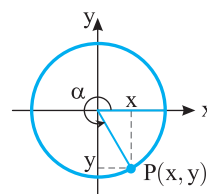
$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x > 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$



$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} < 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0$$



$$\sin \alpha = y < 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$

نکته

 علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه α ، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تست

 اگر $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راه حل

با توجه به تساوی $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که $\cos \alpha \leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ، معلوم است که $\sin \alpha \geq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست

 اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راه حل

با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ مشخص است که مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مختلف‌العلامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ واضح است که $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست

۸

کدام یک عددی مثبت است؟

$\cos 300^\circ$ (۴)

$\sin 300^\circ$ (۳)

$\cos 200^\circ$ (۲)

$\sin 200^\circ$ (۱)

راه حل

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 200° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 200^\circ$ و $\cos 200^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 300° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 300^\circ$ عددی منفی و $\cos 300^\circ$ عددی مثبت است.

۷۵

نسبتهای مثلثاتی چند زاویه معروف

زاویه نسبت	$\alpha=0^\circ$	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=180^\circ$	$\alpha=270^\circ$	$\alpha=360^\circ$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۷۶

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند α ، $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ عددی در بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

تست

۹

حداکثر مقدار عبارت $4 \cos \alpha - 1$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راه حل

طرفین نابرابری $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ را در ۴ ضرب می‌کنیم $-4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$. یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم $-5 \leq 4 \cos \alpha - 1 \leq 3$. بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست

۱۰

مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

راه حل

ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha - 2}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha} - \frac{2}{2 + \sin \alpha} = 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ می‌توانیم محدوده A را بیابیم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin \alpha \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin \alpha} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -\frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -1 و حداکثر مقدار آن $\frac{1}{3}$ است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۷

حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

نکته

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$0 < \sin \alpha < 1$	$0 < \sin \alpha < 1$	$-1 < \sin \alpha < 0$	$-1 < \sin \alpha < 0$
$0 < \cos \alpha < 1$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$0 < \cos \alpha < 1$
$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$	$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$
$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$	$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$

تست ۱۱

اگر $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A = 3 - 2 \sin \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

با توجه به $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، معلوم می‌شود α در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-1 \leq \sin \alpha \leq 0$. بنابراین $-2 \leq -2 \sin \alpha \leq 0$ و در نتیجه $3 - 2 \sin \alpha \leq 5$. پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

۷۸

نکته

با افزایش مقادیر α از 0° به 360° ، مقادیر $\sin \alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند. مقادیر $\cos \alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند. مقادیر $\tan \alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست ۱۲

کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

- ۱ (۱) $\sin 100^\circ$ ۲ (۲) $\sin 140^\circ$ ۳ (۳) $\sin 200^\circ$ ۴ (۴) $\sin 240^\circ$

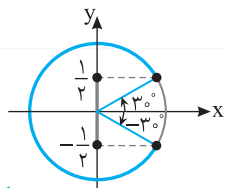
راه‌حل

توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 100° و 140° در ناحیه دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 200° و 240° در ناحیه سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیه دوم، زاویه بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین $\sin 100^\circ$ در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست ۱۳

اگر $-60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ و $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)



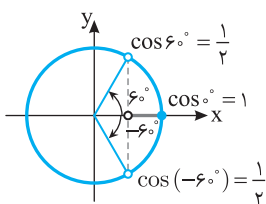
از $-60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-30^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 30^\circ$. با توجه به شکل روبه‌رو $-\frac{1}{4} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{4}$ و در نتیجه $-\frac{1}{4} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{4}$ ، یعنی $-1 \leq m \leq 1$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح 1 ، 0 ، و -1 باشد.

راه‌حل

تست ۱۴

اگر $-60^\circ < \alpha < 60^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود m کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{6} < m < 0$ ۲ (۲) $0 \leq m < \frac{1}{6}$ ۳ (۳) $-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$ ۴ (۴) $-\frac{1}{6} < m \leq 0$



وقتی α از -60° تا 60° تغییر می‌کند، مقدار $\cos \alpha$ از -60° تا 60° افزایش می‌یابد و سپس از 60° تا 0° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos \alpha$ در $\alpha = 0^\circ$ به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0$$

راه‌حل

تست ۱۵

اگر $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، مقادیر $\tan \alpha$ در کدام محدوده قرار دارند؟

(۱) $[-1, 1]$

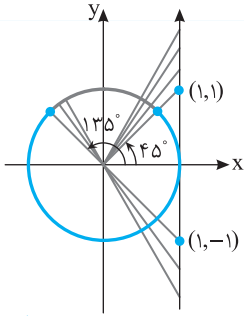
(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, 1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

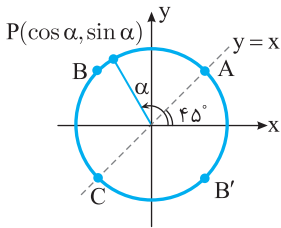
راه حل

با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، $\tan \alpha \geq 1$ یا $\tan \alpha \leq -1$ ، یعنی مقادیر $\tan \alpha$ در $\mathbb{R} - (-1, 1)$ قرار دارند.



نکته

از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطه (x, y) روی کمان ABC از دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $y > x$. بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان ABC باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان $AB'C$ باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$. به همین ترتیب نتایج زیر به دست می‌آید.



۷۹

نکته

شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی

دایره مثلثاتی باشد. در این صورت

● اگر نقطه P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$.

● اگر نقطه P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$.

● اگر نقطه P روی کمان‌های AB ، CD ، EF یا GH باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha < \cot \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان‌های BC ، DE ، FG یا HA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha > \cot \alpha$.

● اگر نقطه P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.

(۴) $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$

(۳) $\sin 23^\circ > \cos 23^\circ$

(۲) $\tan 25^\circ > \cot 25^\circ$

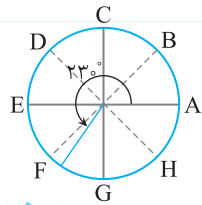
(۱) $\sin 25^\circ > \cos 25^\circ$

کدام گزینه درست است؟

تست ۱۶

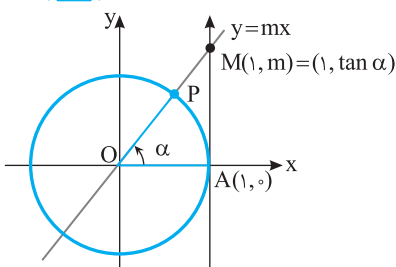
راه حل

با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 23° روی کمان FG است، پس $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$. خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.



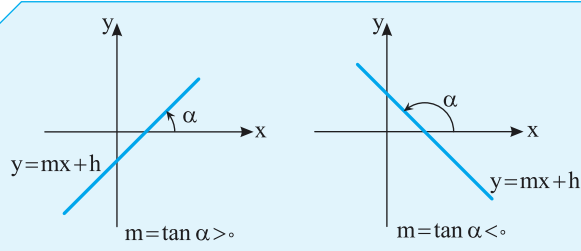
۸۰

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه



می‌دانیم مقدار $\tan \alpha$ برابر عرض نقطه M ، محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطه M برابر ۱ است و این نقطه روی خط $y=mx$ قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین $m = \tan \alpha$. اکنون توجه کنید که همه خط‌های موازی با خط $y=mx$ شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan \alpha$ است.

نکته



اگر محور طول‌ها و خط $y=mx+h$ یک زاویه مثلثاتی مثبت و کمتر از 180° به اندازه α تشکیل دهند، آن‌گاه $m=\tan \alpha$.

تست ۱۷

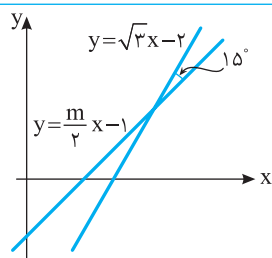
معادله خطی که از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی 60° می‌سازد، کدام است؟

(۱) $y=\sqrt{3}x+8$ (۲) $y=\sqrt{3}x-8$ (۳) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$ (۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

با توجه به زاویه خط با محور طول‌ها که برابر زاویه مثلثاتی 60° است، شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ یا همان $\sqrt{3}$ است. پس معادله خط به صورت $y=\sqrt{3}x+b$ است و چون خط از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کنند، $-2=\sqrt{3}\sqrt{12}+b$. بنابراین $b=-8$. پس معادله خط $y=\sqrt{3}x-8$ است.

راه‌حل

تست ۱۸



با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

چون شیب خط $y=\sqrt{3}x-2$ برابر $\sqrt{3}$ است، زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و این خط 60° است. پس زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و خط $y=\frac{m}{2}x-1$ ، برابر $45^\circ=15^\circ-12^\circ-18^\circ$ است و در نتیجه $\frac{m}{2}=\tan 45^\circ=1 \Rightarrow m=2$

راه‌حل

دست‌گرمی

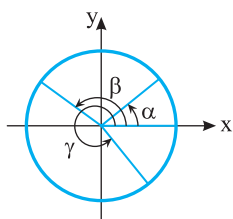
۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام یک از زاویه‌های زیر در ناحیه سوم قرار دارد؟

(۱) 170° (۲) 260° (۳) 280° (۴) 330°

۶۵- زاویه‌های α ، β و γ مانند شکل روبه‌رو در دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر $a=\cos \alpha$ ،

$b=\cos \beta$ و $c=\cos \gamma$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a>b>c$
(۲) $b>c>a$
(۳) $a>c>b$
(۴) $c>a>b$



۶۶- اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۶۷- اگر $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{m}{3}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $2 \leq m \leq 4$ (۲) $-2 \leq m \leq 0$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $1 \leq m \leq 3$

۶۸- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A=2+3 \sin^2 x$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 10

۶۹- معادله خطی که از نقطه $(6, \sqrt{3})$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی 30° می‌سازد، کدام است؟

(۱) $x-\sqrt{3}y-3=0$ (۲) $x+\sqrt{3}y-9=0$ (۳) $2x-\sqrt{3}y-9=0$ (۴) $x-2\sqrt{3}y=0$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۱)

آزمون ۳۷

۳۶۱- کدام یک عددی مثبت است؟

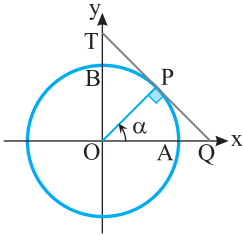
- (۱) $\sin 23^\circ$ (۲) $\cos 23^\circ$ (۳) $\sin 31^\circ$ (۴) $\cos 31^\circ$

۳۶۲- اگر $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۶۳- در دایره مثلثاتی مقابل α زاویه‌ای حاده است. طول پاره‌خط BT کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$
 (۳) $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha} - 1$



۳۶۴- اگر $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ و $\sin 2\alpha = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۶۵- اگر $7 = 2 \sin \alpha + 5 \cos \beta$ ، مقدار $3 \sin \alpha - 4 \cos \beta$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۷

۳۶۶- اگر $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، حداکثر مقدار عبارت $\frac{3}{2 \sin \alpha + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۶۷- اگر طول دو ضلع مثلثی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ باشد، بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

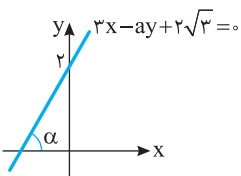
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۳۶۸- اگر $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ و $\tan \alpha = 2m + 1$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \leq -\frac{1}{2}$ (۲) $m < -\frac{1}{2}$ (۳) $m > -\frac{1}{2}$ (۴) $m \geq -\frac{1}{2}$

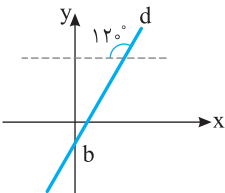
۳۶۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$



۳۷۰- معادله خط d در شکل مقابل به صورت $y = a(x-2) + \sqrt{3}$ است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $-2\sqrt{3}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



سؤال	گام
۳۶۱	۷۲ ۷۴
۳۶۲	۷۴
۳۶۳	۶۹ ۷۳
۳۶۴	۷۸
۳۶۵	۷۶
۳۶۶	۷۷
۳۶۷	۷۱ ۷۷
۳۶۸	۷۷
۳۶۹	۷۵ ۸۰
۳۷۰	۷۵ ۸۰

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۲)

سؤال	گام
۳۷۱	۷۲ ۷۴
۳۷۲	۶۹ ۷۳
۳۷۳	۷۳
۳۷۴	۷۸
۳۷۵	۱۳ ۲۲ ۷۶ ۸۱
۳۷۶	۲۲ ۷۶
۳۷۷	۷۹ ۹۲
۳۷۸	۷۷
۳۷۹	۷۵ ۸۰
۳۸۰	۷۵ ۸۰

۳۷۱- کدام یک عددی منفی است؟
 (۱) $\tan 17^\circ$ (۲) $\tan 19^\circ$ (۳) $\cot 7^\circ$ (۴) $\cot 26^\circ$

۳۷۲- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\frac{y}{x-1}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

۳۷۳- در دایره مثلثاتی مقابل طول پاره خط TT' چقدر از طول پاره خط MM' بیشتر است؟
 (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$ (۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$ (۳) $\cot \alpha - \cos \alpha$ (۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$

۳۷۴- اگر $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۳۷۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = 4 \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) ۴

۳۷۶- مقدار عبارت $A = \frac{2 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$ با کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟
 (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) ۱

۳۷۷- حاصل عبارت $|\sin 2^\circ - \cos 2^\circ| - |\sin 7^\circ - \cos 7^\circ|$ کدام است؟
 (۱) $-2 \sin 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $2 \sin 2^\circ$ (۴) صفر

۳۷۸- اگر $18^\circ \leq \alpha < 27^\circ$ و $\tan \alpha = m^3 + m^2$ ، حدود m کدام است؟
 (۱) $m \geq 0$ (۲) $m \leq 0$ (۳) $m \geq -1$ (۴) $m \leq -1$

۳۷۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادله خط d کدام است؟
 (۱) $y = x - 2\sqrt{3}$ (۲) $y = 2x - \sqrt{3}$ (۳) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (۴) $(\tan 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}})$
 (۲) $y = 2x - \sqrt{3}$ (۴) $y = x - \sqrt{3}$

۳۸۰- دو خط شکل مقابل از نقطه $(2, 2)$ عبور می‌کنند. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) $2 - 2\sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $1 - \sqrt{3}$ (۴) $2 - 3\sqrt{3}$

درس سوم: اتحادهای مثلثاتی

نکته زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

۸۱

نکته رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

۱) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۲) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۳) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

۴) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۵) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

تست

مقدار عبارت $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$ کدام است؟

۱ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۲ (۳) $\cos \alpha$

۳ (۲) $\sin \alpha$

۴ (۱) ۱

راه‌حل

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

راه‌حل اول می‌دانیم $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، بنابراین

راه‌حل دوم می‌دانیم $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

تست

ساده شده عبارت $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ کدام است؟

۱ (۴) $\cot \alpha + \cot \beta$

۲ (۳) $\cot \alpha \cot \beta$

۳ (۲) $\tan \alpha \tan \beta$

۴ (۱) ۱

راه‌حل

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \beta}} = \cot \alpha \cot \beta$$

می‌دانیم $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ و $\tan \beta = \frac{1}{\cot \beta}$ ، بنابراین

تست

اگر $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱ (۴) ۴

۲ (۳) $\frac{1}{4}$

۳ (۲) $\frac{1}{3}$

۴ (۱) ۳

راه‌حل

از تساوی $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $6 \sin x = 2 \sin x + \cos x$ ، بنابراین $4 \sin x = \cos x$ و در نتیجه $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}$ ، پس $\tan x = \frac{1}{4}$.

تست

حاصل عبارت $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

۱ (۴) $\cot \alpha$

۲ (۳) $\sin \alpha$

۳ (۲) $2 \tan \alpha$

۴ (۱) $2 \cot \alpha$

راه‌حل

ابتدا مخرج کسر را به صورت $(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$ می‌نویسیم. پس $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha$.

تست

 ۵ اگر $\sin \alpha = \sqrt{m}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2m-1}$ ، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل

 با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{2m-1})^2 = 1 \Rightarrow m + 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

 برای به دست آوردن $\tan^2 \alpha$ از رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

تست

 ۶ اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{7}{5}$ ۲ (۲) $-\frac{2}{5}$ ۳ (۳) $-\frac{1}{5}$ ۴ (۴) $\frac{1}{5}$

راه حل

توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

تست

 ۷ اگر $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ و $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، مقدار $15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) -27 ۲ (۲) -29 ۳ (۳) -31 ۴ (۴) -33

راه حل
راه حل اول ابتدا توجه کنید که اگر $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، آن‌گاه $\cot \alpha$ مقداری منفی است. پس

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{25}{144} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}, \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$\text{پس } 15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -36 + 5 = -31$$

راه حل دوم از رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \alpha > 0$ ، پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\text{پس } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5} \text{ و } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{5}{12}. \text{ بنابراین } 15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = 15\left(-\frac{12}{5}\right) - 12\left(-\frac{5}{12}\right) = -31$$

تست

 ۸ اگر $\tan \alpha = 3$ ، مقدار $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل
راه حل اول از تساوی $\tan \alpha = 3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ به دست می‌آید $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. با جای‌گذاری مقدار $3 \cos \alpha$ به جای $\sin \alpha$ در عبارت A ،

$$A = \frac{2(3 \cos \alpha) + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -7$$

راه حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم تا عبارت ظاهر شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 4} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 4} = -7$$

تست

۹

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول باشد و $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{3} \quad (۱)$$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2 \sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x + \cos x > 0$. در نتیجه $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

تست

۱۰

عبارت $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۴)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۳)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۲)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۱)$$

راه‌حل

در عبارت داده شده به جای $\cos^2 \beta$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \beta$ و به جای $\cos^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

تست

۱۱

ساده شده عبارت $\frac{\cos 1^\circ}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{\cos 1^\circ}{1 - \sin 1^\circ}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{\cos 1^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\cos^2 1^\circ} \quad (۳)$$

$$2 \tan 1^\circ \quad (۲)$$

$$-2 \tan 1^\circ \quad (۱)$$

راه‌حل

به کمک مخرج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ \left(\frac{1}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{1}{1 - \sin 1^\circ} \right) &= \frac{(1 - \sin 1^\circ) - (1 + \sin 1^\circ)}{(1 + \sin 1^\circ)(1 - \sin 1^\circ)} \cos 1^\circ = \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{1 - \sin^2 1^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = \frac{-2 \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = -2 \tan 1^\circ \end{aligned}$$

تست

۱۲

هرگاه $\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$ ، حاصل $\tan^4 \theta + \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$11 \quad (۴)$$

$$9 \quad (۳)$$

$$7 \quad (۲)$$

$$5 \quad (۱)$$

راه‌حل

چون $\tan \theta \neq 0$ ، بنابراین تساوی داده شده را می‌توان به صورت $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = -1$ نوشت. پس

$$\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 + 2 = 3$$

$$\tan^4 \theta + \cot^4 \theta = \tan^4 \theta + \frac{1}{\tan^4 \theta} = \left(\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

در نتیجه

تست

۱۳

اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ کدام است؟

$$\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} \quad (۴)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \quad (۳)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \quad (۱)$$

راه‌حل

توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

$$|\sin \alpha \cos \alpha| = -\sin \alpha \cos \alpha$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$. در نتیجه

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

بنابراین

چون $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، پس $\sin \alpha > \cos \alpha$ ، بنابراین علامت $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است و در نتیجه $A = \sin \alpha - \cos \alpha$.

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی اند) برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی است. تمام تساوی‌هایی که در نکته ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

تذکر

برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

تست ۱۴

ساده شده عبارت $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ کدام است؟

- (۱) $\cos x$ (۲) $\sin x$ (۳) $\frac{1}{\cos x}$ (۴) $\frac{1}{\sin x}$

راه حل اول از اتحاد $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم اگر $x = 30^\circ$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$ و گزینه‌ها به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{1}{\sin x}$ می‌شوند، پس گزینه (۳) درست است.

تست ۱۵

اگر تساوی $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^4 x} + 1 = \cot^2 x$ یک اتحاد باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} &= \cot^2 x - 1 \Rightarrow \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} \\ a \sin^2 x + b &= \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ a \sin^2 x + b &= \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow a \sin^2 x + b = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

بنابراین باید تساوی $b + a \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ یک اتحاد باشد که کافی است $a = -2$ و $b = 1$ ، یعنی $ab = -2$.

راه حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x \neq 0$ ، برقرار است. قرار می‌دهیم $x = 30^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{16} + 1 = 9 \Rightarrow a + 4b = 2$$

قرار می‌دهیم $x = 45^\circ$ و در نتیجه $\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + 1 = 1$ ، پس $a + 2b = 0$. از حل دستگاه $\begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ به دست می‌آید $a = -2$ و $b = 1$ و در نتیجه $ab = -2$.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

تست



اگر $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$ ، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$$-\frac{13}{27} \quad (4)$$

$$-\frac{9}{26} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{13} \quad (2)$$

$$-\frac{6}{13} \quad (1)$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

بنابراین $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = -\frac{13}{6}$ و در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{6}{13}$.

دست‌گرمی

۷۰- اگر $\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2$ ، مقدار $\frac{\cot x}{\cot x - 1}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

۷۱- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$\frac{16}{5} \quad (4)$$

$$\frac{26}{9} \quad (3)$$

$$\frac{626}{25} \quad (2)$$

$$\frac{65}{16} \quad (1)$$

۷۲- اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{20} \quad (4)$$

$$-\frac{31}{20} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{20} \quad (2)$$

$$\frac{31}{20} \quad (1)$$

۷۳- ساده شده عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\cos^2 x \quad (3)$$

$$\sin^2 x \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۷۴- ساده شده عبارت $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$\cot^2 \theta \quad (4)$$

$$\tan^2 \theta \quad (3)$$

$$\cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta \quad (1)$$

۷۵- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$13 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

۷۶- اگر $\cos x \neq 0$ و $3 \sin x + 2 \cos x = 3$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{12}{5} \quad (2)$$

$$\frac{12}{5} \quad (1)$$

اتحادهای مثلثاتی (۱)

سؤال	گام
۳۸۱	۷۴ ۸۱
۳۸۲	۸۱
۳۸۳	۸۱
۳۸۴	۸۱
۳۸۵	۸۱
۳۸۶	۷۴ ۸۱
۳۸۷	۸۱ ۸۲
۳۸۸	۷۴ ۸۱ ۸۲
۳۸۹	۸۱ ۸۳
۳۹۰	۷۴ ۸۳

۳۸۱- اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه چهارم باشد، مقدار $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۸۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+3$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{35}$ (۲) $\frac{16}{37}$ (۳) $\frac{1}{37}$ (۴) $\frac{2}{35}$

۳۸۳- ساده شده عبارت $\frac{1}{1+\sin 1^\circ} + \frac{1}{1-\sin 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{\sin^2 1^\circ}$ (۴) $\frac{2}{\cos^2 1^\circ}$

۳۸۴- حاصل $A = \frac{\sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos^3 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 15^\circ$ (۲) $\tan 15^\circ$ (۳) $\cot 15^\circ$ (۴) $\cot^2 15^\circ$

۳۸۵- اگر $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ ، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۳۸۶- انتهای کمان متناظر با زاویه α در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} \geq 0$ برقرار باشد؟

- (۱) فقط اول یا دوم (۲) فقط اول یا سوم
(۳) فقط دوم یا چهارم (۴) هر چهار ناحیه

۳۸۷- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۳۸۸- اگر انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه دوم باشد و $A = \cot^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \cot^2 x)$ ، حاصل \sqrt{A}

کدام است؟

- (۱) $\tan x - \cot x$ (۲) $-\tan x - \cot x$
(۳) $\tan x + \cot x$ (۴) $\cot x - \tan x$

۳۸۹- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{23}{32}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۳۹۰- اگر $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه دوم باشد، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

اتحادهای مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۰

۳۹۱- اگر $\cot x = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه سوم باشد، مقدار $2 \cos x - \sin x$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $-\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$

۳۹۲- اگر $\sin \alpha = \sqrt{k-1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2k-3}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۳۹۳- مقدار $\frac{(1+\tan 2^\circ)(1-\cot 2^\circ)}{(1+\cot 2^\circ)(1-\tan 2^\circ)}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۳۹۴- ساده شده عبارت $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\tan x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۳۹۵- اگر $\cot \alpha = \sin \alpha$ ، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

۳۹۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۳۹۷- اگر زاویه ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{23}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ (۳) $\frac{-\sqrt{23}}{4}$ (۴) $\frac{-\sqrt{14}}{4}$

۳۹۸- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^4 x + \cot^4 x$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۳۹۹- اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، عبارت $\cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ با کدام یک برابر است؟

(۱) $\cot \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۴۰۰- اگر $36^\circ < \alpha < 315^\circ$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}}$ کدام است؟

(۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (۲) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۳) $-\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha - \cos \alpha$

سؤال	گام
۳۹۱	۷۴ ۸۱
۳۹۲	۸۱
۳۹۳	۸۱ ۸۲
۳۹۴	۸۱ ۸۲
۳۹۵	۸۱
۳۹۶	۸۱ ۸۳
۳۹۷	۷۴ ۸۱
۳۹۸	۸۱
۳۹۹	۷۴ ۸۱ ۸۲
۴۰۰	۷۴ ۸۱ ۸۲

اتحادهای مثلثاتی (۳)

آزمون ۴۱

سؤال	گام
۴۰۱	۸۱
۴۰۲	۸۱
۴۰۳	۸۱ ۸۲
۴۰۴	۸۱ ۸۲
۴۰۵	۸۱
۴۰۶	۸۱ ۲۸۵ ۲۸۷
۴۰۷	۸۱ ۲۸۵
۴۰۸	۷۴ ۸۱
۴۰۹	۸۱ ۸۲
۴۱۰	۲۲ ۷۶ ۸۱

۴۰۱- اگر $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ مقدار $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) ۸ (۴) $\frac{1}{16}$

۴۰۲- اگر $\tan x = \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+7}}$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۰۳- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۰۴- مقدار $\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\cos 15^\circ$ (۲) $-\sin 15^\circ$ (۳) $\cos 15^\circ$ (۴) $\sin 15^\circ$

۴۰۵- اگر $\tan x = 3$ مقدار عبارت $A = \frac{\sin^3 x - 2 \cos x}{4 \sin x - \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{119}$ (۲) $\frac{1}{17}$ (۳) $\frac{7}{29}$ (۴) $\frac{17}{29}$

۴۰۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{27}$ (۲) $\frac{23}{27}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{25}{27}$

۴۰۷- اگر $\tan x - \cot x = 3$ مقدار $\tan^3 x - \cot^3 x$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۴۰۸- اگر $\tan \alpha - 2 \cot \alpha = \sqrt{2}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول باشد مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $3 - \sqrt{5}$

۴۰۹- حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 \cot x}{1 - \cot x}$ (۲) $\frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x}$ (۳) $\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$ (۴) $\frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$

۴۱۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

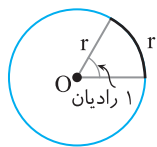
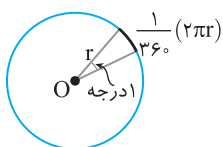
اتحادهای مثلثاتی (۴)

آزمون ۴۲

- ۴۱۱- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۴۱۲- مقدار عبارت $A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ کدام است؟
- (۱) $\tan^6 15^\circ$ (۲) $\cot^6 15^\circ$ (۳) $1 + \tan^6 15^\circ$ (۴) $1 + \cot^6 15^\circ$
- ۴۱۳- مقدار $(\frac{1}{\cos 20^\circ} + \tan 20^\circ)(1 - \sin 20^\circ)$ کدام است؟
- (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\cos 20^\circ$ (۳) $\tan 20^\circ$ (۴) $\cot 20^\circ$
- ۴۱۴- حاصل $\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱
- ۴۱۵- اگر $3 \sin^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 5 = 0$ ، مقدار $\cos^6 \alpha$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر
- ۴۱۶- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^6 x + \cot^6 x$ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷
- ۴۱۷- اگر $2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = \tan x$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟
- (۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴) $-2 \pm \sqrt{3}$
- ۴۱۸- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ به ازای $\alpha = 200^\circ$ کدام است؟
- (۱) $-\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۲) $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۳) $-\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$ (۴) $\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$
- ۴۱۹- حاصل $1 + \frac{\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ}{\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ}$ کدام است؟
- (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $\cos 40^\circ$ (۳) $\tan 40^\circ$ (۴) ۱
- ۴۲۰- اگر $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 7$ ، حاصل $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سؤال	گام
۴۱۱	۸۱
۴۱۲	۸۱ ۸۲
۴۱۳	۸۱ ۸۲
۴۱۴	۸۱ ۸۲ ۹۵
۴۱۵	۸۱
۴۱۶	۸۱ ۲۸۱ ۲۸۵
۴۱۷	۸۱
۴۱۸	۷۹ ۸۱ ۸۲
۴۱۹	۸۱ ۸۲
۴۲۰	۸۱ ۸۲ ۲۸۷

درس چهارم: واحدهای اندازه گیری زاویه



اگر دایره‌ای را به 360 قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویه مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازه هر یک از آن‌ها برابر 1 درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر 1 رادیان است.

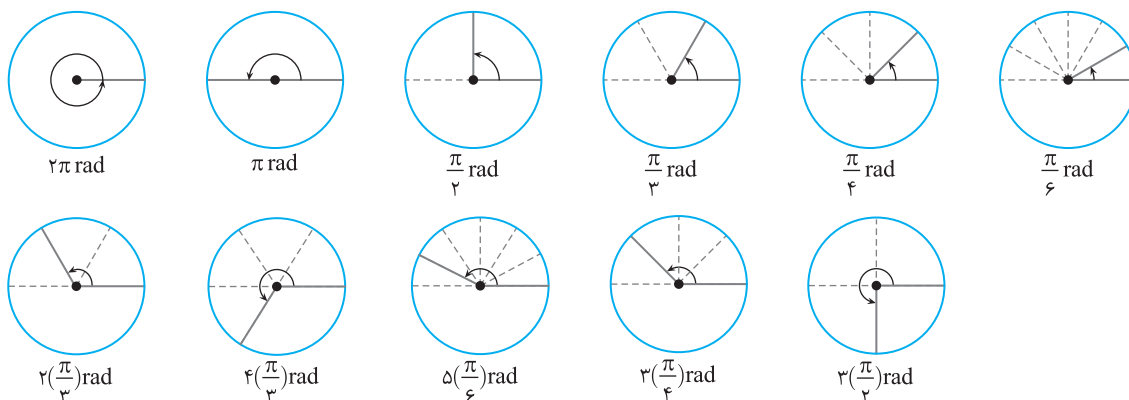
تعریف

- 1 درجه برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره است. k درجه را می‌نویسیم k° .
- 1 رادیان برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. k رادیان را می‌نویسیم $k \text{ rad}$.

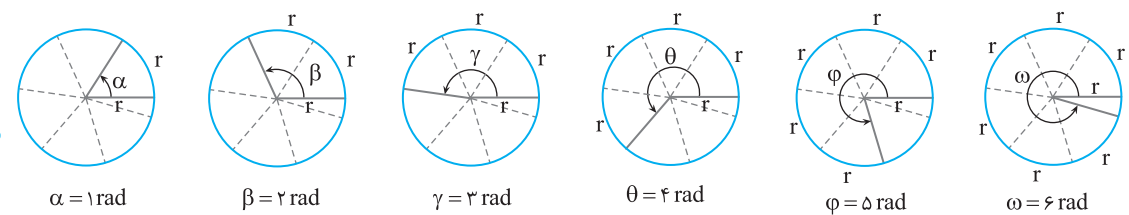
اگر واحد اندازه زاویه‌ای را مشخص نکردیم، منظورمان واحد رادیان است.

تذکر

مثال: در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازه آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



مثال: چون $2\pi \approx 6/28$ ، روی یک دایره کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 6 - رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

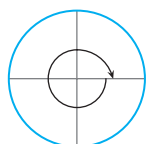
(۴) چهارم

(۳) سوم

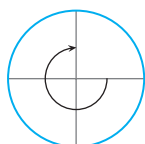
(۲) دوم

(۱) اول

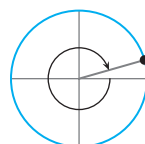
با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 6 - رادیان در ناحیه اول قرار دارد.



رادیان $(-2\pi) \approx$ رادیان $(-6/28)$



رادیان $(-3\pi/2) \approx$ رادیان $(-4/71)$



رادیان (-6)

تست

۱

راه حل

تست

۲

کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند).

$\sin 4$ (۴)

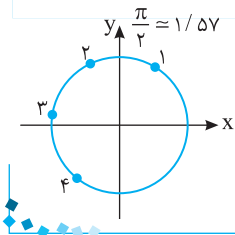
$\sin 3$ (۳)

$\sin 2$ (۲)

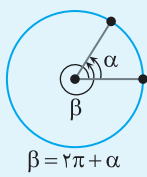
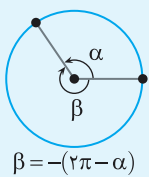
$\sin 1$ (۱)

راهنما

با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویه ۲ رادیان است، بزرگتر از عرض سایر نقاط است، پس $\sin 2$ از بقیه بزرگتر است.

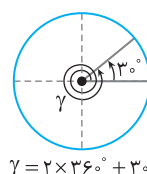
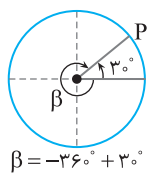
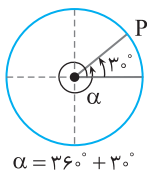


زاویه‌های هم‌انتهای



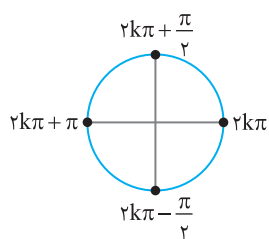
می‌دانیم یک زاویه مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور X و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازه دلخواه به دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این صورت نقطه انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انتهای** می‌نامیم.

مثال: زاویه‌های 3° ، $3^\circ + 36^\circ$ ، $3^\circ - 36^\circ$ و $3^\circ + 36^\circ + 2 \times 36^\circ$ هم‌انتهای هستند.

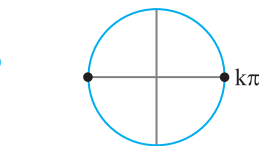


نکته

اگر k عدد صحیح دلخواهی باشد،
 • زاویه‌های α° و $k \times 36^\circ + \alpha^\circ$ هم‌انتهای هستند.
 • زاویه‌های α رادیان و $2k\pi + \alpha$ رادیان هم‌انتهای هستند.



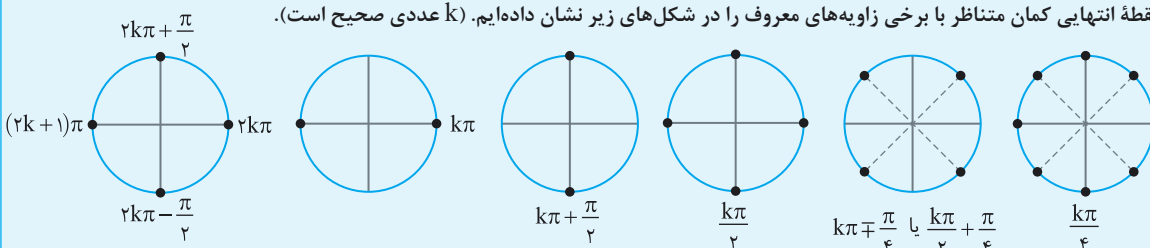
مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان، π رادیان و $-\frac{\pi}{2}$ رادیان هم‌انتهای هستند، به ترتیب برابر $2k\pi$ ، $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $2k\pi + \pi$ و $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است (k عددی صحیح است).

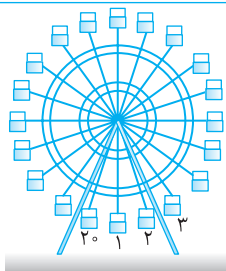


مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا π رادیان هم‌انتهای هستند، به ترتیب $2k\pi$ یا $2k\pi + \pi$ است که می‌توان آن‌ها را به صورت $k\pi$ نشان داد (k عددی صحیح است).

نکته

نقطه انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (k عددی صحیح است).





یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل ۲۰° کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه $\frac{۴۷\pi}{۵}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می گیرد؟

- (۱) ششم
(۲) هفتم
(۳) چهاردهم
(۴) پانزدهم

تست
۳

زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{۲\pi}{۲۰} = \frac{\pi}{۱۰}$ رادیان است. از طرف دیگر $\frac{۴۷\pi}{۵} = ۸\pi + \frac{۷\pi}{۵} = ۸\pi + ۱۴ \times \frac{\pi}{۱۰}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می زند، یعنی

۸π رادیان می چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازه $۱۴ \times \frac{\pi}{۱۰}$ دیگر دوران می کند که کابین شماره یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می شود.

راه حل

رابطه بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازه زاویه های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته ایم.

درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

نکته

اگر اندازه زاویه ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$

$$\frac{۱۲^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳} \text{ rad}$$

مثال: اگر اندازه زاویه ۱۲° برحسب رادیان برابر با R باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{12}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{12} = ۱۵^\circ$$

همین طور اگر اندازه زاویه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان برحسب درجه برابر با D باشد، آن گاه

$$\frac{1^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180}$$

مثال: اگر R اندازه زاویه 1° برحسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{\pi}$$

بنابراین $1 \text{ rad} = 180/\pi \approx ۵۷.۳^\circ$. همین طور، اگر D اندازه زاویه 1 رادیان برحسب درجه باشد، آن گاه

بنابراین $1 \text{ rad} \approx ۵۷.۳^\circ$.

تست
۴

اندازه زاویه ۵۵° برحسب رادیان کدام است؟

$\frac{۷\pi}{۱۸}$ (۴)

$\frac{۱۳\pi}{۳۶}$ (۳)

$\frac{۱۱\pi}{۳۶}$ (۲)

$\frac{۵\pi}{۱۸}$ (۱)

$$\frac{۵۵^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۱۱\pi}{۳۶}$$

در تساوی $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ قرار می دهیم $D = ۵۵^\circ$:

راه حل

تست

مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب برابر 11° و $\frac{7\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{7\pi}{12}$ (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{7}$

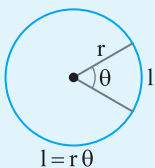
راه حل

ابتدا توجه کنید که 11° برابر $\frac{11\pi}{18}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر را a و اندازه زاویه کوچکتر را b در نظر می‌گیریم:

$$a+b=\frac{11\pi}{18}, \quad a-b=\frac{2\pi}{9}$$

از حل این دستگاه به دست می‌آید $a=\frac{5\pi}{12}$.

طول کمان



به کمک اندازه‌گیری برحسب رادیان می‌توانیم رابطه‌ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره r باشد. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان l رادیان است. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر کمان برابر $\frac{l}{r}$ رادیان است. بنابراین $\theta = \frac{l}{r}$.

نکته

اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه زاویه‌ای مرکزی θ رادیان و طول کمان روبه‌رو به این زاویه l باشد، آن‌گاه $l=r\theta$.

توجه کنید که واحد l و r یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تست

طول کمان نظیر زاویه مرکزی به اندازه 15° در دایره‌ای به شعاع 18 سانتی‌متر، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

راه حل

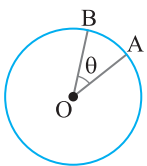
اگر اندازه زاویه 15° برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه

$$\frac{15^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با $18 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$ سانتی‌متر.

تست

در شکل مقابل، دایره‌ای در نقطه A روی مسیری دایره‌ای به مرکز نقطه O و به شعاع 1500 متر ایستاده است. این دایره با سرعت 5 متر بر ثانیه می‌دود. اگر پس از 10 ثانیه در نقطه B باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 1° (۲) 2° (۳) 3° (۴) 4°

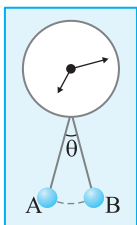
راه حل

مسافتی که این دایره در 10 ثانیه طی می‌کند برابر است با $10 \times 5 = 50$ متر. بنابراین طول کمان AB برابر 50 متر است. در نتیجه

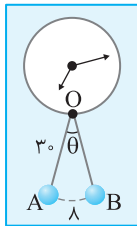
$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{50}{1500} = \frac{1}{30} \text{ rad} = 180^\circ \left(\frac{1}{30} \right) = 180^\circ \left(\frac{1}{3} \right) = 2^\circ$$

تست

در شکل مقابل، طول پاندول ساعت 30 سانتی‌متر است و این پاندول در هر ثانیه از A به B و یا برعکس جابه‌جا می‌شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می‌کند برابر با 8 سانتی‌متر باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 12° (۲) 14° (۳) 16° (۴) 18°



توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند، کمانی از دایره‌ای به مرکز نقطه O و شعاع ۳۰ سانتی‌متر است

(شکل مقابل را ببینید). بنابراین $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\lambda}{30} = \frac{4}{15} \text{ rad}$ ، در نتیجه

$$\theta = 180^\circ \left(\frac{4}{15} \right) = 180^\circ \left(\frac{15}{3} \right) = 16^\circ$$

راه‌حل

در مدت زمان یک ساعت عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل می‌چرخد، پس اندازه زاویه‌ای که طی می‌کند، 360° یا 2π رادیان است. در همین مدت، عقربه ساعت‌شمار، یک دوازدهم یک دایره را می‌چرخد. بنابراین اندازه زاویه‌ای که طی می‌کند برابر 30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان است.

۸۹

نکته

در یک دقیقه عقربه دقیقه‌شمار 6° یا $\frac{\pi}{30}$ رادیان را طی می‌کند. در همین مدت عقربه ساعت‌شمار $(\frac{1}{2})^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان را طی می‌کند.

تست

۹

وقتی عقربه ساعت‌شمار به اندازه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

$$\frac{\pi}{6} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

$$\frac{\pi}{360} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

بنابراین $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. معادل $\frac{1}{12}$ دور می‌چرخد که معادل

راه‌حل

راه‌حل دوم با استفاده از نکته بالا نتیجه می‌گیریم:

دست‌گرمی

۷۷- اندازه زاویه 75° برحسب رادیان کدام است؟

$\frac{5\pi}{12}$ (۴)

$\frac{7\pi}{12}$ (۳)

$\frac{13\pi}{12}$ (۲)

$\frac{11\pi}{12}$ (۱)

۷۸- در دایره مثلثاتی انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 50° در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

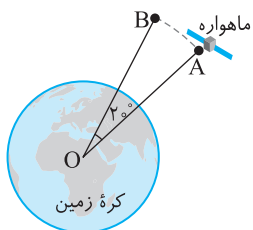
۷۹- مطابق شکل ماهواره‌ای در شعاع 36000 کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطه A به نقطه B برسد؟

2000π (۱)

2400π (۲)

4000π (۳)

4800π (۴)



واحدهای اندازه گیری زاویه (۱)

آزمون ۴۳

۴۲۱- اندازه دو زاویه از مثلثی 36° و $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. اندازه بزرگترین زاویه این مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{2\pi}{5}$

سؤال	گام
۴۲۱	۸۷

۴۲۲- حاصل ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 60° (۳) 30° (۴) 15°

۴۲۲	۸۷
-----	----

۴۲۳- انتهای کمان متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) ذوزنقه

۴۲۳	۸۴
-----	----

۴۲۴- زاویه 56° روی دایره مثلثاتی با کدامیک از زاویه‌های زیر هم‌انتهاست؟

- (۱) 160° (۲) 16° (۳) 140° (۴) 14°

۴۲۵- یک چرخ‌وفلک 20° کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ‌وفلک، کابین شماره یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ‌وفلک به اندازه

رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) چهاردهم (۲) پانزدهم (۳) شانزدهم (۴) هفدهم

۴۲۴	۸۵
-----	----

۴۲۶- کدامیک از اعداد زیر کوچک‌تر است؟ (زویایا برحسب رادیان هستند.)

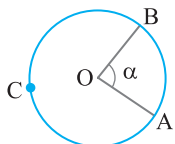
- (۱) $\sin 1$ (۲) $\sin 2$ (۳) $\sin 4$ (۴) $\sin 6$

۴۲۵	۸۶
-----	----

۴۲۷- وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

- (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۷۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۲۷۵

۴۲۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره 4π واحد است. اگر طول کمان ACB، π واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟



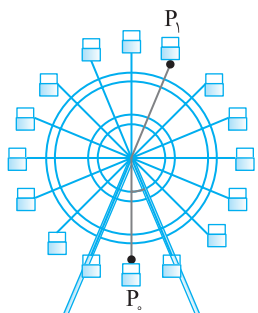
- (۱) $\pi - \frac{1}{4}$ (۲) $\pi - \frac{1}{8}$ (۳) $\pi - \frac{1}{2}$ (۴) $\pi - \frac{3}{2}$

۴۲۶	۸۴
-----	----

۴۲۹- شعاع چرخ‌وفلک شکل مقابل 40 متر است. مسافران از نقطه P_0 تا نقطه P_1 چند متر روی

چرخ‌وفلک طی می‌کنند؟

- (۱) 35π (۲) 25π (۳) 36π (۴) 32π



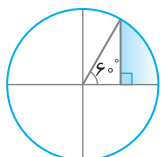
۴۲۷	۸۹
-----	----

۴۲۸	۸۸
-----	----

۴۲۹	۸۶ ۸۸
-----	----------

۴۳۰- در شکل مقابل اندازه شعاع دایره $6\sqrt{3}$ است. اندازه محیط قسمت رنگی کدام است؟

- (۱) $3(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۲) $2(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۳) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$ (۴) $9+\sqrt{3}(2\pi+3)$



۴۳۰	۶۹ ۸۸
-----	----------

واحدهای اندازه گیری زاویه (۲)

سؤال	گام
۴۳۱	۸۷
۴۳۲	۸۷
۴۳۳	۸۴
۴۳۴	۸۵
۴۳۵	۸۶
۴۳۶	۸۴
۴۳۷	۸۹
۴۳۸	۸۸
۴۳۹	۷۳ ۸۸
۴۴۰	۸۷ ۸۸

۴۳۱- مجموع اندازه‌های دو زاویه 40° و تفاضل اندازه‌های آن‌ها $\frac{4\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگ‌تر برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{9}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴) $\frac{11\pi}{9}$

۴۳۲- اندازه یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{8}$ برابر اندازه آن برحسب درجه $\frac{5\pi}{36}$ کمتر است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 20° (۳) 40° (۴) 50°

۴۳۳- انتهای کمان‌های متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) دوزنقه

۴۳۴- زاویه‌ای با اندازه $\frac{28\pi}{3}$ رادیان روی دایره مثلثاتی با زاویه α هم‌انتهاست. اندازه α برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{31\pi}{6}$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{3}$

۴۳۵- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به صورت $\alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می‌شود؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) پنج‌ضلعی منظم (۴) شش‌ضلعی منظم

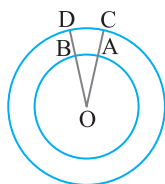
۴۳۶- کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\tan 2$ (۲) $\tan 3$ (۳) $\tan 5$ (۴) $\tan 6$

۴۳۷- اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار بین ساعت ۹ و $10:20$ طی می‌کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

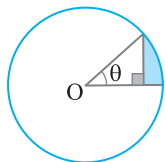
۴۳۸- در شکل مقابل دو دایره هم‌مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و $\widehat{DOC} = 25^\circ$. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{36}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$

- (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

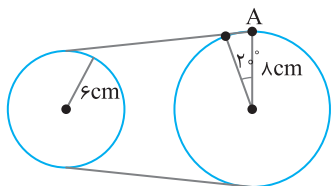
۴۳۹- شعاع دایره شکل مقابل به مرکز O یک واحد است. مقدار محیط قسمت رنگی برحسب θ کدام است؟



- (۱) $1 + \sin \theta + \cos \theta$ (۲) $1 + \sin \theta - \cos \theta$

- (۳) $1 - \theta + \sin \theta + \cos \theta$ (۴) $1 + \theta + \sin \theta - \cos \theta$

۴۴۰- در شکل مقابل اگر نقطه A، روی چرخ بزرگ‌تر جابه‌جا شود، چرخ کوچک‌تر چند درجه جابه‌جا می‌شود؟



- (۱) $\frac{4\pi}{27}$ (۲) $\frac{9\pi}{27}$

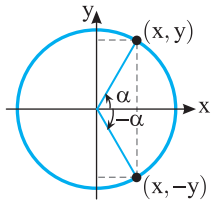
- (۳) $\frac{40}{3}$ (۴) $\frac{80}{3}$

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها

توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2k\pi + \alpha$ با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

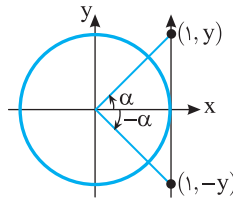
$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α به کمک شکل‌های زیر به دست آورد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha$$

۹۰

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

(۱) زاویه مورد نظر را به صورت $k\pi \pm \alpha$ (k عددی صحیح است) یا $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

(۲) با فرض اینکه α زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویه مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

(۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه به دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

(۴) عبارت $k\pi \pm$ یا $\frac{k\pi}{2} \pm$ را حذف می‌کنیم.

(۵) اگر در مرحله قبلی $\frac{k\pi}{2} \pm$ را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

- سینوس به کسینوس
- کسینوس به سینوس
- تانژانت به کتانژانت
- کتانژانت به تانژانت

مثال:

$$۱) \sin 39^\circ = \sin(2 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$۲) \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$۳) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$۴) \cot \frac{13\pi}{10} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \tan \frac{\pi}{10}$$

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan \alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan \alpha$
$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha$	$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$	$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$

تست ۱ □□□□

حاصل عبارت $A = \frac{1+\cos(12\pi-\alpha)}{\sin^2(\delta\pi-\alpha)} \times \frac{1+\cos(12\pi+\alpha)}{\sin(\gamma\pi+\alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\delta\pi}{\epsilon}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

راه حل ابتدا توجه کنید که

$$\cos(12\pi-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cos(12\pi+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\delta\pi-\alpha)=\sin \alpha, \quad \sin(\gamma\pi+\alpha)=-\sin \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{-\sin^3 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

بنابراین مقدار A به ازای $\alpha = \frac{\delta\pi}{\epsilon}$ برابر است با $-\frac{1}{\sin \frac{\delta\pi}{\epsilon}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

تست ۲ □□□□

حاصل عبارت $A = 2 \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) + 3 \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) + 4 \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) + 5 \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

راه حل ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$$

بنابراین $A = 2 \cos \alpha + 3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha - 5 \cos \alpha = -4 \cos \alpha$. پس مقدار A به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ برابر است با $-4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4(-\frac{1}{2}) = 2$.

تست ۳ □□□□

مقدار $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه حل توجه کنید که

$$\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 39^\circ = \cos(36^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-66^\circ) = \cos 66^\circ = \cos(72^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = -(-\sin 3^\circ) = \frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

تست ۴ □□□□

حاصل $A = 3 \sin \frac{3\pi}{4} + 5 \sin \frac{\delta\pi}{4} + 7 \sin \frac{\gamma\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

راه حل ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\delta\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\gamma\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $A = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$

تست



اگر $\tan 2^\circ = a$ ، مقدار $\frac{\tan 2^\circ + \cot 16^\circ}{\tan 76^\circ + \cot 34^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

(۴) $\frac{a}{a-1}$

(۳) $\frac{a}{a+1}$

(۲) $a-1$

(۱) $a+1$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\tan 2^\circ = \tan(18^\circ + 2^\circ) = \tan 2^\circ = a$$

$$\cot 16^\circ = \cot(18^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(4 \times 18^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 34^\circ = \cot(36^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a-1}{a} = \frac{a^2-1}{a-1} = a+1 \text{ بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با } a+1$$

۹۱

نکته

اگر زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است و کسینوس آن‌ها قرینه یکدیگر، تانژانت آن‌ها قرینه یکدیگر و کتانژانت آن‌ها هم قرینه یکدیگر است.

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

تست



مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) -1

(۱) 1

توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$ ، بنابراین

راه‌حل

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1$$

تست



مقدار عبارت $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ کدام است؟

(۴) 180°

(۳) 90°

(۲) -1

(۱) 1

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ و در نتیجه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ ، بنابراین

راه‌حل

$$\cos 1^\circ + \cos 179^\circ = 0, \quad \cos 2^\circ + \cos 178^\circ = 0, \quad \dots, \quad \cos 89^\circ + \cos 91^\circ = 0$$

از طرف دیگر $\cos 90^\circ = 0$ و $\cos 180^\circ = -1$ ، بنابراین $A = -1$.

تست

حاصل $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$ کدام است؟

- (۱) $5 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۲) $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۳) ۱ (۴) صفر

راه حل

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ پس $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$ و در نتیجه $\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$. بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0 \\ \frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

نکته

۹۲

اگر زاویه‌های α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

تست

مقدار $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

راه حل

توجه کنید که $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$. پس $\sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$. در نتیجه $\sin^2 \frac{2\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10}$. بنابراین $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1$

دست‌گرمی

۸۰- حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $3 \tan \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴) $-3 \tan \alpha$

۸۱- اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، مقدار $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\cos \alpha$ (۴) $-\cos \alpha$

۸۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $1 + 2\sqrt{2}$ (۲) $2 - 3\sqrt{2}$ (۳) $3 + 2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۳- حاصل عبارت $A = \sin \frac{7\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۴- مقدار $\cos^3 \frac{\pi}{8} + \cos^3 \frac{3\pi}{8} + \cos^3 \frac{5\pi}{8} + \cos^3 \frac{7\pi}{8}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۱)

آزمون ۴۵

- ۴۴۱- حاصل عبارت $A = \tan \alpha \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-2 \sin^2 \alpha$
- ۴۴۲- حاصل $\cos(x-90^\circ) \cot(-x-180^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$
- ۴۴۳- اگر $\tan \theta = 0/4$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(3\pi - \theta)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$
- ۴۴۴- اگر $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\tan(2x + 3y)$ کدام است؟
 (۱) $-\tan x$ (۲) $-\cot x$ (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$
- ۴۴۵- اگر $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ ، حاصل $\tan x$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۴۴۶- حاصل $\cos 51^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۴۴۷- حاصل $\cos \frac{43\pi}{6}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۴۴۸- حاصل $\sin \frac{23\pi}{6} \cos \frac{16\pi}{3} \tan \frac{25\pi}{4} \cot(-\frac{43\pi}{4})$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ۴۴۹- مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$
- ۴۵۰- مقدار عبارت $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

سؤال	گام
۴۴۱	۸۱ ۹۰
۴۴۲	۸۱ ۹۰
۴۴۳	۸۱ ۹۰
۴۴۴	۹۲
۴۴۵	۹۰
۴۴۶	۹۰
۴۴۷	۹۰
۴۴۸	۹۰
۴۴۹	۹۱
۴۵۰	۹۱

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۲)

سؤال	گام
۴۵۱	۹۰
۴۵۲	۸۱ ۹۰
۴۵۳	۸۱ ۹۰
۴۵۴	۸۱ ۹۰
۴۵۵	۷۴ ۸۱ ۹۰
۴۵۶	۹۰
۴۵۷	۹۰ ۲۹۰
۴۵۸	۹۰
۴۵۹	۹۱ ۹۲
۴۶۰	۹۲

۴۵۱- حاصل عبارت $A = 3 \sin(3\pi - \alpha) + 4 \sin(4\pi + \alpha) + 5 \sin(\delta\pi + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $4 \sin \alpha$ (۲) $8 \sin \alpha$ (۳) $2 \sin \alpha$ (۴) $12 \sin \alpha$

۴۵۲- حاصل عبارت $A = \frac{3 \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) $2 \cot^2 \alpha$ (۲) $\frac{4}{3} \cot^2 \alpha$ (۳) $2 \tan^2 \alpha$ (۴) $\frac{4}{3} \tan^2 \alpha$

۴۵۳- اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3$ ، مقدار $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۴۵۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \alpha$

۴۵۵- اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{12}$

۴۵۶- حاصل کسر $\frac{\cos(-60^\circ) + \cot 675^\circ}{\tan 945^\circ - \sin(-33^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

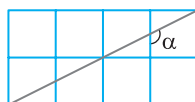
۴۵۷- اگر $\tan 15^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \tan 75^\circ + \tan 105^\circ}{3 \tan 165^\circ - \tan 255^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{3a^2 + 1}$ (۲) $\frac{3}{3a^2 - 1}$ (۳) $\frac{1}{3a^2 - 1}$ (۴) $\frac{-1}{3a^2 + 1}$

۴۵۸- مقدار عبارت $A = 4 \sin^2 \frac{10\pi}{3} - 2 \cos \frac{98\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۵۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۶۰- حاصل عبارت $A = \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{2\pi}{14} \dots \tan \frac{6\pi}{14}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۳)

آزمون ۴۷

- ۴۶۱- حاصل عبارت $A = \frac{\tan(\pi - \alpha) + 3 \tan(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) - \tan(2\pi + \alpha)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۶۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{3 \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - 6 \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ۴۶۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC حاصل عبارت $\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۴۶۴- اگر $a + b = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$ کدام است؟
 (۱) $\tan b$ (۲) $\cot b$ (۳) $-\cot b$ (۴) $-\tan b$
- ۴۶۵- اگر $3a + 2b = \pi$ و $\cos(a + b) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin \frac{a}{2}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۴۶۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ}{\tan 731^\circ \times \cot 11^\circ}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۴۶۷- اگر $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 335^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3a+1}{3-a}$ (۲) $\frac{3a-1}{a-3}$ (۳) $\frac{3a-1}{a+3}$ (۴) $\frac{a+1}{3a-1}$
- ۴۶۸- حاصل عبارت $A = \sin \frac{11\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{9\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۶۹- حاصل عبارت $A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$
- ۴۷۰- مقدار عبارت $A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{\cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

سؤال	گام
۴۶۱	۹۰
۴۶۲	۹۰
۴۶۳	۹۲
۴۶۴	۸۱ ۹۰
۴۶۵	۹۲
۴۶۶	۹۰
۴۶۷	۸۱ ۹۰
۴۶۸	۹۰
۴۶۹	۸۱ ۹۲
۴۷۰	۹۱

درس ششم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، سینوس و کسینوس زاویه 2α را می‌توانیم از تساوی‌های زیر به دست آوریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

اگر در تساوی $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ به جای $\cos^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \sin^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

همین‌طور، اگر به جای $\sin^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \cos^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

۹۳

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ، آن‌گاه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$

تست

۱ اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$

راه‌حل

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $\cos \alpha$ عددی منفی است. پس

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\text{بنابراین } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times -\frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ، پس $\cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

اکنون از اتحاد $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576}{625} \Rightarrow |\sin 2\alpha| = \frac{24}{25}$$

از طرف دیگر چون $9^\circ < \alpha < 18^\circ$ ، پس $18^\circ < 2\alpha < 36^\circ$ ، در نتیجه $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$

تست

۲ حاصل عبارت $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

راه‌حل

از روابط $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1$$

تست

۳ حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$

راه‌حل

توجه کنید که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ ، بنابراین $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x} = \frac{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin^2 x + (1 - 2 \sin^2 x)} = \frac{1}{1} = 1$

تست

□□□□

حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{2} \sin x$ (۴) $2\sqrt{2} \cos x$

راه حل از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1 \end{aligned}$$

راه حل

تست

□□□□

حاصل $\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۲) $-\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۳) $2 \cos 10^\circ$ (۴) $-\frac{1}{\cos 10^\circ}$

راه حل توجه کنید که $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، بنابراین

$$\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{2 \cos 10^\circ}$$

راه حل

تست

□□□□

مقدار $\sin 105^\circ \cos 105^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

راه حل ابتدا توجه کنید که $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$ ، $\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$

بنابراین $\sin 105^\circ \cos 105^\circ = -\sin 15^\circ \cos 15^\circ = -\frac{1}{2}(2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = -\frac{1}{2} \sin(2 \times 15^\circ) = -\frac{1}{2} \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

راه حل

تست

□□□□

مقدار عبارت $A = (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ})$ کدام است؟

(۱) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) ۲

راه حل می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}) = \frac{(\cos 75^\circ \sin 75^\circ - 1)}{\sin 75^\circ} \cdot \frac{(\sin 75^\circ \cos 75^\circ - 1)}{\cos 75^\circ} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} \sin 150^\circ - 1)(\frac{1}{2} \sin 150^\circ - 1)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ} \quad \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{(-\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

راه حل

تست

□□□□

مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

راه حل ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$

بنابراین به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ به دست می‌آید $A = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

راه حل

تست

۹

مقدار عبارت $\cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه حل

فرض کنید $A = \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$. دوطرف این تساوی را در $\sin 2^\circ$ ضرب می‌کنیم و از دستور $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2^\circ \cdot A = \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 8^\circ \right) \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 16^\circ \right) = \frac{1}{8} \sin 16^\circ$$

اکنون توجه کنید که $\sin 16^\circ = \sin(18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$. بنابراین $\sin 2^\circ \cdot A = \frac{1}{8} \sin 2^\circ$. پس $A = \frac{1}{8}$.

نکته

۹۴

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 3° و 45° را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 15° و $22/5^\circ$ را حساب کنیم.

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ را حساب می‌کنیم. اگر در تساوی $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ قرار دهیم $\alpha = 15^\circ$ ، به دست می‌آید

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$$

تست

۱۰

اگر $\sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۵
 (۴) ۶

راه حل

در اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22/5^\circ$. در این صورت

$$\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow a = 2$$

نکته

۹۵

اتحادهای $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

تست

۱۱

مقدار $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) ۲

راه حل

توجه کنید که $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos(2 \times \frac{5\pi}{16}) = 1 - \cos \frac{5\pi}{8}$. بنابراین $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$.

عبارت‌های $1 + \sin 2\alpha$ و $1 - \sin 2\alpha$ را می‌توانیم به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1 \pm \sin 2\alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

نکته

۹۶

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

تست

۱۲

ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 - \sin 10^\circ} + \sqrt{1 + \sin 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $2 \sin 5^\circ$
 (۲) $2 \cos 5^\circ$
 (۳) $\sin 10^\circ$
 (۴) $\cos 10^\circ$

راه حل

ابتدا توجه کنید که $1 - \sin 10^\circ = \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ - 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ = (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$. به همین ترتیب $1 + \sin 10^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$.

$$A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2} = |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$$

بنابراین

با توجه به اینکه $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$ نتیجه می‌شود $A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2 \cos 5^\circ$.

تست ۱۳

اگر $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = \gamma - 4\sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\pm(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ (۲) $\pm(\frac{3-\sqrt{2}}{2})$ (۳) $\pm(3-\sqrt{2})$ (۴) $\pm(2-\sqrt{3})$

راه حل توجه کنید که

$$\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1-2\sin x \cos x}{1+2\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = \gamma - 4\sqrt{3}$$

از طرف دیگر $\gamma - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ ، در نتیجه $\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \pm(2-\sqrt{3})$

مجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویه α را می‌توانیم برحسب نسبت‌های مثلثاتی 2α بنویسیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

۹۷

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست ۱۴

مقدار $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل می‌توان نوشت $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{2}{\sin 3^\circ} = 4$

توجه کنید که

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos 2\alpha$$

بنابراین مقدار $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را می‌توانیم برحسب $\tan \alpha$ بنویسیم:

۹۸

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست ۱۵

اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

راه حل توجه کنید که $\tan x = \frac{1}{2} = \frac{1}{\cot x}$ پس $\tan x = \frac{1}{2}$ و $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{3}{5}$ و $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5}$ ، در نتیجه $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$

توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

۹۹

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

نکته

تست ۱۶ اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16}$ مقدار $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{5}{8}$ (۳) $-\frac{11}{24}$ (۴) $-\frac{7}{8}$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos 4\alpha = -\frac{3}{4}$$

راه حل توجه کنید که

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4}} = -\frac{11}{24}$$

بنابراین

دست گرمی

۸۵ اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۸۶ حاصل $\frac{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos x}$ کدام است؟

(۱) $\sin x$ (۲) $2 \sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $2 \cos x$

۸۷ مقدار $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۴

۸۸ مقدار $\cos \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$

۸۹ مقدار $3 \cos^2 10.5^\circ + \sin^2 10.5^\circ$ کدام است؟

(۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

۹۰ مقدار $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۱ ساده شده عبارت $\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α (۱)

آزمون ۴۸

- ۴۷۱- حاصل $\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\cos^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (۴) $\frac{1}{\sin^2 x}$
- ۴۷۲- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ۴۷۳- مقدار $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
- ۴۷۴- اگر $\pi < \theta < 2\pi$ و $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$
- ۴۷۵- اگر $2\alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶
- ۴۷۶- اگر $\cot x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{9}$
- ۴۷۷- حاصل $\frac{1-\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$
- ۴۷۸- مقدار $\frac{\cos 8^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 4^\circ$ (۲) $\cos 4^\circ$ (۳) $-\cos 4^\circ$ (۴) $-\sin 4^\circ$
- ۴۷۹- اگر $2x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $A = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$
- ۴۸۰- اگر $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

سؤال	گام
۴۷۱	۹۳
۴۷۲	۹۳ ۲۸۲
۴۷۳	۹۲ ۹۳
۴۷۴	۷۴ ۸۱ ۹۳
۴۷۵	۸۱ ۹۳ ۹۷
۴۷۶	۹۳ ۹۵
۴۷۷	۹۳
۴۷۸	۹۳ ۲۸۲
۴۷۹	۹۹
۴۸۰	۸۱ ۹۳ ۲۸۲

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α (۲)

آزمون ۴۹

سؤال	گام
۴۸۱	۸۱ ۹۳ ۹۷
۴۸۲	۹۳
۴۸۳	۹۲ ۹۳
۴۸۴	۹۸
۴۸۵	۹۳
۴۸۶	۹۲ ۹۳
۴۸۷	۷۴ ۹۹
۴۸۸	۹۲ ۹۳
۴۸۹	۹۲ ۹۳
۴۹۰	۹۲ ۹۳ ۹۷

- ۴۸۱- ساده شده عبارت $\sin 2\alpha(\tan \alpha + \cot \alpha)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sin^2 \alpha$ (۴) $\cos^2 \alpha$
- ۴۸۲- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۴۸۳- مقدار $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$
- ۴۸۴- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin 2x + \cos 2x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$
- ۴۸۵- اگر $9 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10$ ، مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟ $(\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$
 (۱) $-\frac{71}{81}$ (۲) $-\frac{79}{81}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $-\frac{1}{3}$
- ۴۸۶- اگر $\cos^2 \theta = a$ ، مقدار $\sin 84^\circ$ برحسب a کدام است؟
 (۱) $\frac{1-a^2}{2}$ (۲) $\frac{a^2-1}{2}$ (۳) $2a^2-1$ (۴) $1-2a^2$
- ۴۸۷- اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- ۴۸۸- مقدار $\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$
- ۴۸۹- اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار $\cos 10x \cos 2x$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۴۹۰- مقدار $\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2}$ کدام است؟
 (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\cot 1^\circ$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α (۳)

آزمون ۵۰

- ۴۹۱- ساده شده عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4} \sin 4x$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos 4x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2x$
- ۴۹۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۴۹۳- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)
- (۱) $\frac{29}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{23}{7}$ (۴) $\frac{18}{7}$
- ۴۹۴- اگر $2 \sin x = 5 \cos x$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) $\frac{10}{29}$ (۳) $\frac{20}{29}$ (۴) $\frac{1}{29}$
- ۴۹۵- اگر $\sin x = f \sin y$ و $\cos y = 3 \cos x$ ، مقدار $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2
- ۴۹۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{25}{24}$ (۲) $-\frac{25}{24}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$
- ۴۹۷- مقدار $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2
- ۴۹۸- حاصل $\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟
- (۱) $\cos 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $4 \cos 2^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2^\circ$
- ۴۹۹- اگر $\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a}$ ، مقدار $\cos 8a$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۵۰۰- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{60}$ (۲) $\frac{59}{60}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{11}{15}$

سؤال	گام
۴۹۱	۹۳
۴۹۲	۹۳
۴۹۳	۷۴ ۸۱ ۹۳
۴۹۴	۸۱ ۹۳ ۹۷
۴۹۵	۹۳
۴۹۶	۹۳ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷
۴۹۷	۹۲ ۹۳
۴۹۸	۹۲ ۹۳ ۹۵
۴۹۹	۹۳
۵۰۰	۸۱ ۹۹

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α (۴)

آزمون ۵۱

سؤال	گام
۵۰۱	۹۳ ۲۸۲
۵۰۲	۷۴ ۹۵
۵۰۳	۷۴ ۹۵
۵۰۴	۹۹
۵۰۵	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۰۶	۷۴ ۹۷ ۲۸۲
۵۰۷	۹۲ ۹۳ ۲۸۲
۵۰۸	۸۱ ۹۳ ۹۷ ۳۰۲
۵۰۹	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۱۰	۸۱ ۹۳

۵۰۱ - ساده شده عبارت $A = \frac{\cos 2x - \sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} \sin x$ (۲) $\sqrt{2} \cos x$ (۳) $\sqrt{2} \tan x$ (۴) $\sqrt{2} \cot x$

۵۰۲ - اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار $\tan x + 2 \cot x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-3\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۵۰۳ - مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}}$ کدام است؟

(۱) $2 \sin \frac{\pi}{32}$ (۲) $2 \cos \frac{\pi}{32}$ (۳) $\sin \frac{\pi}{32}$ (۴) $\cos \frac{\pi}{32}$

۵۰۴ - مقدار $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۵۰۵ - مقدار $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۰۶ - اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{15}{4}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{11}{4}$

۵۰۷ - حاصل $\frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ} + 1$ چند برابر $\sin 8^\circ$ است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۵۰۸ - اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ جواب‌های معادله $x^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

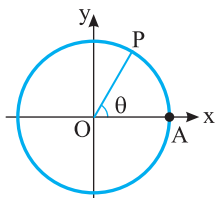
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۰۹ - اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ ، مقدار $\sin^2 2x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۵۱۰ - ساده شده عبارت $\frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ}$ کدام است؟

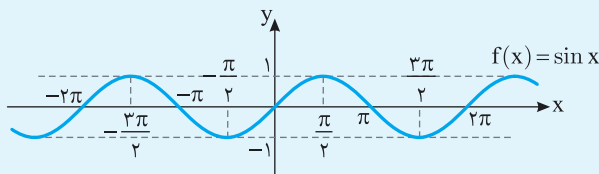
(۱) $\tan 2^\circ$ (۲) $\cot 2^\circ$ (۳) $\tan 4^\circ$ (۴) $\cot 4^\circ$



فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت، مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول \widehat{AP}) با در نظر گرفتن علامت θ با x نشان می‌دهیم. یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در این جا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم سینوس عدد حقیقی x را برابر با $\sin \theta$ تعریف کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم کسینوس عدد حقیقی x را برابر با $\cos \theta$ تعریف کنیم. به تابعی که به عدد حقیقی x سینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع سینوس** و به تابعی که به عدد حقیقی x کسینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع کسینوس** می‌گویند. این توابع را به ترتیب با \sin و \cos نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی است.

ویژگی‌های تابع سینوس

نمودار تابع سینوس در شکل زیر رسم شده است.



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x = k\pi$ هستند. که در این جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با 1 است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت

$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

اگر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2a - b \sin x$ محور عرض‌ها را در نقطه $(0, 4)$ قطع

کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

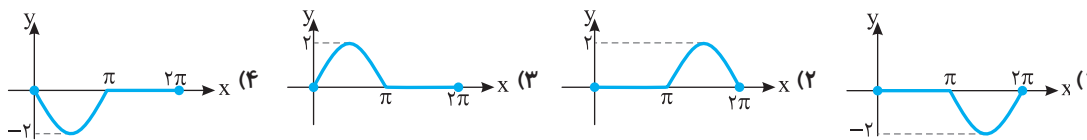
۶ (۱)

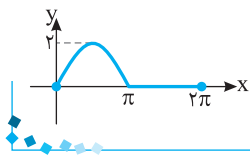
نمودار تابع از نقاط $(0, 4)$ و $(\frac{\pi}{6}, 0)$ عبور می‌کند. پس

$$f(0) = 4 \Rightarrow 2a - b \sin 0 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2a - b \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4a = 8$$

بنابراین $a+b=10$.

نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



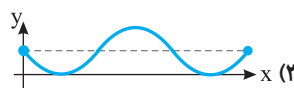
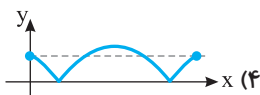
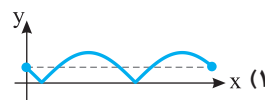
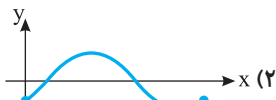


توجه کنید که اگر $0 \leq x \leq \pi$ ، آن گاه $\sin x \geq 0$ ، پس $f(x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$ ، از طرف دیگر، اگر $\pi < x \leq 2\pi$ ، آن گاه $\sin x \leq 0$ ، در نتیجه $f(x) = \sin x - \sin x = 0$ ، بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.

راه‌حل

نمودار تابع $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

تست ۳

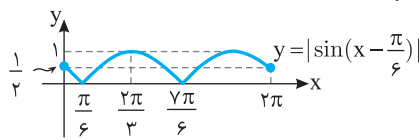
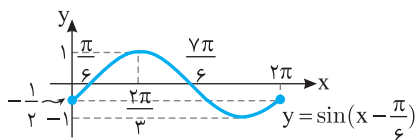


ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ به دست آید. سپس قرینه

راه‌حل

قسمت‌هایی را که پایین محور x هاست، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که پایین محور x است، حذف می‌کنیم، تا نمودار تابع

$y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ به دست آید.



برد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$ و دامنه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ کدام است؟

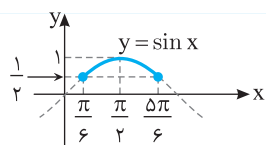
تست ۴

(۴) $[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$

(۳) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$

(۱) $[\frac{1}{3}, 1]$



ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \sin x + 2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow R_f = [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$$

راه‌حل

برد تابع f با ضابطه $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ و دامنه $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

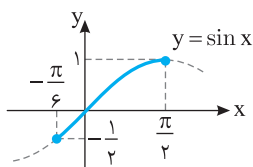
تست ۵

(۴) $[-\frac{1}{4}, 1]$

(۳) $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

(۲) $[-\frac{1}{4}, 0]$

(۱) $[0, 2]$

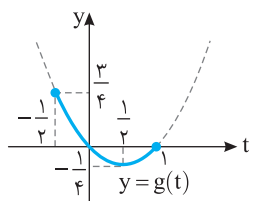


ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$.

راه‌حل

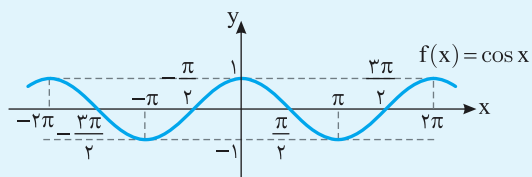
بنابراین اگر فرض کنیم $\sin x = t$ ، باید برد تابع $g(t) = t^2 - t$ را با دامنه $[-\frac{1}{2}, 1]$ پیدا کنیم. از روی نمودار

این تابع معلوم می‌شود که $R_g = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.



ویژگی‌های تابع کسینوس

نمودار تابع کسینوس در شکل زیر رسم شده است:



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ هستند، که در این جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های $x = (2k+1)\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با 1 است که در نقطه‌های $x = 2k\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۶

اگر A و B به ترتیب نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 2 \cos \pi x$ روی بازه $[\frac{2}{3}, 0]$ باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

(۴) $\sqrt{17}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

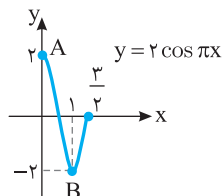
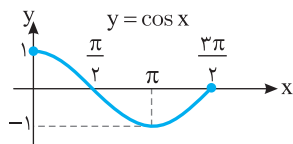
(۱) $\sqrt{5}$

راه‌حل

اگر در نمودار تابع $y = \cos x$ روی بازه $[\frac{2}{3}, 0]$ طول نقطه‌ها را بر π تقسیم کنیم و عرض نقطه‌ها را در 2 ضرب کنیم، نمودار تابع f مانند شکل

زیر به دست می‌آید. بنابراین A نقطه $(0, 2)$ و B نقطه $(1, -2)$ است، پس

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$$



تست ۷

اگر $\cos x = \frac{2m+1}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $[-\frac{5}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$

(۳) $[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$

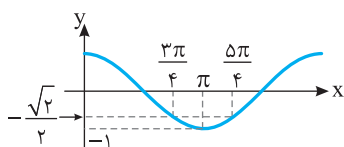
(۲) $[-\frac{5}{2}, -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}]$

(۱) $[-\frac{2\sqrt{2}-1}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$

از روی نمودار تابع $y = \cos x$ در شکل زیر معلوم است که اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، آن‌گاه $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < -1$. بنابراین

$$-1 \leq \frac{2m+1}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -4 \leq 2m+1 < -2\sqrt{2}$$

$$-5 \leq 2m < -2\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq m < -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$



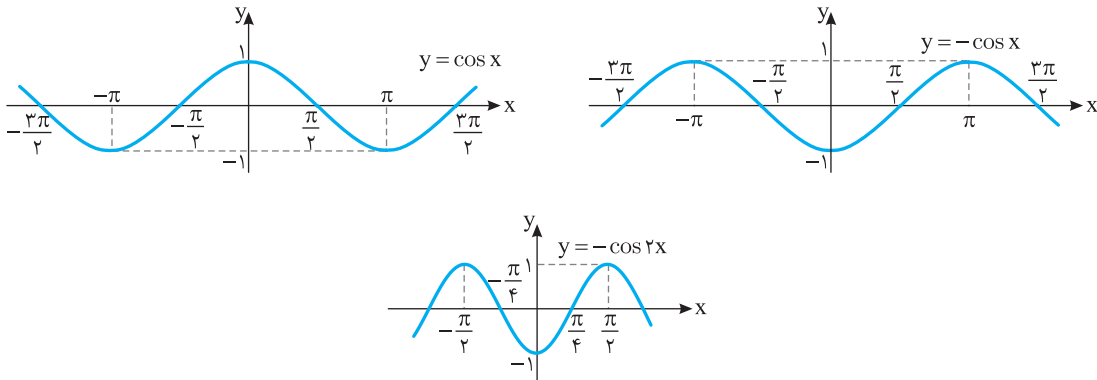
راه‌حل

تابع $f(x) = -\cos 2x$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۴) $-\pi$

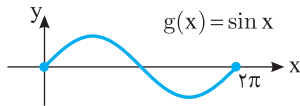
راه حل

اگر نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\cos x$ به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 2x$ به دست می‌آید (شکل‌ها را ببینید). تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{2}$ است.

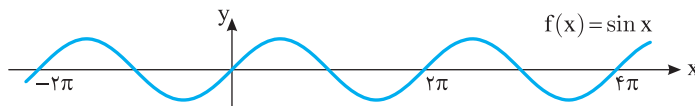


تابع متناوب

نمودار تابع $g(x) = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ به شکل مقابل است.



نمودار تابع $f(x) = \sin x$ با دامنه \mathbb{R} به شکل زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که نمودار تابع f روی بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ و $[4\pi, 2\pi]$ مانند هم است. در حقیقت، نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده است. اگر نمودار تابعی از تکرار قسمتی از آن به دست بیاید، می‌گوییم این تابع متناوب است. نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده و چون نمودار تابع g روی بازه‌ای به طول 2π رسم شده است، پس می‌گوییم دوره تناوب تابع f برابر 2π است.

فرض کنید عددی حقیقی و غیر صفر مانند T وجود دارد که به ازای هر $x \in D_f$ (۱) $x \pm T \in D_f$ (۲) $f(x \pm T) = f(x)$ در این صورت می‌گوییم f تابعی متناوب است. کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دوره تناوب تابع f می‌نامیم.

تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر 2π است، زیرا دامنه آن‌ها \mathbb{R} است و

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

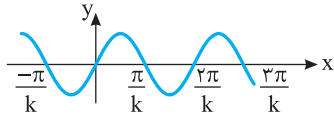
اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ از روی نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت زیر به دست می‌آید:

(۱) عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را a برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = a \sin x$ به دست بیاید.

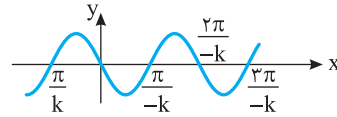
(۲) نمودار تابع $y = a \sin x$ را b واحد در راستای محور x انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ به دست بیاید.

(۳) نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ را c واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ به دست بیاید. معلوم است که در هیچ یک از این مراحل دوره تناوب تابع عوض نمی‌شود، بنابراین دوره تناوب تابع $y = a \sin(x+b) + c$ هم برابر 2π است.

از طرف دیگر، برای رسم تابع $y = \sin kx$ ، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم؛ پس نمودار تابع $y = \sin x$ در راستای محور x منقبض یا منبسط می‌شود. پس دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ نیز از ضرب کردن $\frac{1}{|k|}$ در دوره تناوب تابع $y = \sin x$ به دست می‌آید (توجه کنید که چون دوره تناوب تابع عددی مثبت است و k می‌تواند منفی باشد، برای k قدر مطلق گذاشته‌ایم).



$y = \sin kx$, $k > 0$



$y = \sin kx$, $k < 0$

به این ترتیب، در مورد توابع $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

۱۰۳

نکته

اگر a, b, c, d عددهایی حقیقی باشند که $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه تابع‌های $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|+d$ است.

تست

دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \cos(1-2x) + 5$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

راه‌حل

دوره تناوب تابع $y = a \cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|-2|} = \pi$.

تست

دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \sin \frac{\pi x}{4}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط $\frac{\pi}{2}$ (۲) فقط -2π (۳) $\pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $\pm 2\pi$

راه‌حل

می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)$ و $y = a \cos(bx+c)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$ ، $T_g = \frac{2\pi}{|-a|} = \frac{2\pi}{|a|}$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 8 = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

تست

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a^2 \sin ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، بیشترین مقدار تابع f کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸

راه‌حل

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{4}$ در نتیجه $|a| = 8$. اگر $\sin ax = -1$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع f اتفاق می‌افتد که برابر $2 + a^2 = 66$ است.

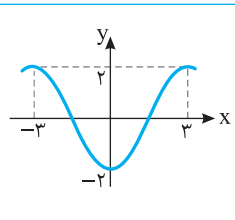
تست

دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{2}$

راه‌حل

توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$ ، بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$.



بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟

(۲) $-\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۴) $-\frac{\pi}{6}$

(۳) $-\frac{2\pi}{3}$

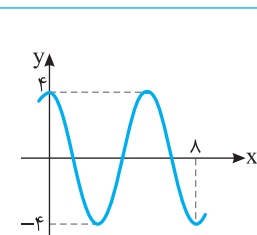
تست ۱۳

راه‌حل

با توجه به شکل $f(0) = -2$ پس $-2 = a \cos 0$ در نتیجه $a = -2$. از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{2\pi}{3}$ یا $-\frac{2\pi}{3}$ باشد.



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(\left(\frac{\delta}{4} + bx\right)\pi\right)$ به صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{2}$

تست ۱۴

راه‌حل

توجه کنید که

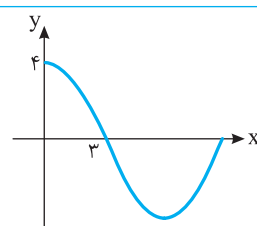
$$f(x) = a \sin\left(\pi bx + \frac{\delta\pi}{4}\right) = a \cos \pi bx$$

از طرف دیگر، $f(0) = 4$ پس $a \times 1 = 4$ ، در نتیجه $a = 4$. همچنین، دوره تناوب تابع $f(x) = 4 \cos \pi bx$ برابر است با $\frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|}$. از روی نمودار معلوم

می‌شود که $1/5$ برابر دوره تناوب تابع f برابر ۸ است. بنابراین

$$1/5 T = 8 \Rightarrow T = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{16}{3} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{8} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{8}$$

b باید مثبت باشد، در نتیجه مقدار ab برابر است با $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{a} + b$ به شکل مقابل است.

دوره تناوب f کدام است؟ ($a > 0$)

(۲) ۶

(۱) ۳

(۴) ۱۲

(۳) ۹

تست ۱۵

راه‌حل

با توجه به نمودار،

$$f(0) = 4 \Rightarrow 4 + b = 4 \Rightarrow b = 0, \quad f(3) = 0 \Rightarrow 4 \cos \frac{3\pi}{a} + 0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{a} = 0$$

کوچک‌ترین زاویه مثبتی که کسینوس آن صفر می‌شود، زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. پس $\frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $a = 6$. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

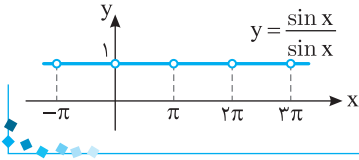
تست ۱۶

دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

راه حل

تابع f به ازای هر x که مضرب صحیح π باشد، تعریف نشده و به ازای بقیه x های حقیقی برابر تابع $y=1$ است. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است. واضح است که دوره تناوب تابع f برابر π است.



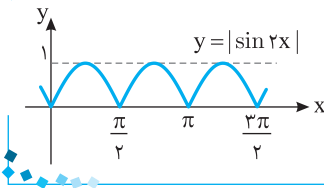
تست ۱۷

دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 2x|$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

راه حل

با توجه به نمودار تابع f ، دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



نکته

دوره تناوب توابع $f(x) = |a \sin(bx+c)|$ و $g(x) = |a \cos(bx+c)|$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۸

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 3x|$ با دوره تناوب تابع $g(x) = |\cos \frac{ax}{2}|$ برابر باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

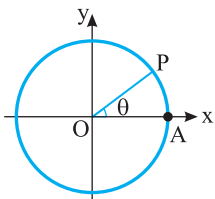
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است. بنابراین

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow |a| = 6$$

تابع تانژانت

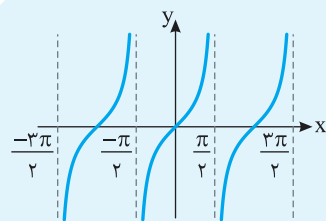


فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول \widehat{AP}) با در نظر گرفتن علامت θ با x نمایش می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن‌گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم تانژانت عدد حقیقی x را که $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ برابر تانژانت θ تعریف کنیم. اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ ، تانژانت x تعریف نمی‌شود.

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ ، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود. اگر $f(x) = \tan x$ ،

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

آن‌گاه



نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تنازنت تابعی متناوب با دوره تناوب π است و روی هر بازه به صورت $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ که $k \in \mathbb{Z}$ ، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.

نکته

اگر a, b, c, d عددهایی حقیقی باشند و $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه دوره تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx+c)+d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۹

دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$
 (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
 (۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$
 (۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 4k+2, k \in \mathbb{Z}$$

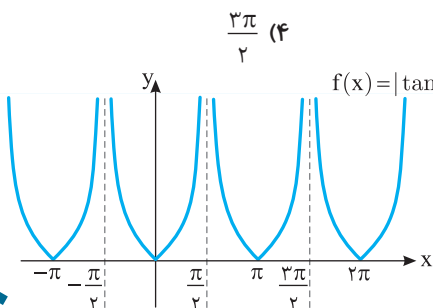
هر x که در تساوی $\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ صدق نکند، در دامنه این تابع قرار دارد:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$$

راه‌حل
تست ۲۰

دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
 (۲) π
 (۳) 2π
 (۴) $\frac{3\pi}{2}$

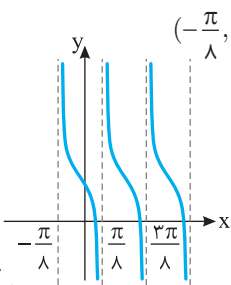


برای اینکه نمودار تابع $f(x) = |\tan x|$ را رسم کنیم، قرینه قسمت‌هایی از نمودار تابع $y = \tan x$ را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم. از روی این نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ برابر π است.

راه‌حل
تست ۲۱

تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
 (۲) $(0, \frac{\pi}{4})$
 (۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$
 (۴) $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$



تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8})$ که $k \in \mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین

تابع f روی بازه $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.

راه‌حل
تست ۲۲

اگر $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ و $\tan 2x = \frac{2m+3}{4}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{2} < m < -\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{1}{2} < m < \frac{7}{2}$
 (۳) $-\frac{7}{2} < m < \frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{7}{2}$

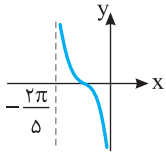
توجه کنید که $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ و تابع تنازنت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan 2x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan 2x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2m+3}{4} < 1 \Rightarrow -\frac{7}{2} < m < \frac{1}{2}$$

راه‌حل

تست ۲۳

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax+b)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

راه حل

توجه کنید که دوره تناوب تابع f برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است. از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع $\frac{2\pi}{5}$ است، پس

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

چون تابع f روی بازه $(-\frac{2\pi}{5}, 0)$ نزولی است، پس a منفی است و جواب $a = -\frac{5}{2}$ غیر قابل قبول است.

تست ۲۴

برد تابع $f(x) = 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ با دامنه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, +\infty)$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

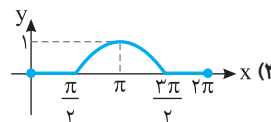
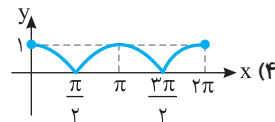
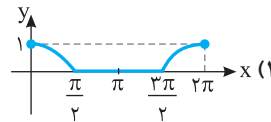
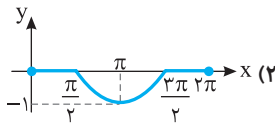
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$$

اکنون از روی نمودار تابع تنازانت و اکیداً صعودی بودن آن روی بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ نتیجه می شود

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow -\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 1 \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow R_f = (1, +\infty)$$

دست گرمی

۹۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x - |\cos x|}{2}$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۹۳- اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ و $\sin x = \frac{m-1}{4}$ ، چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۴- دوره تناوب تابع $f(x) = -2 \sin \frac{\pi x}{2}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{2} - ax)$ مقدار a کدام است؟

- (۱) π (۲) -2π (۳) $\pm\pi$ (۴) $\pm 2\pi$

۹۵- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x + 12$ چقدر است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۹۶- تابع $f(x) = -\tan 2x$ روی کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (۲) $(0, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ (۴) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۹۷- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ ، حدود m کدام است؟

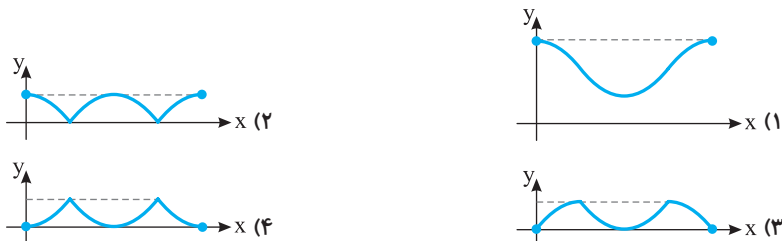
- (۱) $-4 < m < 1$ (۲) $-1 < m < 4$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 1$

توابع مثلثاتی (۱)

آزمون ۵۲

سؤال	گام
۵۱۱	۳۰ ۳۲ ۳۷ ۱۰۱
۵۱۲	۱۰۱
۵۱۳	۱۰۱
۵۱۴	۱۰۰
۵۱۵	۱۰۳
۵۱۶	۱۰۴
۵۱۷	۱۰۰ ۱۰۳
۵۱۸	۱۰۵
۵۱۹	۱۰۵
۵۲۰	۳۱ ۴۶ ۱۰۵

۵۱۱- نمودار تابع $y=1-|\cos x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۵۱۲- نمودار تابع $f(x)=a \cos x-b$ از نقطه $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1)$ عبور می‌کند و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ قطع می‌کند. حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۵۱۳- اگر $\cos x = \sqrt{3}m$ و $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $0 < m < 1$ (۲) $0 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

۵۱۴- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = 5 \sin^2 x - 3$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴) -۱۰

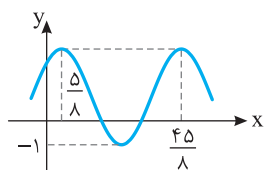
۵۱۵- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \cos kx$ برابر $\frac{\pi}{2k+1}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۵۱۶- دوره تناوب تابع $f(x) = |\cos 4x|$ چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۱۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \sin(\frac{2\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $a-b$ کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۶

۵۱۸- دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) \mathbb{Z}

۵۱۹- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = \frac{2-m}{\sqrt{3}}$ ، حداکثر مقدار m کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) صفر

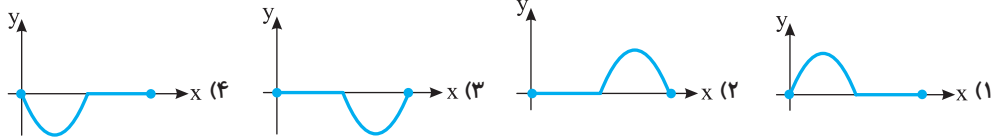
۵۲۰- تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ روی بازه $(a, \frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{6}$

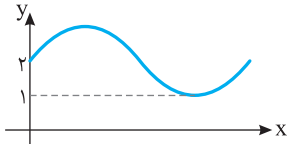
آزمون ۵۳

توابع مثلثاتی (۲)

۵۲۱- نمودار تابع $f(x) = \sin x - |\sin x|$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۵۲۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = (a+b)\sin x + 2a - b$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۵۲۳- اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{m+1}{2m}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$ (۳) $m > -\frac{1}{2}$ (۴) $m < -\frac{1}{2}$

۵۲۴- برد تابع $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 4]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 4]$

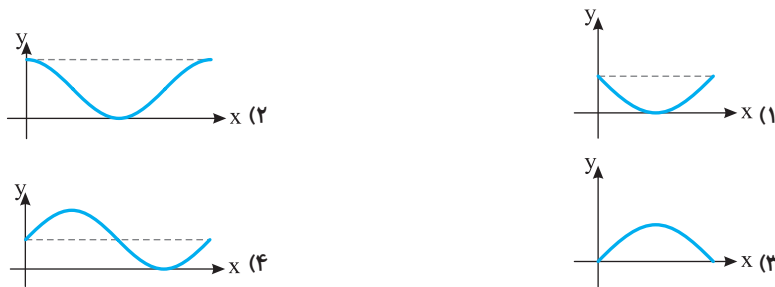
۵۲۵- اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = 3a + a^2 \cos ax$ برابر ۲ باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

- (۱) 2π یا π (۲) π یا $\frac{\pi}{2}$ (۳) 4π یا 2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$

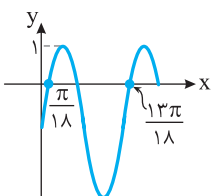
۵۲۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos 4x + \cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

۵۲۷- نمودار تابع $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi+x}{2})$ در یک دوره تناوب خود کدام است؟



۵۲۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \cos(\frac{\pi}{3} - bx)$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۲۹- برد تابع f با دامنه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ و ضابطه $f(x) = \frac{3 - \tan x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{3}{2}, 2]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[1, \frac{3}{2}]$ (۴) $[1, 2]$

۵۳۰- اگر $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $\tan x = \frac{m-1}{2}$ ، کدام یک درست است؟

- (۱) $m > 3$ (۲) $m > 3$ یا $m < -1$ (۳) $m > 1$ یا $m < -3$ (۴) $-1 < m < 3$

سؤال	گام
۵۲۱	۳۳ ۱۰۰ ۳۳۵
۵۲۲	۱۰۰
۵۲۳	۱۰۰ ۳۲۶
۵۲۴	۸۱ ۱۰۰
۵۲۵	۱۰۳
۵۲۶	۹۵ ۱۰۳
۵۲۷	۹۵ ۱۰۱ ۱۰۳
۵۲۸	۹۲ ۱۰۰ ۱۰۳
۵۲۹	۲۲ ۱۰۵
۵۳۰	۱۰۵

توابع مثلثاتی (۳)

آزمون ۵۴

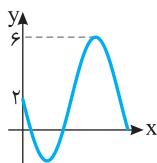
سؤال	گام
۵۳۱	۳۱ ۳۵ ۳۷ ۱۰۱
۵۳۲	۱۰۰ ۱۰۳
۵۳۳	۱۰۱
۵۳۴	۲۲ ۱۰۰ ۲۸۱
۵۳۵	۱۰۳
۵۳۶	۸۱ ۹۳ ۱۰۳
۵۳۷	۹۳ ۱۰۰ ۱۰۴
۵۳۸	۱۰۰ ۱۰۳
۵۳۹	۲۲ ۱۰۵
۵۴۰	۳۵ ۴۶ ۱۰۵

۵۳۱- نمودار تابع $f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$ روی بازه $[0, \pi]$ کدام است؟



۵۳۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2b \sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴
(۳) ۲ (۴) -۲



۵۳۳- اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{m^2 + 1}{4}$ ، کدام یک درست است؟

- (۱) $\frac{3}{2} < |m| \leq \sqrt{3}$ (۲) $1 < |m| \leq \sqrt{3}$ (۳) $1 < |m| \leq \frac{3}{2}$ (۴) $0 < |m| \leq \sqrt{3}$

۵۳۴- برد تابع $f(x) = \sin^4 x + 2 \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[0, \frac{3}{2}]$

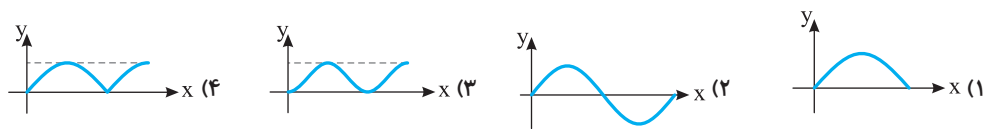
۵۳۵- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |a| + b \cos a\pi x$ برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر ۳- باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) ۴

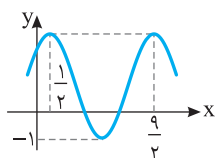
۵۳۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos^2 ax - \cos^4 ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

۵۳۷- نمودار تابع $f(x) = 4|\sin x \cos x|$ در یک دوره تناوب کدام است؟



۵۳۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) -۴
(۳) ± 4 (۴) صفر

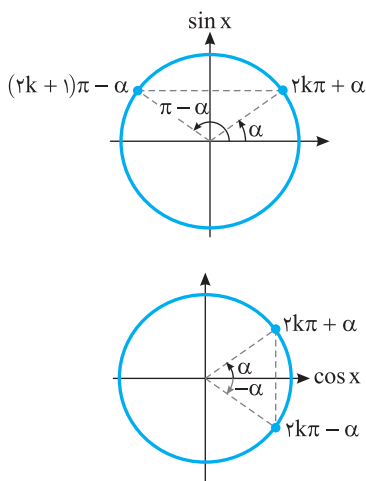
۵۳۹- برد تابع f با ضابطه $f(x) = -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3})$ و دامنه $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۲) $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۳) $[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۴) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

۵۴۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ و دامنه $(2, a)$ روی دامنه اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

معادلات مثلثاتی ساده



فرض کنید α زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi - \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ، پس $x = 2k\pi + \alpha$ نیز جواب است. همین طور $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ، یعنی $x = (2k+1)\pi - \alpha$ نیز برای هر عدد صحیح k جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = -\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[-\pi, \pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ ، پس $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi - \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

۱۰۶

نکته

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت مقابل هستند:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل هستند:

مثال:

$$۱) \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$۲) \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تست

۱ جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \delta x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$- \frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (۲)$$

$$k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad (۱)$$

توجه کنید که

راه‌حل

$$\sin x = \sin \delta x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \delta x \\ x = (2k+1)\pi - \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست

۲ جواب‌های کلی معادله $\cos 4x = \cos x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{5} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{2\pi}{5}, 2k\pi - \frac{2\pi}{5} \quad (۲)$$

$$2k\pi \quad (۱)$$

معادله را حل می‌کنیم:

راه‌حل

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تذکر

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:
 (۱) به ازای $k=0$ جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازه مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.
 (۲) به ازای $k=1$ ، $k=2$ ، ... جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.
 (۳) به ازای $k=-1$ ، $k=-2$ ، ... جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.

تست
□□□□

معادله $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

معادله را به صورت $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعه جواب کلی برای معادله مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیر مجموعه دیگری باشد.

تست
□□□□

معادله $\cos 3x = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۲ (۴) ۵ (۳) ۶ (۲) ۸ (۱)

راه‌حل

معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعه جواب $\frac{k\pi}{2}$ شامل مجموعه جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ هستند که در بازه $[0, 2\pi]$

عبارت‌اند از $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\pi$ ، $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=2\pi$.

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کرد.

تست
□□□□

معادله $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲	k	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π	$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x = \pi$ در این جواب‌ها، معادله در بازه $[0, \pi]$ چهار جواب دارد: $x = \frac{\pi}{5}$ ، $\frac{3\pi}{5}$ ، π ، $\frac{\pi}{3}$.

تست

۶

معادله $\cos 4x + \sin x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = (4k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	k	۱	۲
$(4k+1)\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$(4k-1)\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

راه‌حل

۱۱۰

نکته

۱) برای حل معادله $\sin x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\sin \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ را پیدا کنیم.

۲) برای حل معادله $\cos x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\cos \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\cos x = \cos \alpha$ را پیدا کنیم.

تست

۷

جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{5\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۱)

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت مقابل هستند: $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ ، $2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

راه‌حل

۱۱۱

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در بازه $[a, b]$ می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی x ، نامعادله $a \leq x \leq b$ را حل کنیم و مقادیر k را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست

۸

معادله $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ چند جواب در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

ابتدا جواب‌های کلی معادله مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از

اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{\pi}{2}$ و $2\pi - \frac{\pi}{2}$. همچنین،

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = -1, 0$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $2\pi + \frac{7\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ پنج جواب دارد.

راه‌حل

واضح است که معادله‌های $\sin x = m$ و $\cos x = m$ به‌ازای m هایی که در بازه $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند.

تست ۹

به‌ازای چه مقادیری از k معادله $2 \cos x + 3k = 1$ جواب دارد؟

- (۱) $k \leq \frac{4}{3}$ (۲) $-1 \leq k \leq 1$ (۳) $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$

راه‌حل

توجه کنید که $2 \cos x + 3k = 1$ در نتیجه $\cos x = \frac{1-3k}{2}$ و چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

معادلات خاص مثلثاتی

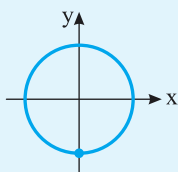
در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به‌صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً، معادله مثلثاتی $\sin x = 1$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

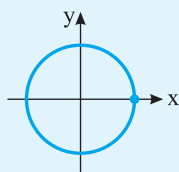
بنابراین جواب‌های کلی این معادله به‌صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نتیجه زیر آورده‌ایم.

معادلات خاص مثلثاتی

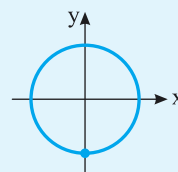
نکته



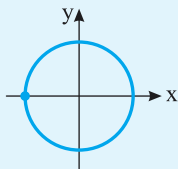
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



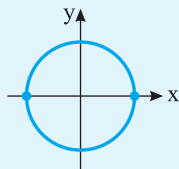
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



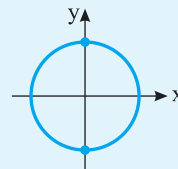
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست ۱۰

جواب‌های کلی معادله $\sin x \cos 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$ (۴) $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

راه‌حل

توجه کنید که $\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۱

نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

راه‌حل

جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y = 0$ ، پس $\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$ به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج π و مضارب فرد π جواب‌های این معادله هستند، مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح π نوشت، که می‌شود $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

تست

۱۲

جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۲) $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

راه‌حل

راه‌حل اول توجه کنید که

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱), \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

بنابراین

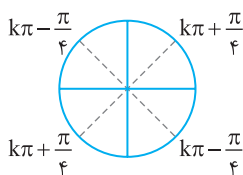
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳), \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$

همین‌طور.

اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نوشت. همین‌طور، اجتماع جواب‌های

(۲) و (۳) به صورت $k\pi - \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ است که می‌توان با

توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).



راه‌حل دوم چون $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت $-\cos 2x = 0$ نوشت، که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

۱۳

جواب‌های کلی معادله $\cos^3 x - \cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{k\pi}{2}$

(۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۱) $k\pi$

راه‌حل

راه‌حل اول توجه کنید که

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) نوشت.

بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت‌اند از

که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت.

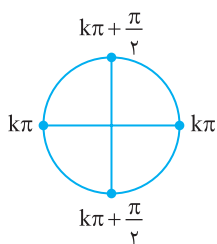
راه‌حل دوم معادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0$$

بنابراین

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

که مشابه راه‌حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت.



برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های ساده‌ی مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست ۱۴

معادله $2 \cos^2 x = \cos x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل توجه کنید که

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

تست ۱۵

جواب‌های کلی معادله $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۴)

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

از طرف دیگر، $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۶

جواب‌های کلی معادله $\sin 6x = 2 \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $\frac{2k\pi}{3}$ (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴)

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین $\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که $\frac{2k\pi}{3}$ مضارب زوج $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{k\pi}{3}$ همه مضارب صحیح $\frac{\pi}{3}$ هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر $\frac{k\pi}{3}$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۱۷

جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = 1 + \sin x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴)

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$. بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - 2 \sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست
 ۱۸
معادله $\sin^4 x - \sin x = \cos^4 x$ در بازه $[-\pi, 0]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow -\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-x)$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, 0]$ عبارت‌اند از $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = -\frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادله در بازه $[-\pi, 0]$ دو جواب دارد.

تست
 ۱۹
جواب‌های کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ (که $k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟ $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۱)
راه حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

تست
 ۲۰
مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟ 5π (۴) 4π (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 2π (۱)
راه حل

راه حل اول طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 0$. بنابراین جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

توجه کنید که جواب‌های π و $\frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل دوم با استفاده از اتحادهای $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ و $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

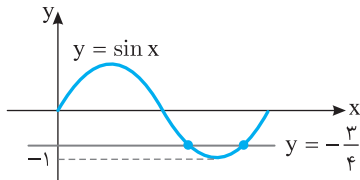
تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

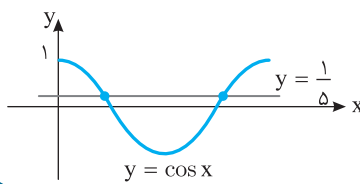
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل

توجه کنید که

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$$


 از طرف دیگر، جواب‌های معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y = \sin x$ و خط $y = -\frac{3}{4}$ هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

 به همین ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که معادله $\cos x = \frac{1}{5}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.


دست‌گرمی

 ۹۸- معادله $\cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

 ۹۹- جواب‌های کلی معادله $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

(۱) $-\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ و $-k\pi - \frac{\pi}{12}$ (۲) $-\frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ و $-k\pi + \frac{\pi}{12}$

(۳) $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{12}$ و $-k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{12}$

 ۱۰۰- نمودار تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) - 1$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه خط $y = -1$ را قطع می‌کند؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

 ۱۰۱- جواب‌های کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

(۱) $x = k\pi$ (۲) $x = \frac{k\pi}{2}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{4}$ (۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

 ۱۰۲- مجموع جواب‌های معادله $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

 ۱۰۳- معادله $\sin 2x = \tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

معادلات مثلثاتی (۱)

آزمون ۵۵

- ۵۴۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 3x = \cos 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{2k\pi}{5}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{k\pi}{5}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{5}$
- ۵۴۲- جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$ کدام‌اند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\lambda k\pi - \pi$ یا $\lambda k\pi + \pi$ (۲) $\lambda k\pi + 2\pi$ یا $\lambda k\pi - \pi$
 (۳) $\lambda k\pi + 3\pi$ یا $\lambda k\pi - \pi$ (۴) $\lambda k\pi + \pi$ یا $\lambda k\pi + 3\pi$
- ۵۴۳- نمودار تابع $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۴۴- جواب‌های کلی معادله $\sin x + \cos(x + \frac{\pi}{5}) = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{7\pi}{20}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{20}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{20}$ (۴) $k\pi - \frac{7\pi}{20}$
- ۵۴۵- جواب‌های کلی معادله $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$
- ۵۴۶- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 2x - 7 \sin 2x + 5 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
- ۵۴۷- معادله $\sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۴۸- معادله $\cos 2x = \cos x - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۴۹- جواب‌های کلی معادله $\cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2}$
- ۵۵۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟
- (۱) $\frac{9\pi}{2}$ (۲) 5π (۳) $\frac{11\pi}{2}$ (۴) $\frac{13\pi}{2}$

سؤال	گام
۵۴۱	۱۰۶ ۱۰۸
۵۴۲	۱۰۶ ۱۱۰
۵۴۳	۱۱۱ ۱۱۳
۵۴۴	۱۰۶ ۱۰۹
۵۴۵	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۵۴۶	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۴۷	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۴۸	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۴۹	۱۱۳ ۱۱۵
۵۵۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵

معادلات مثلثاتی (۲)

آزمون ۵۶

سؤال	گام
۵۵۱	۱۰۶ ۱۰۸
۵۵۲	۱۰۶ ۱۱۰
۵۵۳	۱۰۷ ۱۱۳
۵۵۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۵۵۵	۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳
۵۵۶	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۵۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۵۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۵۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۵
۵۶۰	۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۳

- ۵۵۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \cos 4x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{2k\pi}{9}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$ (۳) $\frac{k\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$
- ۵۵۲- جواب‌های کلی معادله $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}$
- ۵۵۳- تابع $f(x) = 2 \sin 3x + 1$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۵۴- معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۵۵- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟
- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$
- ۵۵۶- معادله $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, 0)$ دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۵۷- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 4x} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟
- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$
- ۵۵۸- مجموع جواب‌های معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟
- (۱) 4π (۲) 5π (۳) 6π (۴) 7π
- ۵۵۹- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟
- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$
- ۵۶۰- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \sin^2(x - \frac{7\pi}{18}) = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{9}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

معادلات مثلثاتی (۳)

آزمون ۵۷

- ۵۶۱- جواب‌های کلی معادله $\sin 5x = \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$
- (۳) $k\pi$ یا $\frac{k\pi + \pi}{4}$ (۴) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi + \pi}{8}$
- ۵۶۲- معادله $2 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$ در بازه $(-\pi, 2\pi)$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۶۳- تابع $f(x) = -2 \cos 4x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۵۶۴- جواب‌های کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{k\pi + 7\pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi - 7\pi}{2}$ (۳) $\frac{k\pi - 7\pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi + 7\pi}{2}$
- ۵۶۵- معادله $2 \cos^3 x - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰
- ۵۶۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(\pi + x) - \sin x - 2 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ۵۶۷- معادله $1 - \cos 2x = \sin^2 x$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵۶۸- مجموع جواب‌های معادله $1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos(3\pi - x)$ که در بازه $(0, 2\pi)$ قرار دارند، کدام است؟
- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{3}$
- ۵۶۹- چند جواب معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۵۷۰- معادله $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

سؤال	گام
۵۶۱	۱۰۶
۵۶۲	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۵۶۳	۱۰۷ ۱۱۳
۵۶۴	۱۰۶ ۱۰۹
۵۶۵	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳
۵۶۶	۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۶۷	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵
۵۶۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۶۹	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۰	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۲ ۲۸۵

معادلات مثلثاتی (۴)

آزمون ۵۸

سؤال	گام
۵۷۱	۱۰۶ ۱۱۱
۵۷۲	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۵۷۳	۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۴	۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۱
۵۷۵	۱۱۶
۵۷۶	۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹ ۱۱۵
۵۷۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۵
۵۷۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۵ ۲۹۱
۵۸۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۵

۵۷۱- معادله $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x - \frac{\pi}{9})$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۵۷۲- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos 3x - 1 = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، چقدر است؟

- $\frac{4\pi}{3}$ (۱) $\frac{13\pi}{9}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴)

۵۷۳- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

- $\frac{k\pi}{3}$ (۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

۵۷۴- معادله $\frac{\sin 3x}{\cos(x - \frac{\pi}{6})} = -1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۷۵- معادله $(4 \cos x + 1)(5 \cos x - 3) = 0$ چند جواب در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۷۶- جواب‌های کلی معادله $\tan x + \cot x = 2$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

- $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

۵۷۷- معادله $\sin^2 x + \sin^2 4x = 1$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۷۸- مجموع جواب‌های معادله $\cos^f x - 1 = \sin^f x$ در بازه $(0, 3\pi)$ کدام است؟

- π (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴)

۵۷۹- تعداد جواب‌های معادله $(2 - \sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۸۰- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- 2π (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴)

معادلات مثلثاتی (۵)

آزمون ۵۹

۵۸۱- معادله $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, 2\pi)$ دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۵۸۲- جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \sqrt{2}$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

$(k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, i < 18)$

- {۱, ۴} (۱) {۳, ۸} (۲) {۲, ۱۱} (۳) {۳, ۱۰} (۴)

۵۸۳- جواب‌های کلی معادله $1 - 4 \sin^2(\delta x - \frac{\pi}{3}) = 0$ به صورت $x = \frac{k\pi}{\delta} + \frac{i\pi}{3}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟

$(0 < i < \delta, i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z})$

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۵۸۴- معادله $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۵۸۵- معادله $(4 \sin x - \sqrt{3})(4 \cos x - \sqrt{13}) = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۵۸۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

- $\frac{k\pi}{3}$ (۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴)

۵۸۷- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- $\frac{3\pi}{4}$ (۱) $\frac{5\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴)

۵۸۸- معادله $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۵۸۹- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

- $\frac{k\pi}{4}$ (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

۵۹۰- مجموع جواب‌های معادله $\cos(2\pi \sin x) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۳π (۱) ۴π (۲) ۵π (۳) ۶π (۴)

سؤال	گام
۵۸۱	۱۰۶ ۱۰۷
۵۸۲	۱۰۶ ۱۱۰
۵۸۳	۱۰۶ ۱۱۰
۵۸۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۵۸۵	۱۱۶
۵۸۶	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۵۸۷	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۸۸	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۵
۵۸۹	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۵
۵۹۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۳

آزمون فصل دوم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۰

سؤال	گام
۵۹۱	۸۱ ۹۰
۵۹۲	۸۱ ۹۰ ۹۳
۵۹۳	۱۰۰ ۱۰۳
۵۹۴	۹۷
۵۹۵	۹۰ ۱۰۶
۵۹۶	۱۰۶ ۱۰۹
۵۹۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹ ۱۱۰
۵۹۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۵۹۹	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۵
۶۰۰	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۵

- ۵۹۱- اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۵۹۲- ساده شدهٔ کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟
 (۱) $8 \cos^{-2} 2\theta$ (۲) $8 \sin^{-2} 2\theta$ (۳) $16 \cos^{-2} 2\theta$ (۴) $16 \sin^{-2} 2\theta$
- ۵۹۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟
 (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶
-
- ۵۹۴- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۵۹۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟
 (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
- ۵۹۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟
 (۱) $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ۵۹۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $1 = \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8})$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$
- ۵۹۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π
- ۵۹۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟
 (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$
- ۶۰۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟
 (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

آزمون فصل دوم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۱

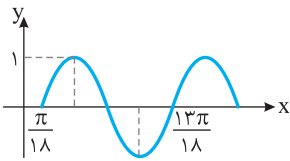
۶۰۱- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶۰۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 2^\circ = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۶۰۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱

- (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۶۰۴- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۶۰۵- جواب‌های کلی معادله $2 \cos 2x = \cot x (\sin x + \tan x)$ کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۶۰۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۶۰۷- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi - \pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۶۰۸- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی هستند؟

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

۶۰۹- جواب‌های کلی معادله $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۶۱۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

سؤال	گام
۶۰۱	۹۰ ۹۳ ۲۸۱
۶۰۲	۸۱ ۹۰
۶۰۳	۹۰ ۱۰۰ ۱۰۳
۶۰۴	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۵ ۲۸۲
۶۰۵	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۵
۶۰۶	۹۳ ۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۶۰۷	۹۳ ۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۵
۶۰۸	۱۰۶ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۰۹	۱۰۶ ۱۰۷
۶۱۰	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۲