

کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حسابان ۲

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

۱۲



انتگرالگو

مقدمه

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای حسابان ۲ سال دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آنها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آنها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو و همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: تابع

۲	درس اول: تبدیل نمودار توابع
۱۷	تمرین
۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۹	درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم
۴۸	تمرین
۵۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۷	راه‌حل تمرین‌ها
۶۷	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل دوم: مثلثات

۸۶	درس اول: تناوب و تابع تانژانت
۹۳	تمرین
۹۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۰۰	درس دوم: معادلات مثلثاتی
۱۱۶	تمرین
۱۱۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۷	راه‌حل تمرین‌ها
۱۳۸	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل سوم: حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱۶۴	درس اول: حدهای نامتناهی
۱۷۶	تمرین
۱۷۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۸۴	درس دوم: حد در بی نهایت
۱۹۵	تمرین

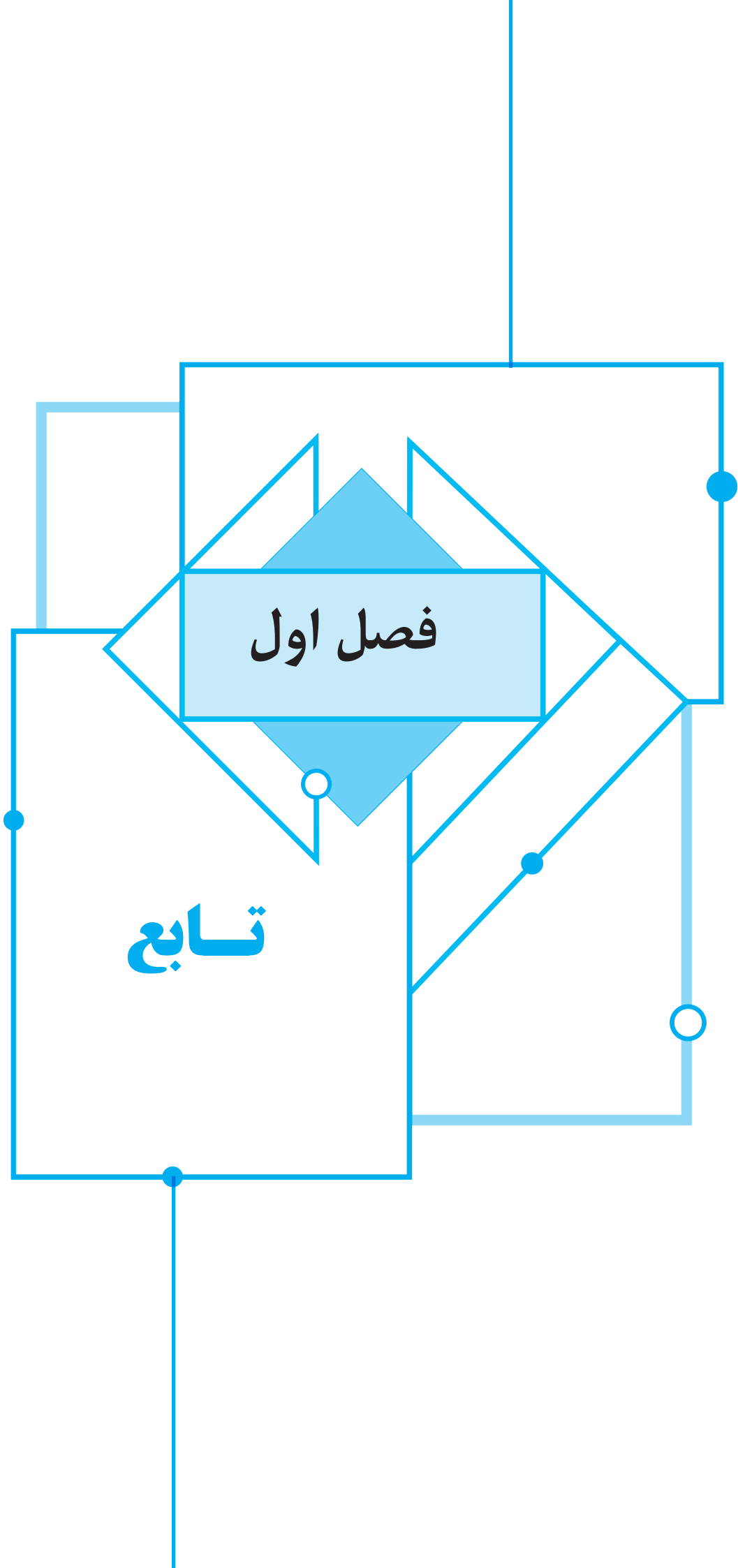
۱۹۸.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۰۴.....	راه‌حل تمرین‌ها
۲۱۱.....	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل چهارم: مشتق

۲۲۶.....	درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق
۲۳۹.....	تمرین
۲۴۰.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۴۵.....	درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی
۲۶۶.....	تمرین
۲۶۹.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۸۲.....	درس سوم: آهنگ تغییر متوسط، آهنگ تغییر لحظه‌ای و معادله خط مماس
۲۸۹.....	تمرین
۲۹۱.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۹۸.....	راه‌حل تمرین‌ها
۳۱۰.....	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل پنجم: کاربردهای مشتق

۳۴۴.....	درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
۳۶۹.....	تمرین
۳۷۳.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۸۶.....	درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۳۹۶.....	تمرین
۳۹۸.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۰۵.....	درس سوم: رسم نمودار تابع
۴۲۰.....	تمرین
۴۲۱.....	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۳۱.....	راه‌حل تمرین‌ها
۴۴۸.....	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای



فصل اول

تابع

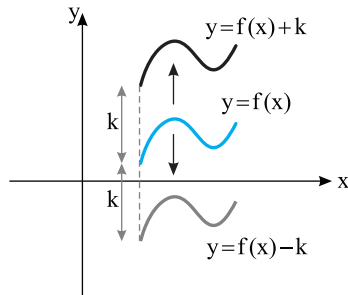
درس اول: تبدیل نمودار توابع

رسم نمودار به کمک نمودارهای دیگر

می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی نمودار تابع‌های دیگر رسم کنیم.

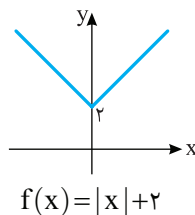
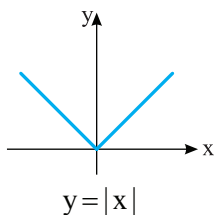
انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k > 0$.
 برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.
 برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.
 بنابراین نقطه $(x_0, y_0 + k)$ از نمودار تابع $y = f(x) + k$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y = f(x)$ است.



مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x| + 2$ به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم:



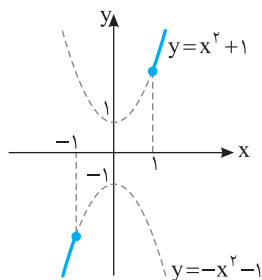
مسئله ۱

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ -x^2 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

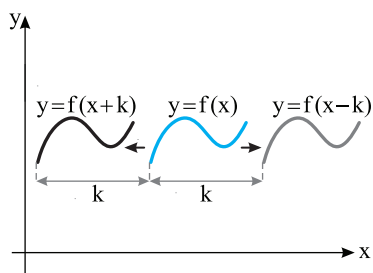
راه حل

ابتدا نمودار تابع های $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 - 1$ را رسم می کنیم، سپس قسمت هایی از آنها را که مربوط به بازه های دامنه f هستند، انتخاب می کنیم. توجه کنید که نمودار $y = x^2 + 1$ از انتقال نمودار $y = x^2$ به اندازه یک واحد به بالا به دست آمده است. همچنین نمودار $y = -x^2 - 1$ از انتقال نمودار $y = -x^2$ به اندازه یک واحد به پایین به دست آمده است.



انتقال افقی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k > 0$. برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم. برای رسم نمودار تابع $y = f(x-k)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم. بنابراین نقطه $(x_0 - k, y_0)$ از نمودار تابع $y = f(x+k)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y = f(x)$ است.

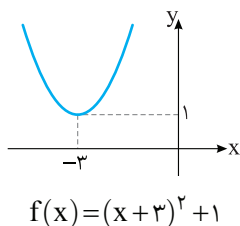
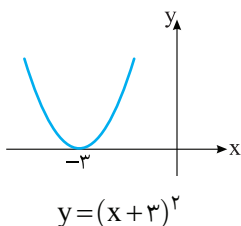
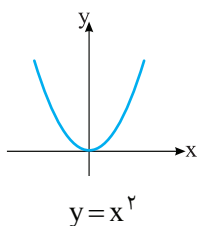


مسئله ۲

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 6x + 10$ را رسم کنید.

راه حل

توجه کنید که $f(x) = (x+3)^2 + 1$. بنابراین، ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم کرده، سپس آن را ۳ واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل می کنیم.

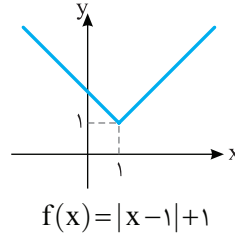
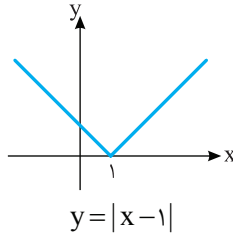
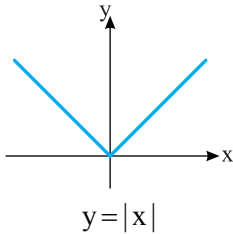


مسئله ۳

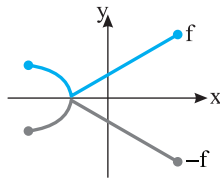
نمودار تابع $f(x) = |x-1| + 1$ را رسم کنید.

راه حل

ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = |x-1|$ به دست بیاید و در نهایت این نمودار را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.

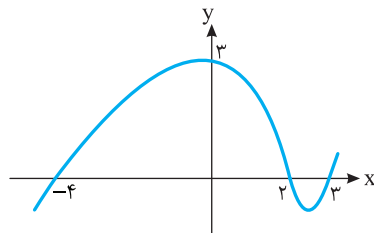
رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ نسبت به محور x است. بنابراین نقطه $(x_0, -y_0)$ از نمودار تابع $y = -f(x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y = f(x)$ است.



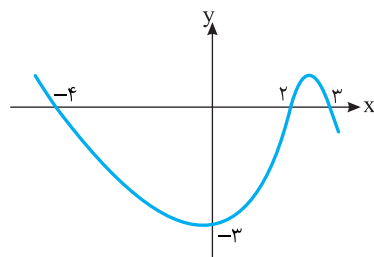
مسئله ۴

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(x)$ را رسم کنید.



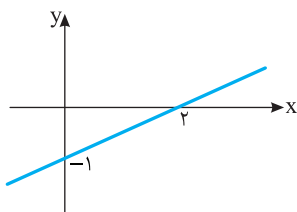
راه حل

باید قرینه نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست بیاید.



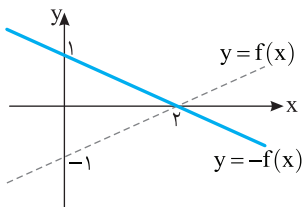
مسئله ۵

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x)$ را رسم کنید.

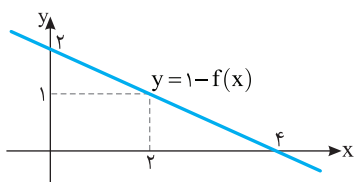


راه حل

ابتدا نمودار داده شده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به دست بیاید.

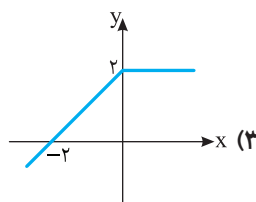
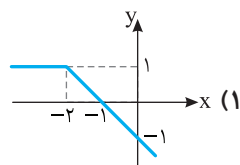
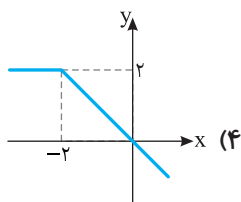
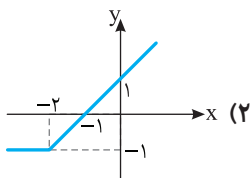
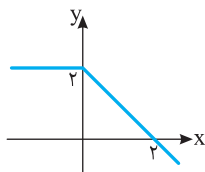


سپس، نمودار به دست آمده را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(x)$ به دست بیاید.



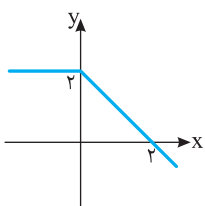
تست ۱

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ کدام است؟

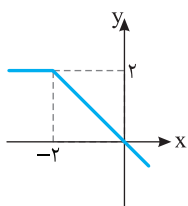


راه حل

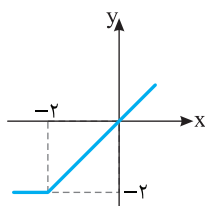
ابتدا نمودار $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+2)$ به دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x+2)$ به دست بیاید. در آخر، این نمودار را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=1-f(x+2)$ به دست بیاید.



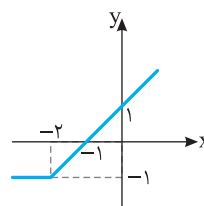
$y=f(x)$



$y=f(x+2)$



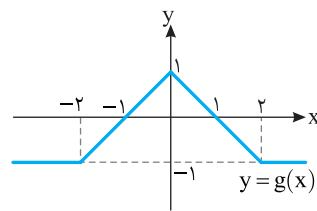
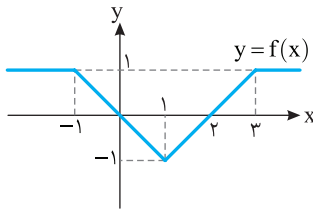
$y=-f(x+2)$



$y=1-f(x+2)$

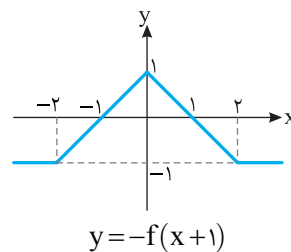
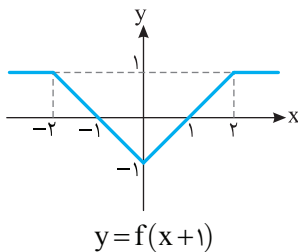
تست

نمودار تابع‌های f و g در شکل‌های زیر رسم شده است. تابع g کدام تابع است؟



(۴) $y = -f(x) - 1$ (۳) $y = -f(x-1)$ (۲) $y = -f(x) + 1$ (۱) $y = -f(x+1)$

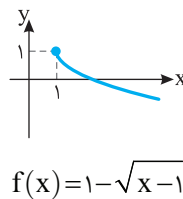
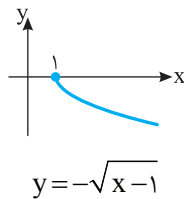
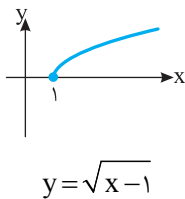
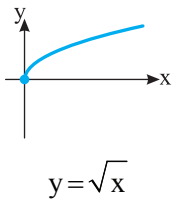
ابتدا توجه کنید که اگر نمودار تابع f را ۱ واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x+1)$ به دست می‌آید. اکنون اگر قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم، نمودار تابع g به دست می‌آید. بنابراین $g(x) = -f(x+1)$.



مسئله ۶

نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$ را رسم کنید.

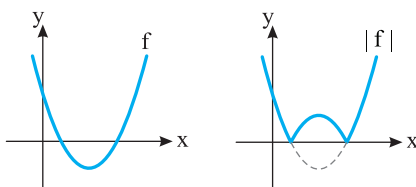
ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ به دست آید. نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -\sqrt{x-1}$ به دست آید. اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.

رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

توجه کنید که

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

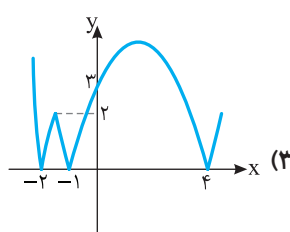
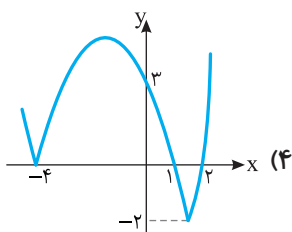
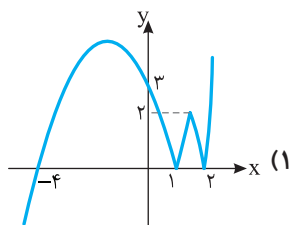
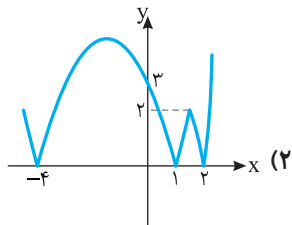
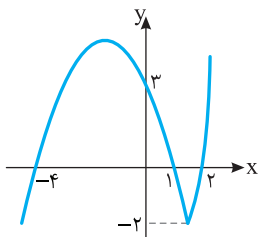
بنابراین نمودار تابع $|f|$ به ازای x ‌هایی که $f(x) \geq 0$ همان نمودار تابع f است و به ازای x ‌هایی که $f(x) < 0$ ، قرینه نمودار تابع f نسبت به محور x است.



برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ از روی نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ ، قرینه قسمت‌هایی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و این قسمت‌ها را حذف می‌کنیم.

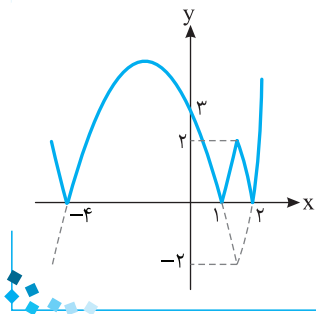
تست ۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(x)|$ کدام است؟



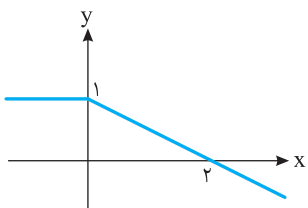
راه حل

باید قرینه قسمتی از نمودار f را که زیر محور x است رسم کنیم، سپس این قسمت را حذف کنیم. به این ترتیب نمودار گزینه (۲) به دست می آید.



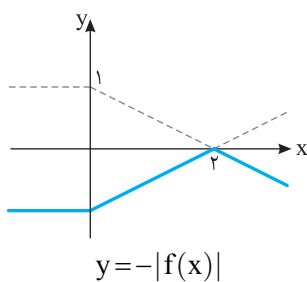
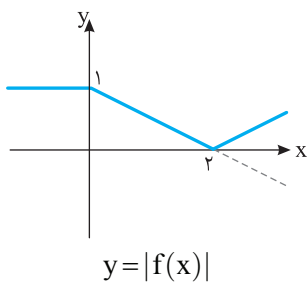
مسئله ۷

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -|f(x)|$ را رسم کنید.



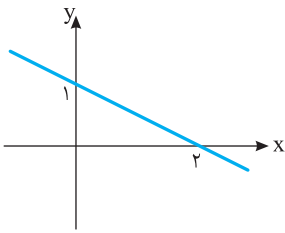
راه حل

ابتدا قرینه قسمتی از نمودار را که زیر محور x است رسم می کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم تا نمودار تابع $y = |f(x)|$ به دست بیاید. سپس قرینه نمودار به دست آمده را نسبت به محور x رسم می کنیم تا نمودار تابع $y = -|f(x)|$ به دست بیاید.



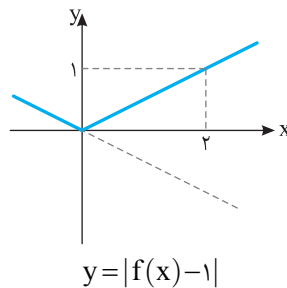
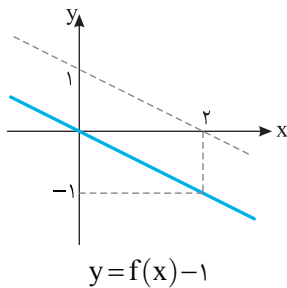
مسئله ۸

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y = |1 - f(x)|$ را رسم کنید.



راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $y = |1 - f(x)| = |f(x) - 1|$. بنابراین ابتدا نمودار $y = f(x) - 1$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینه قسمتی از آن را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

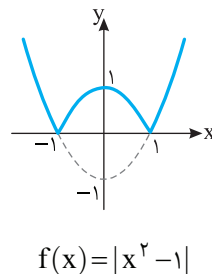
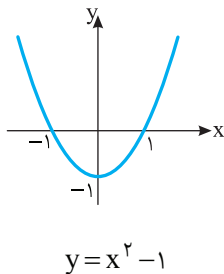


مسئله ۹

نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را رسم کنید.

راه‌حل

ابتدا نمودار $y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه قسمتی از آن را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.

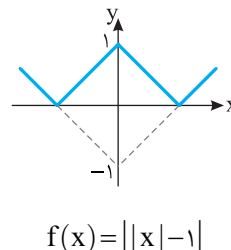
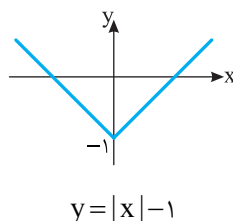
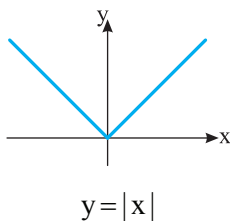


مسئله ۱۰

نمودار تابع $f(x) = ||x| - 1|$ را رسم کنید.

راه‌حل

ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم می‌کنیم، بعد ۱ واحد آن را پایین می‌آوریم تا نمودار $y = |x| - 1$ به‌دست بیاید. سپس قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.

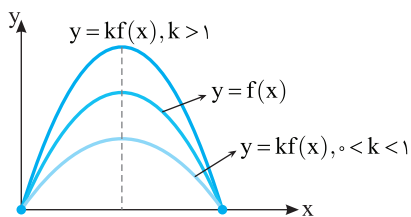


رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

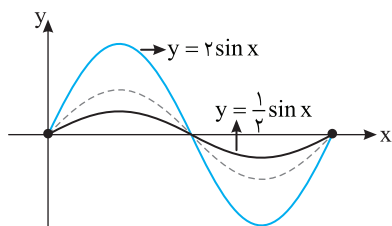
اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار تابع $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ ، نمودار تابع $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y = |k|f(x)$ را رسم کنیم، سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم.

دامنه تابع $y = kf(x)$ همان دامنه تابع f است ولی هر مقدار در برد تابع $y = kf(x)$ ، k برابر مقدار متناظرش در برد تابع f است.

نقطه (x_0, ky_0) از نمودار تابع $y = kf(x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y = f(x)$ است.



مثال: نمودار تابع‌های $y = \frac{1}{2} \sin x$ و $y = 2 \sin x$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم کرده‌ایم.



تست ۴

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y = -2f(x)$ کدام است؟

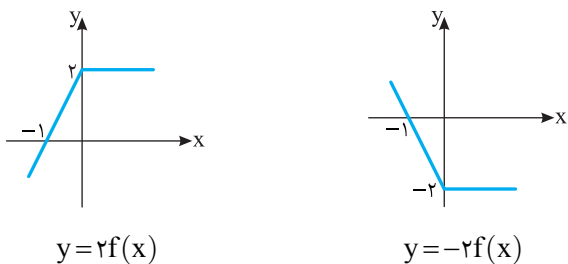
(۱)

(۲)

(۳)

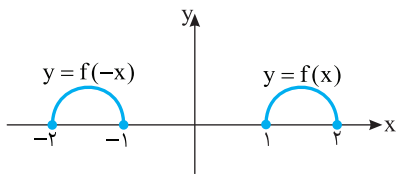
(۴)

ابتدا نمودار تابع $y = 2f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را ۲ برابر می‌کنیم. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -2f(x)$ به دست بیاید.



راه‌حل

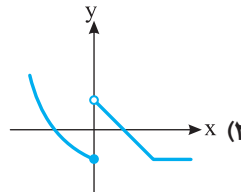
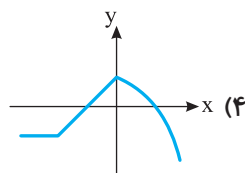
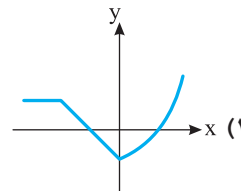
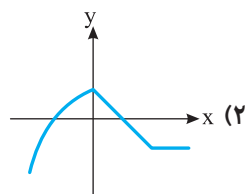
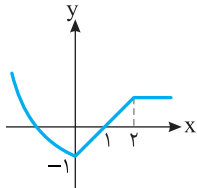
رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$



نمودار تابع با ضابطه $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ نسبت به محور y است. بنابراین نقطه $(-x_0, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(-x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

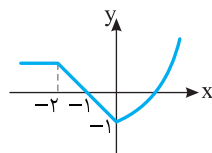
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟

تست



برای اینکه نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم کنیم، باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم.

راه حل

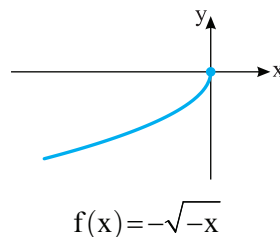
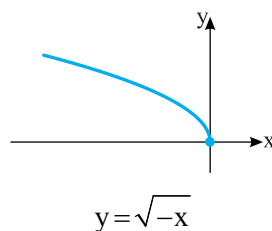
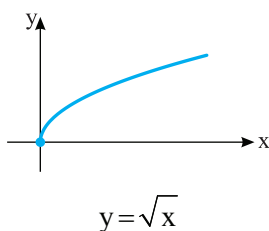


توضیح دهید نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{-x}$ چگونه از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست می آید.

مسئله ۱۱

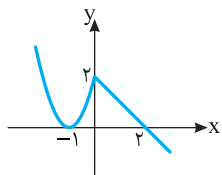
ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می کنیم، سپس قرینه آن را نسبت به محور y رسم می کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به دست بیاید و در نهایت این نمودار را نسبت به محور x قرینه می کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{-x}$ به دست بیاید.

راه حل

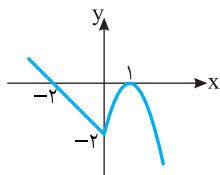


تست ۶

شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

(۱) $y = f(-x)$

(۲) $y = -f(-x)$

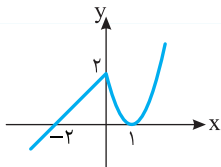
(۳) $y = |f(x)|$

(۴) $y = -f(x)$

راه حل

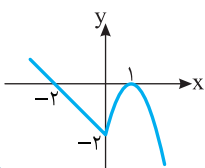
برای اینکه نمودار تابع $y = f(-x)$ را به دست بیاوریم باید نمودار تابع f را

نسبت به محور y قرینه کنیم، که می شود:



اکنون اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع

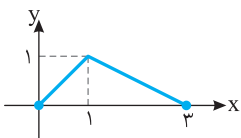
$y = -f(-x)$ به دست می آید، که می شود:



مسئله ۱۲

اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x) = f(-x+1)$ را

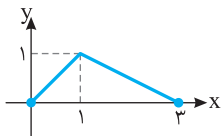
رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



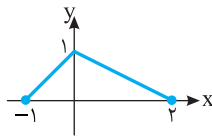
راه حل

برای رسم نمودار تابع g ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می کنیم، سپس قرینه آن را

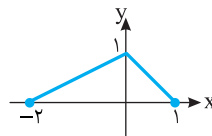
نسبت به محور y رسم می کنیم.



$y = f(x)$



$y = f(x+1)$



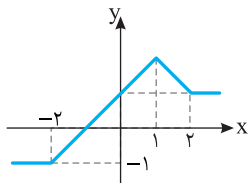
$g(x) = f(-x+1)$

با توجه به نمودار تابع g دامنه و برد آن به صورت زیر مشخص می شوند:

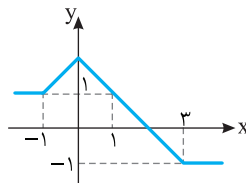
$D_g = [-2, 1], \quad R_g = [0, 1]$

تست ۷

شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

(۲) $y = f(-x-1)$

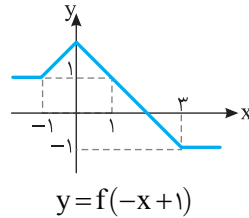
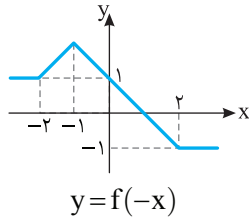
(۱) $y = -f(x+1)$

(۴) $y = f(-x+1)$

(۳) $y = -f(-x+1)$

راه حل

اگر قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))=f(-x+1)$ به دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.

رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

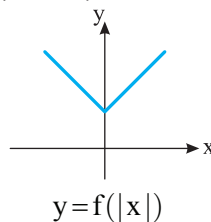
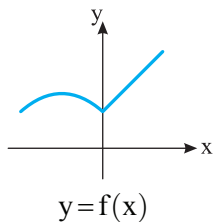
توجه کنید که

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

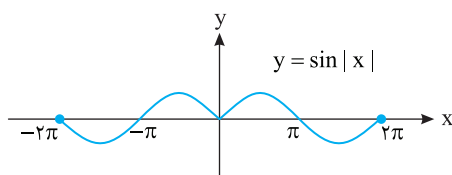
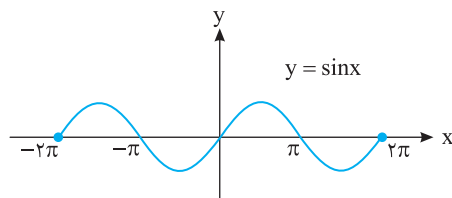
بنابراین نمودار تابع با ضابطه زیر

$$y=f(|x|)$$

به ازای $x \geq 0$ همان نمودار تابع f است و به ازای $x < 0$ قرینه قسمتی از نمودار f است که سمت راست محور y است. برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=f(|x|)$ از روی نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ ، قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

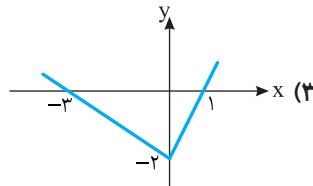
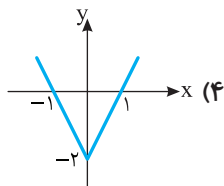
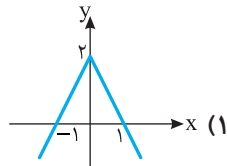
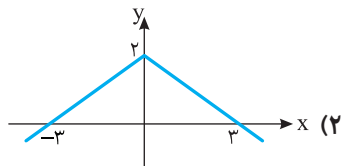
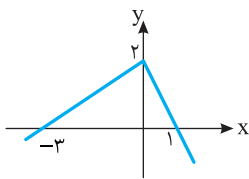


مثال: در شکل زیر نمودار تابع $y=\sin|x|$ را روی بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کرده‌ایم.



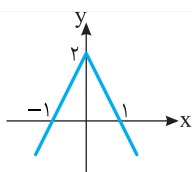
تست ۸

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام گزینه است؟



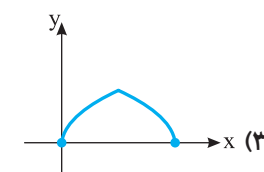
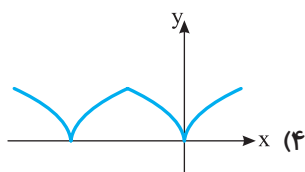
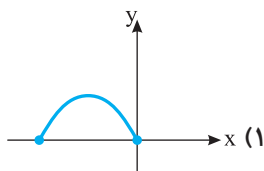
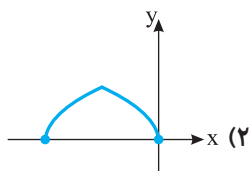
راه حل

برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه‌ی قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



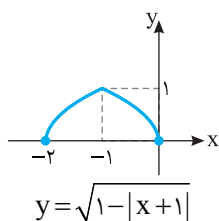
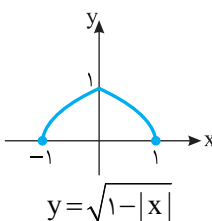
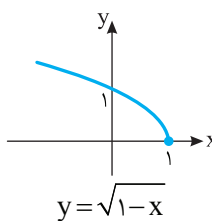
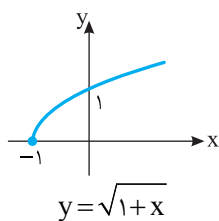
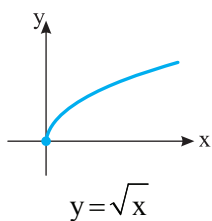
تست ۹

نمودار تابع $f(x)=\sqrt{1-|x+1|}$ کدام است؟

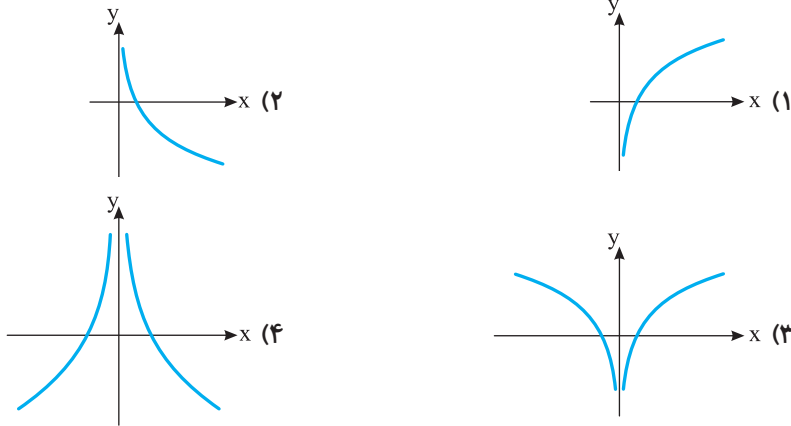


راه حل

مراحل رسم نمودار به شکل زیر است:

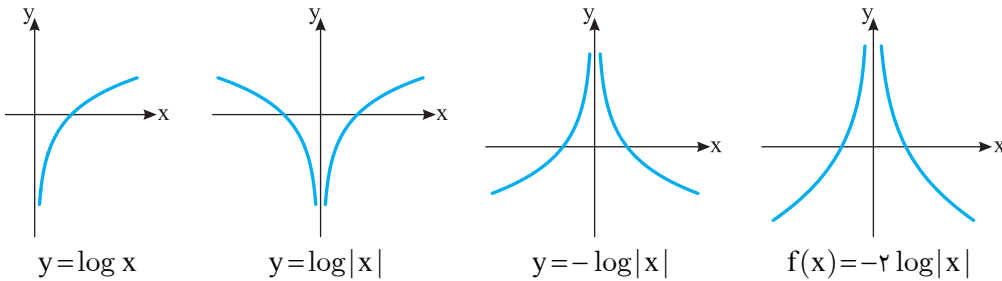


تست ۱۰

 نمودار تابع $f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right)$ کدام است؟

 توجه کنید که **راه حل**

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = \log\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = \log|x|^{-2} = -2 \log|x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است به این نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log|x|$ به دست بیاید (توجه کنید که هیچ قسمتی از نمودار تابع $y = \log x$ سمت چپ محور y نیست). اکنون این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -\log|x|$ به دست بیاید. در آخر عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.

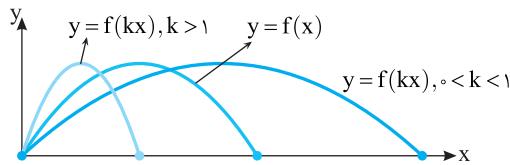

رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ کافی است طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

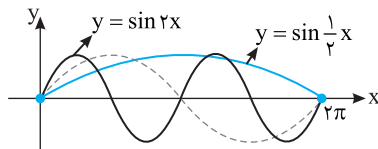
اگر k عددی مثبت باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ را می‌توان از روی نمودار تابع $y = f(x)$ با انبساط یا انقباض در امتداد محور x رسم کرد. اگر $0 < k < 1$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ باید با ضریب $\frac{1}{k}$ در امتداد محور x منبسط شود و اگر $k > 1$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ باید با ضریب $\frac{1}{k}$ در امتداد محور x منقبض شود.

اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ کافی است نمودار تابع $y = f(|k|x)$ را رسم کنیم، سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور y رسم کنیم.

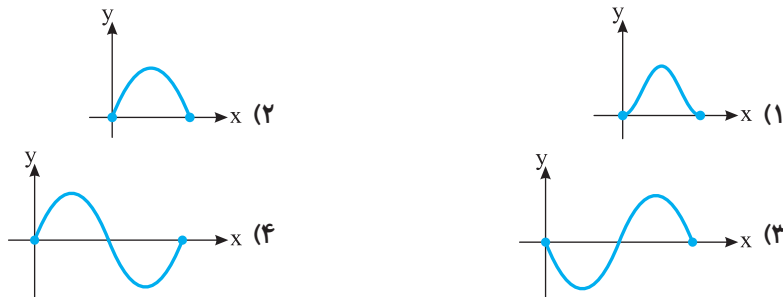
برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع f است ولی هر عضو دامنه تابع $y=f(kx)$ برابر عضو نظیرش در دامنه تابع f است. نقطه $(\frac{x_0}{k}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(kx)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.



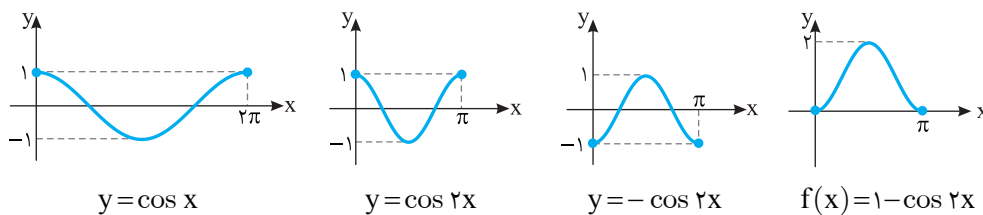
مثال: در شکل زیر نمودار تابع‌های $y=\sin 2x$ و $y=\sin \frac{1}{2}x$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ رسم کرده‌ایم.

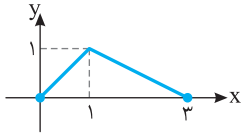


تست ۱۱ نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=1-\cos 2x$ و دامنه $[0, \pi]$ کدام است؟



راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\cos 2x$ را روی بازه $[0, \pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار باید طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. توجه کنید که باید $0 \leq \frac{1}{2}x \leq \pi$ ، یعنی $0 \leq x \leq 2\pi$. در نتیجه باید نمودار تابع $y=\cos x$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنیم، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=\cos 2x$ به دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار تابع $y=\cos x$ در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\cos 2x$ به دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



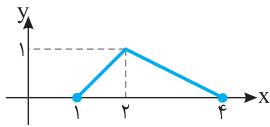


مسئله ۱۳ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x-1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

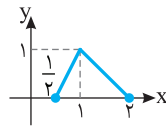
مسئله ۱۳

راه حل ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست آید. سپس طول هر نقطه روی نمودار به دست آمده را نصف می کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.

راه حل



$$y = f(x-1)$$



$$g(x) = f(2x-1)$$

با توجه به نمودار تابع g می توان نوشت $D_g = [\frac{1}{2}, 2]$ و $R_g = [0, 1]$.

مسئله ۱۴ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ می توان نمودار تابع $y = f(-2x+3)$ را رسم نمود.

مسئله ۱۴

راه حل ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را سه واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x+3)$ به دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x+3)$ به دست آید. در نهایت قرینه این نمودار را نسبت به محور y رسم می کنیم تا نمودار تابع $y = f(-2x+3)$ به دست آید.

راه حل

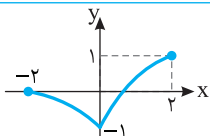
تست ۱۲ طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می کنیم و عرض آنها را دو برابر می کنیم. سپس نمودار را یک واحد به چپ می بریم و در آخر نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

تست ۱۲

$$y = \frac{1}{2}f(1-2x) \quad (۴) \quad y = \frac{1}{2}f(2x+2) \quad (۳) \quad y = 2f(1-\frac{x}{2}) \quad (۲) \quad y = 2f(2-2x) \quad (۱)$$

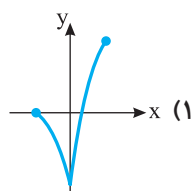
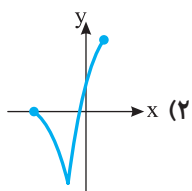
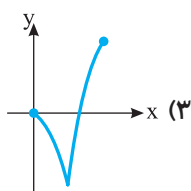
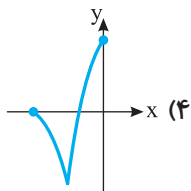
راه حل اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y = f(2x)$ رسم می شود و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(2x)$ رسم می شود. اگر نمودار اخیر را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 2f(2(x+1))$ رسم می شود. پس اکنون نمودار تابع $y = 2f(2x+2)$ به دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = 2f(-2x+2)$ به دست می آید.

راه حل



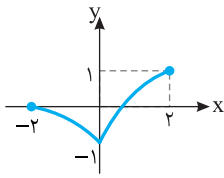
تست ۱۳ نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(x-1)$ کدام است؟

تست ۱۳

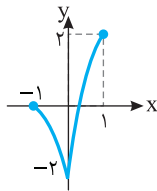


راه حل

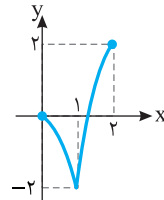
اگر طول نقاط نمودار تابع $y = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ را نصف و عرض آنها را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = f(x)$ به دست می‌آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست می‌آید.



$$y = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

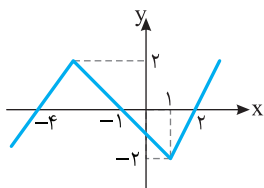


$$y = f(x)$$

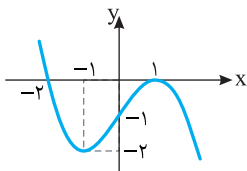


$$y = f(x-1)$$

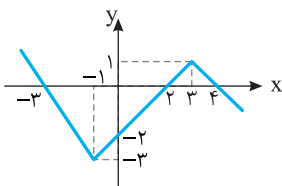
تمرین



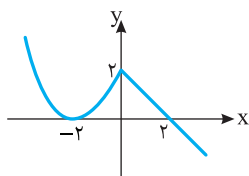
۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = -f(x)$ را رسم کنید.



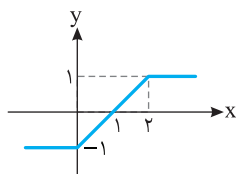
۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = -f(x) + |f(x)|$ را رسم کنید.



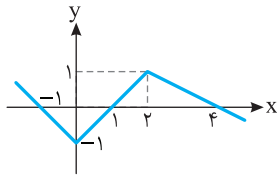
۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = -f(-x)$ را رسم کنید.



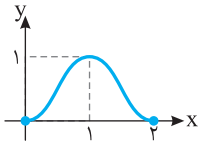
۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(-x-1)$ را رسم کنید.



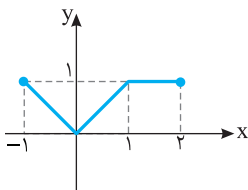
۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -f(x) & x < 1 \\ f(-x) & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.



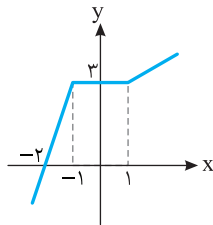
۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.



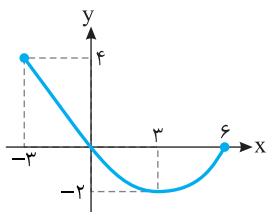
۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(-2x)$ را رسم کنید.



۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(-2x - 1)$ را رسم کنید.



۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنید.



۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = |f(|x| - 1)|$ را رسم کنید.

۱۱- اگر تغییرات زیر را روی نمودار تابع f اعمال کنیم، ضابطه تابعی که نمودار آن به دست می آید چگونه خواهد بود؟

الف) نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می کنیم.

ب) نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را نصف می کنیم.

پ) نمودار تابع f را یک واحد به بالا منتقل می کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را دو برابر می کنیم.

۱۲- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم، سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه

می کنیم و بعد آن را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را دو برابر

می کنیم. ضابطه تابعی را که نمودار آن رسم شده است به دست آورید.

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. (۱۹-۱۳)

$$f(x) = |\log(1-x)| \quad -14$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad -13$$

$$f(x) = \sqrt{|2x-1|} \quad -16$$

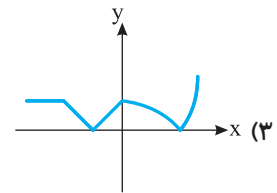
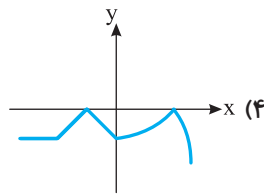
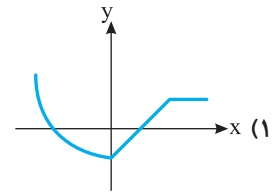
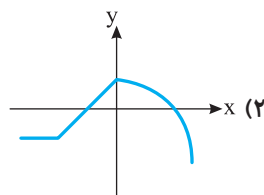
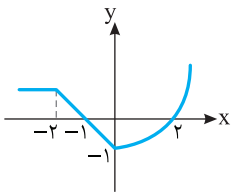
$$f(x) = \sqrt{x+|x|+1} \quad -15$$

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \quad D_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad -18$$

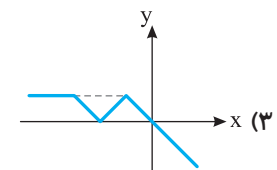
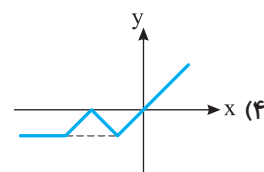
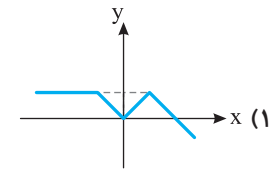
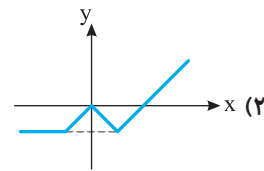
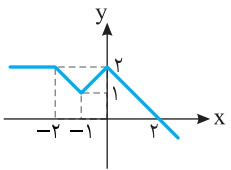
$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \quad D_f = [-\pi, \pi] \quad -17$$

$$f(x) = |x^2 - 2|x|| \quad -19$$

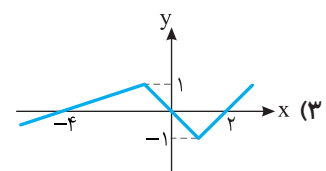
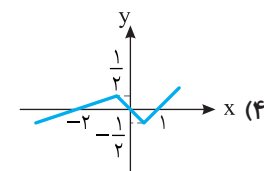
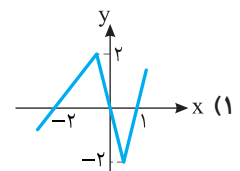
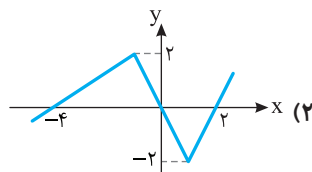
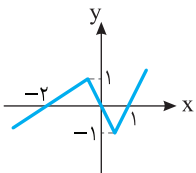
۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(x)$ کدام است؟



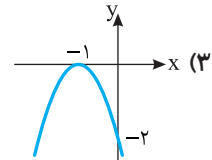
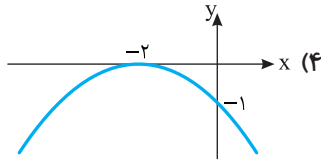
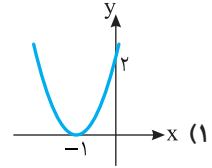
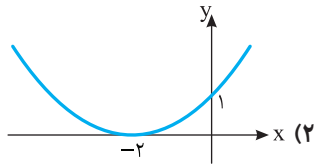
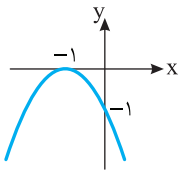
۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x-1)$ کدام است؟



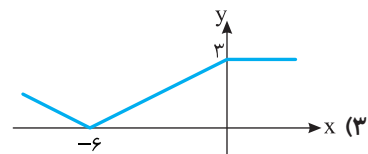
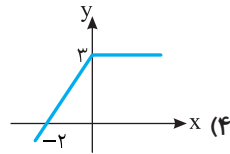
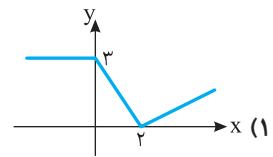
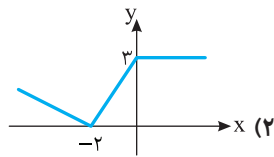
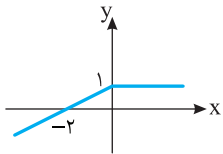
۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = 2f(x)$ کدام است؟



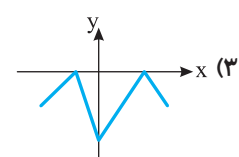
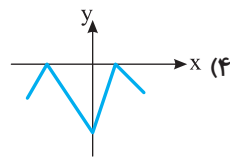
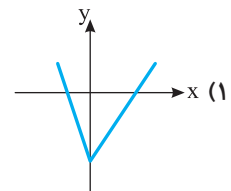
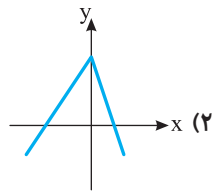
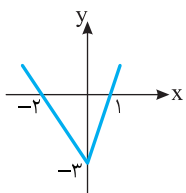
۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(x)| - f(x)$ کدام است؟



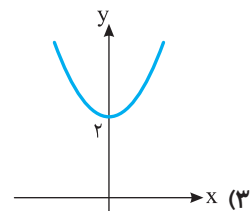
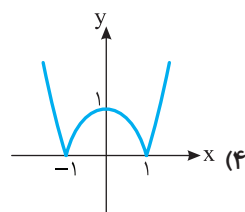
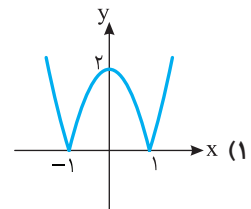
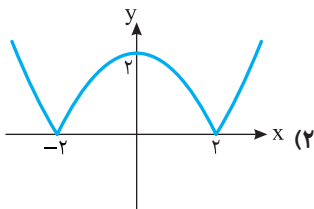
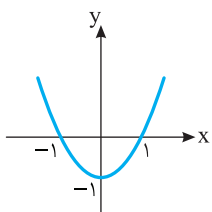
۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2|f(x)| + f(x)$ کدام است؟



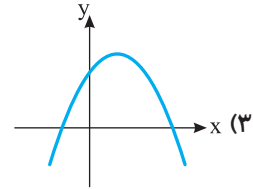
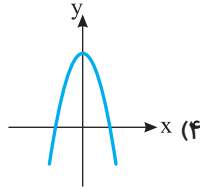
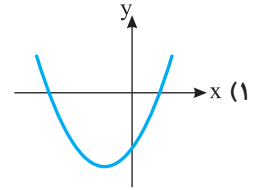
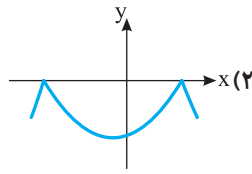
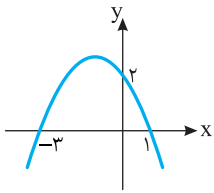
۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -|f(x)|$ کدام است؟



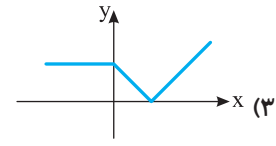
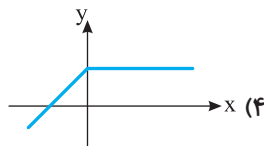
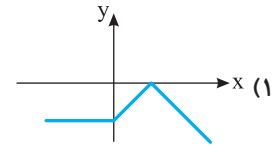
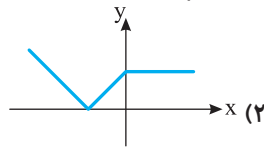
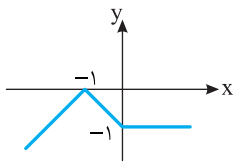
۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = 2|f(x)|$ کدام است؟



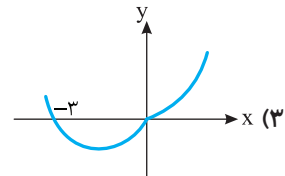
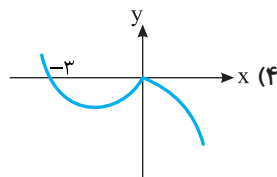
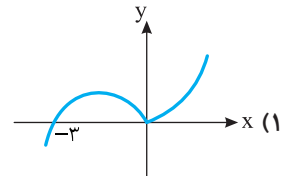
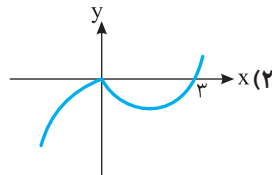
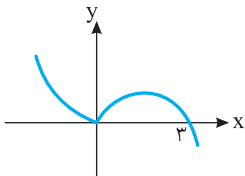
۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



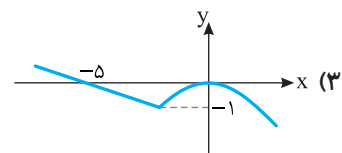
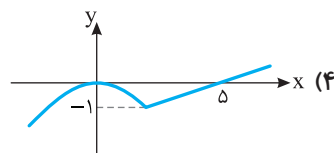
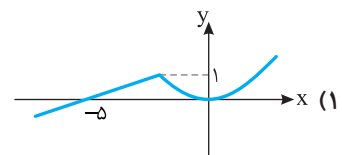
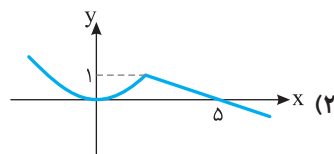
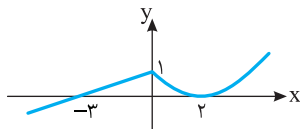
۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



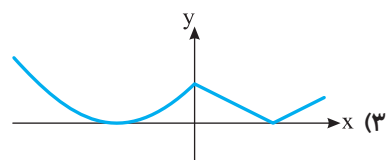
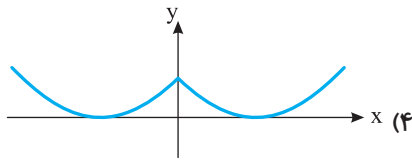
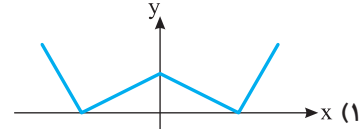
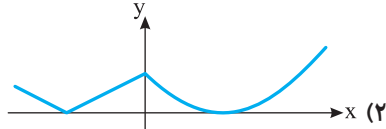
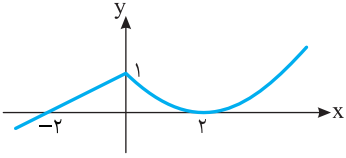
۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(-x)$ کدام است؟



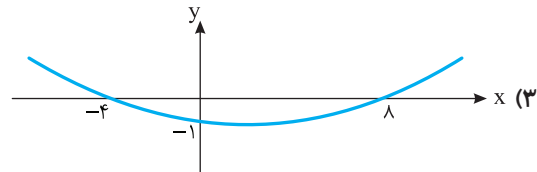
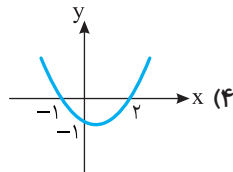
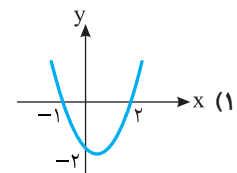
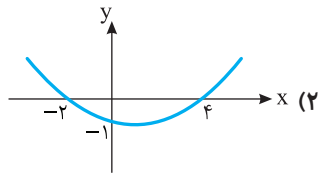
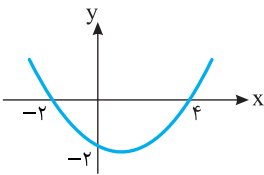
۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x)=f(2-x)$ کدام است؟



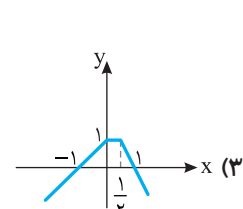
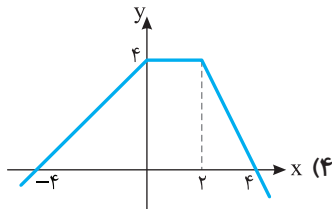
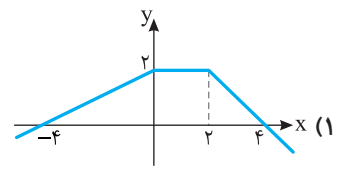
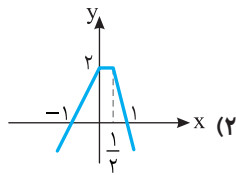
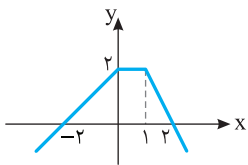
۱۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(-x)|$ کدام است؟



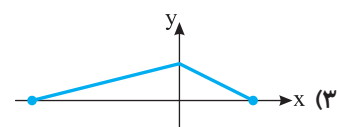
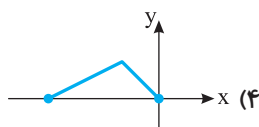
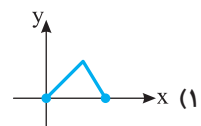
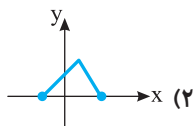
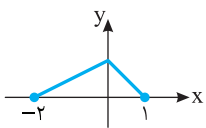
۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(2x)$ کدام گزینه است؟



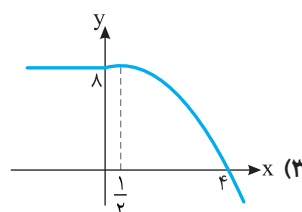
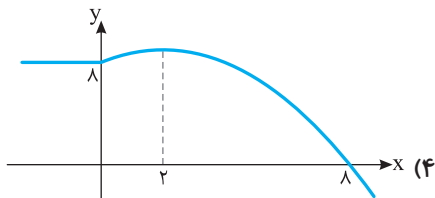
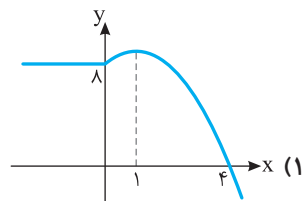
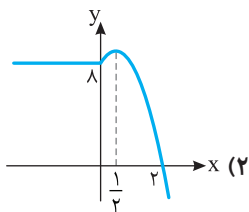
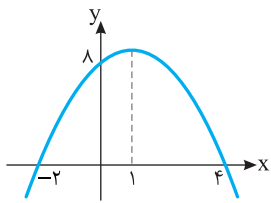
۱۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ کدام است؟



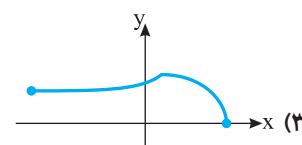
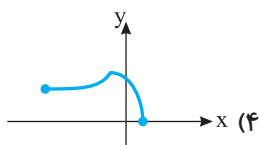
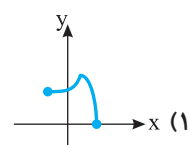
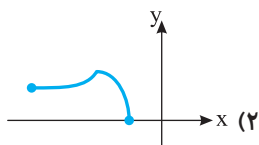
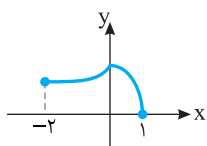
۱۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(2x-1)$ کدام است؟



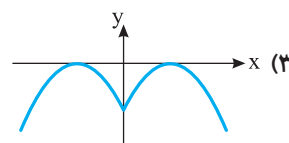
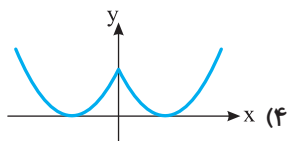
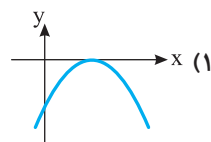
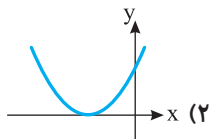
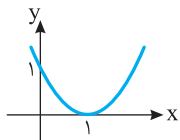
۱۶- شکل مقابل نمودار تابع f است. نمودار تابع $y=f(x+|x|)$ کدام است؟



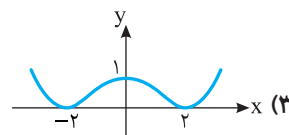
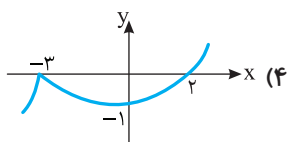
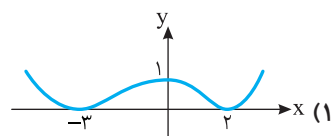
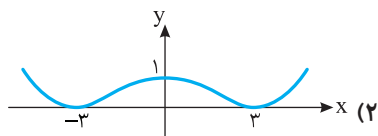
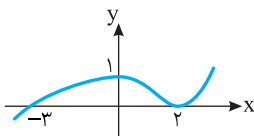
۱۷- نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-\frac{1}{2})$ کدام است؟



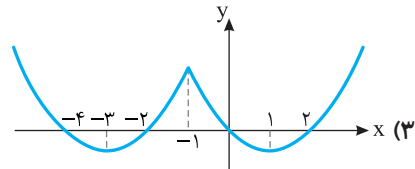
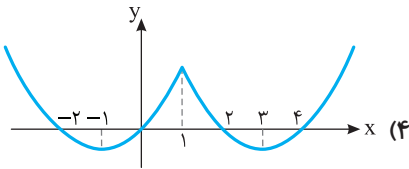
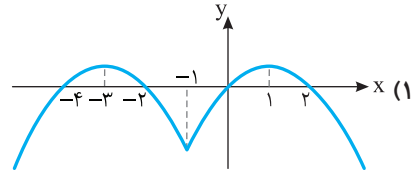
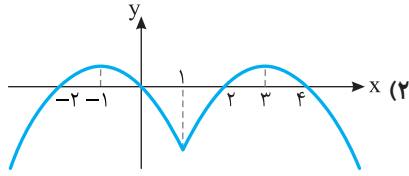
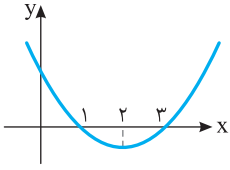
۱۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



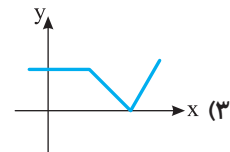
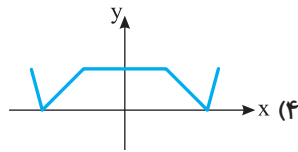
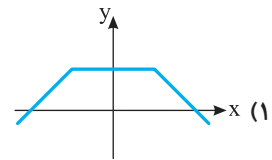
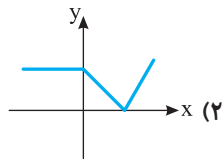
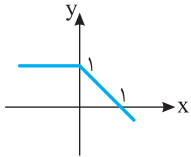
۱۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



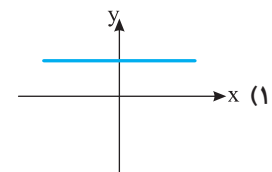
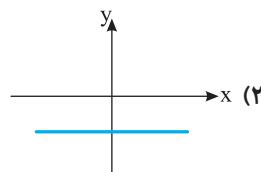
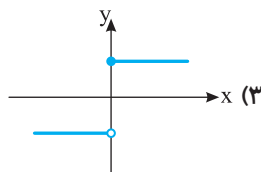
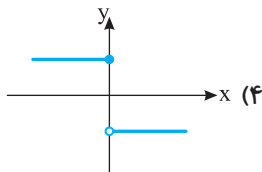
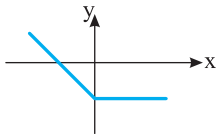
۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ کدام است؟



۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ کدام است؟



۲۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x) = \begin{cases} |f(x)| & x \geq 0 \\ f(|x|) & x < 0 \end{cases}$ نمودار تابع g کدام گزینه است؟



۲۳- نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = -f(x-1) - 1$ (۲) $y = f(1-x) - 1$ (۳) $y = f(1-x) + 1$ (۴) $y = -f(1-x) + 1$

۲۴- اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، سپس عرض نقاط این نمودار را دو برابر و طول نقاط آن را نصف کنیم، نمودار تابع با کدام ضابطه به دست می‌آید؟

(۱) $y = 2f(\frac{x}{2} - 1)$ (۲) $y = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2} - 1)$ (۳) $y = \frac{1}{2}f(2x - 1)$ (۴) $y = 2f(2x - 1)$

۲۵- نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. سپس در نمودار به دست آمده طول و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = 2f(\frac{x}{2} + 1) - 1$ (۲) $y = 2f(\frac{x}{2} + 1) - 2$ (۳) $y = 2f(\frac{x+1}{2}) - 1$ (۴) $y = 2f(\frac{x+1}{2}) - 2$

۲۶- نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x) - 1$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = 2f(4x - 2) - 1$ (۲) $y = 2f(4x - 2) - 2$ (۳) $y = 2f(4x - 1) - 1$ (۴) $y = 2f(4x - 1) - 2$

۲۷- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و مجدداً نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = \sqrt{x+1}$ (۲) $y = \sqrt{x-1}$ (۳) $y = \sqrt{-x-1}$ (۴) $y = \sqrt{-x+1}$

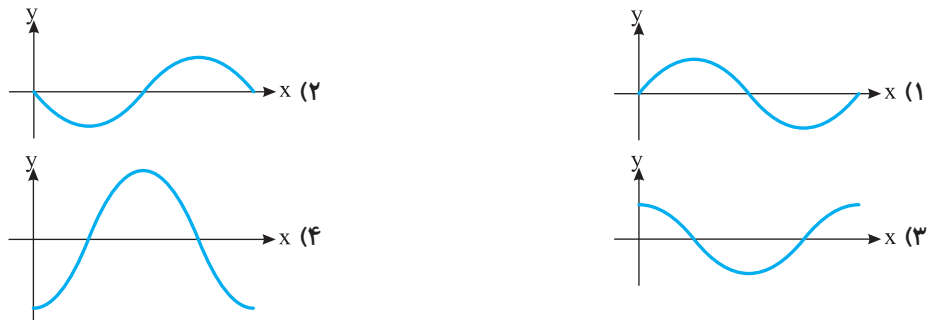
۲۸- طول نقاط نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-1}$ را سه برابر می‌کنیم و عرض نقاط را نصف می‌کنیم. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = 2\sqrt{-3x-2}$ (۲) $y = 2\sqrt{-3x+2}$ (۳) $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{4}{3}}$ (۴) $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}$

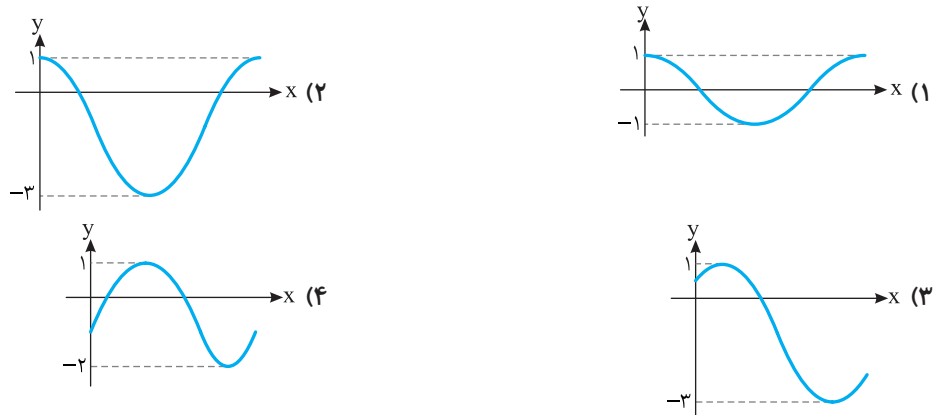
۲۹- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط آن را نصف کرده و مجدداً آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = -\sin(x + \frac{3}{2})$ (۲) $y = -\sin(x - \frac{1}{2})$ (۳) $y = -\sin(\frac{x}{4} - \frac{3}{8})$ (۴) $y = -\sin(\frac{x}{4} + \frac{5}{8})$

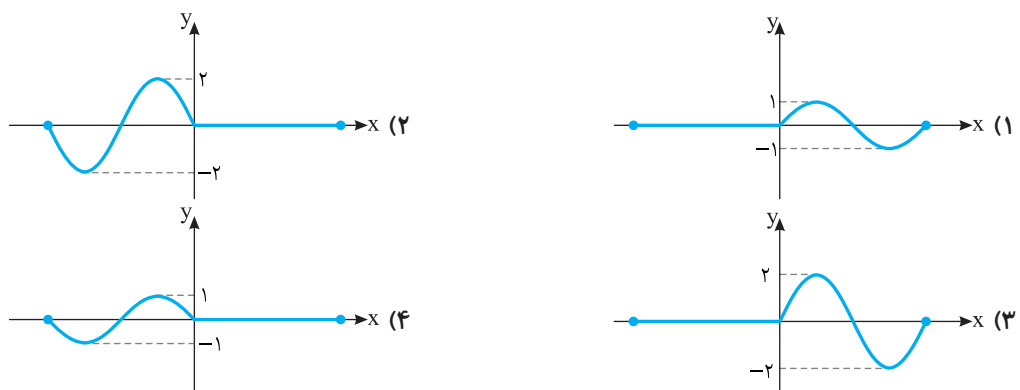
۳۰- بخشی از نمودار تابع $y = -2 \cos x$ کدام است؟



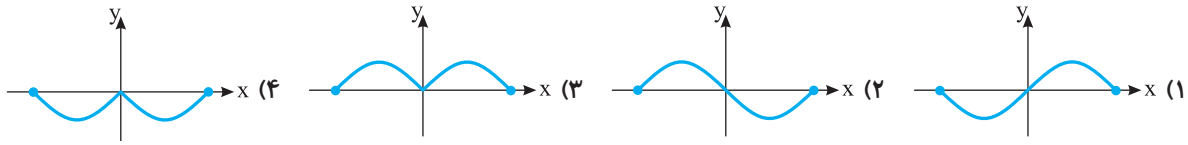
۳۱- بخشی از نمودار تابع $y = 2 \cos x - 1$ کدام است؟



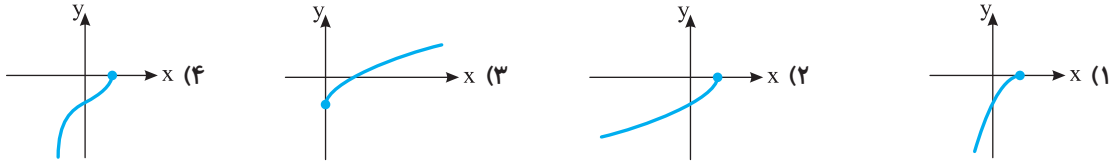
۳۲- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sin|x| + \sin x$ و دامنه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟



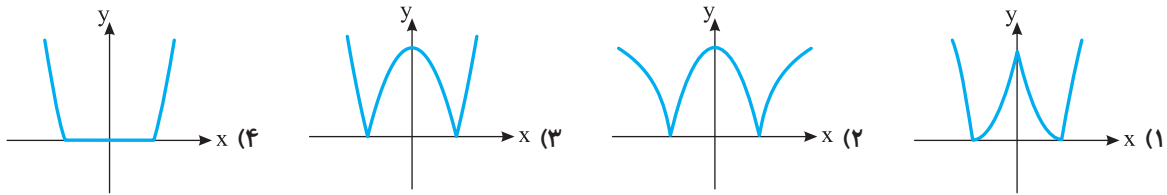
۳۳- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sin|x|$ و دامنه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟



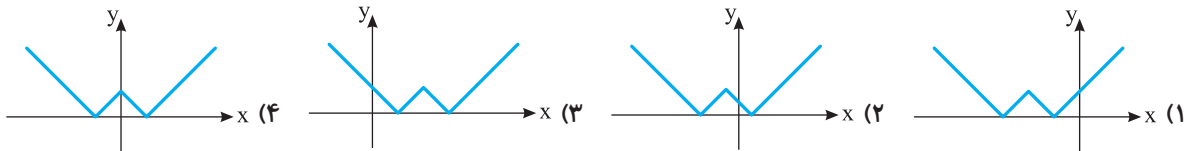
۳۴- نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{1-x}$ کدام است؟



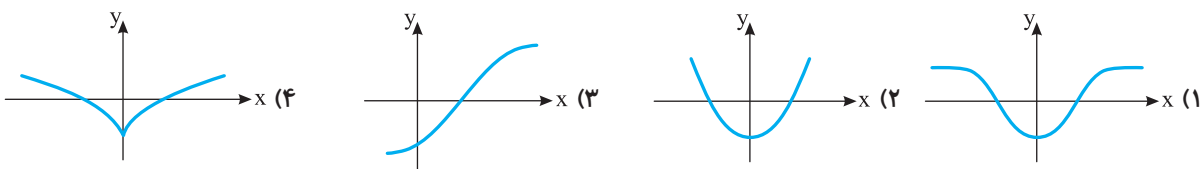
۳۵- نمودار تابع $y = |x-2||x+2|$ کدام گزینه است؟



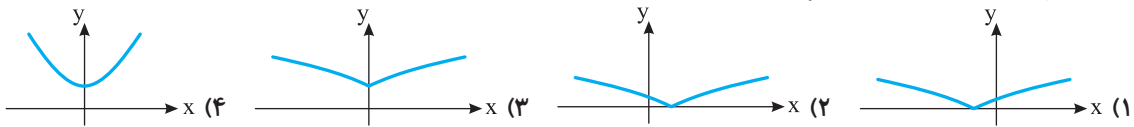
۳۶- نمودار تابع $f(x) = ||x+2|-1|$ کدام است؟



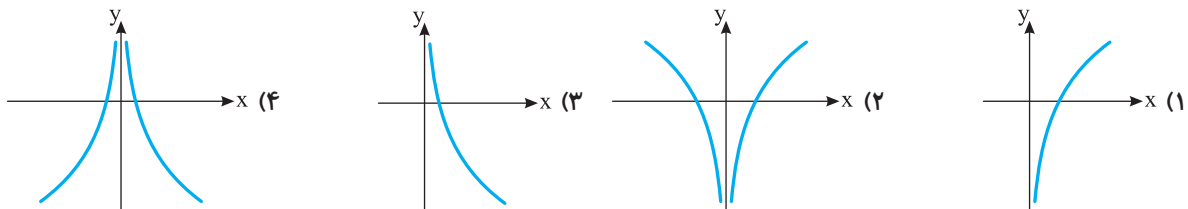
۳۷- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x|-1}$ کدام است؟



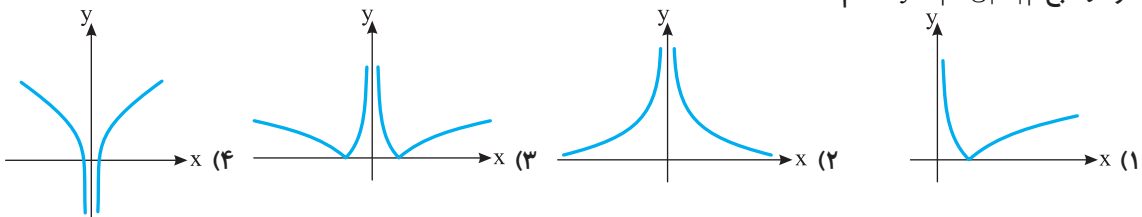
۳۸- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ کدام است؟



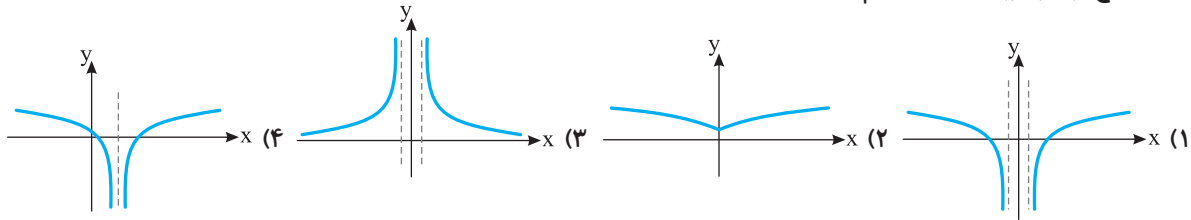
۳۹- نمودار تابع $f(x) = \log x^2$ کدام است؟



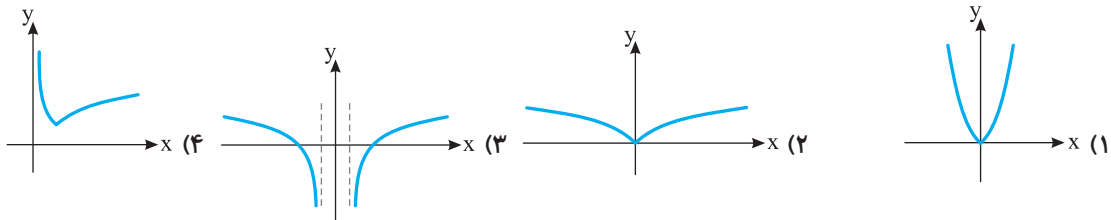
۴۰- نمودار تابع $y = |\log|x||$ کدام است؟



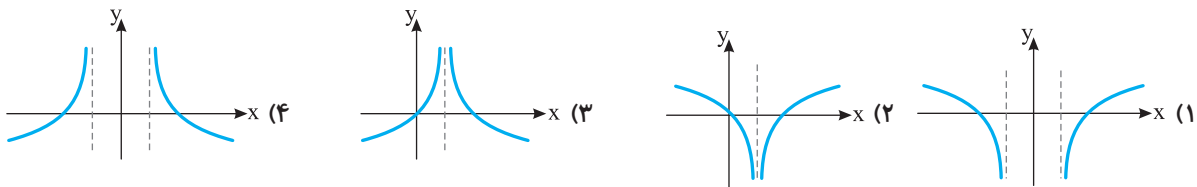
۴۱- نمودار تابع $y = \log(|x|-1)$ کدام است؟



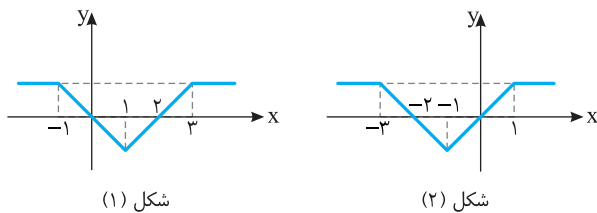
۴۲- نمودار تابع $y = \log(|x|+1)$ کدام است؟



۴۳- نمودار تابع $y = -\log|x-1|$ کدام است؟



۴۴- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



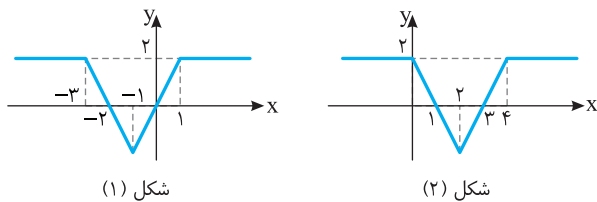
(۱) $y = -f(x)$

(۲) $y = f(-x)$

(۳) $y = -f(-x)$

(۴) $y = f(1-x)$

۴۵- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



(۱) $y = f(-x)$

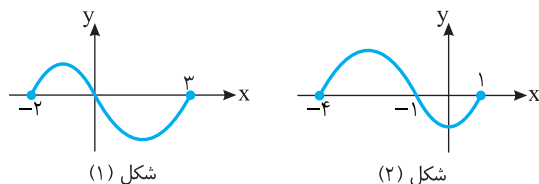
(۲) $y = -f(-x)$

(۳) $y = f(-x-1)$

(۴) $y = f(-x+1)$

۴۶- نمودار تابع f در شکل (۱) رسم شده است. شکل (۲) نمودار

کدام تابع است؟



(۲) $y = -f(-x)$

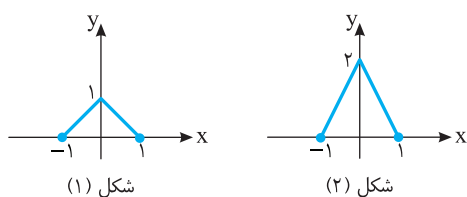
(۱) $y = -f(x-1)$

(۴) $y = f(x-1)$

(۳) $y = -f(-x-1)$

۴۷- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع

به صورت شکل (۲) است؟

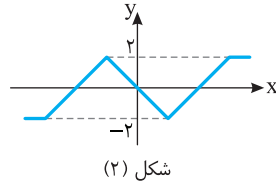
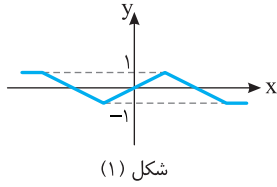


(۲) $y = f(2x)$

(۱) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$

(۴) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(۳) $y = 2f(x)$



۴۸- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = 2f(x)$ (۲) $y = -2f(x)$

(۳) $y = -\frac{1}{2}f(-x)$ (۴) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

ریاضی - ۹۱

۴۹- با کدام ضابطه $f(x)$ ، همواره تساوی $f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟

(۱) $\sin \pi x$ (۲) $\cos \pi x$ (۳) $\sin 2\pi x$ (۴) $\cos 2\pi x$

۵۰- نمودار تابع $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه،

تجربی - ۹۳

با کدام طول متقاطع‌اند؟

(۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) -3 (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) -2

۵۱- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x

خارج از کشور تجربی - ۹۳

غیرمنفی باشد؟

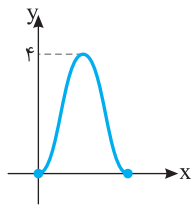
(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل،

خارج از کشور تجربی - ۹۷

نیمساز ناحیه‌های اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) -2 (۲) $\frac{5}{0}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$



ریاضی - ۹۷

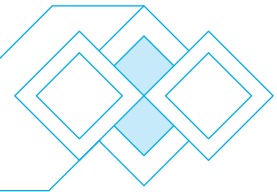
۵۳- شکل مقابل نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ در بازه $[0, 4]$ است. مقدار b کدام است؟

(۱) -2

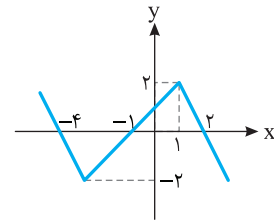
(۲) -1

(۳) ۱

(۴) ۲



۱ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طولها قرینه کنیم.



۲ ابتدا توجه کنید که اگر $f(x) \geq 0$ ، آن گاه

$$|f(x)| = f(x)$$

و در نتیجه

$$g(x) = -f(x) + f(x) = 0$$

و اگر $f(x) \leq 0$ ، آن گاه

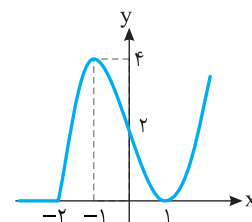
$$|f(x)| = -f(x)$$

و در نتیجه

$$g(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

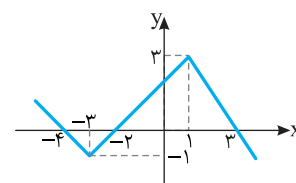
بنابراین در بازه $[-2, +\infty)$ باید نمودار تابع $y = -2f(x)$ را

رسم کنیم و برای $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$ باید نمودار تابع $y = 0$ را رسم کنیم.



$$y = -f(x) + |f(x)|$$

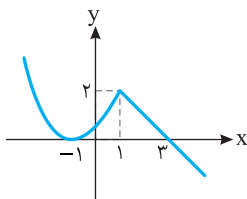
۳ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور عرضها قرینه کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور طولها قرینه کنیم.



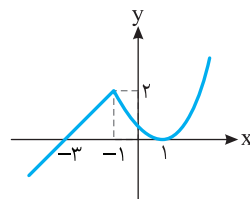
$$y = -f(-x)$$

۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور عرضها قرینه می کنیم تا نمودار تابع زیر به دست آید:

$$y = f(-x-1)$$

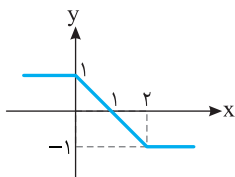


$$y = f(x-1)$$

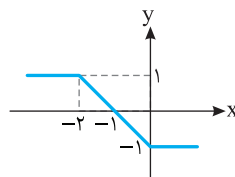


$$y = f(-x-1)$$

۵ ابتدا به نمودار توابع $y = f(-x)$ و $y = -f(x)$ توجه کنید.

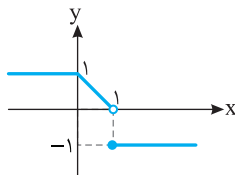


$$y = -f(x)$$

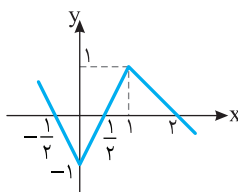


$$y = f(-x)$$

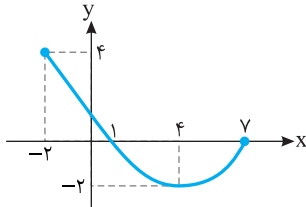
اکنون در بازه $[1, +\infty)$ نمودار تابع $y = f(-x)$ و در بازه $(-\infty, 1)$ نمودار تابع $y = -f(x)$ را رسم می کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.



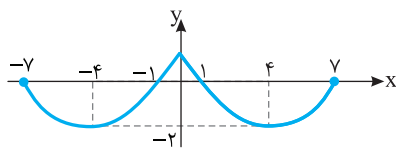
۶ کافی است طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x)$ به دست آید.



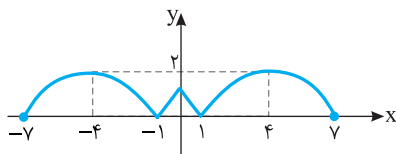
ترتیب نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ به دست می‌آید. در نهایت قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(|x|-1)|$ به دست آید.



$$y = f(x-1)$$



$$y = f(|x|-1)$$



$$y = |f(|x|-1)|$$

۱۱ در هر مورد ضابطه تابع مورد نظر را می‌نویسیم:

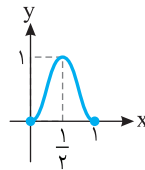
الف) $y = f(-2x)$

ب) $y = \frac{1}{2}f(2x-1)$

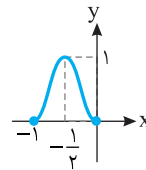
پ) $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$

۱۲ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-x-1}$ به دست می‌آید. اگر نمودار این تابع را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x+1)-1} + 1$ به دست می‌آید. بنابراین تا اینجا نمودار تابع $y = \sqrt{-x-2} + 1$ رسم شده است. اگر در نمودار این تابع طول و عرض نقاط را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2\sqrt{-\left(\frac{x}{2}\right)-2} + 1$ به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت $y = 2\sqrt{-\frac{x}{2}-2} + 2$ است.

۷ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار $y=f(2x)$ به دست آید، سپس این نمودار را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-2x)$ به دست آید.

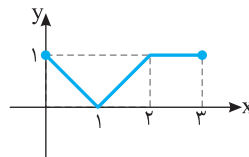


$$y = f(2x)$$

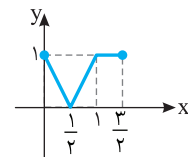


$$y = f(-2x)$$

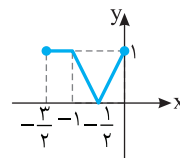
۸ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x-1)$ به دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار $y=f(2x-1)$ به دست آید، در نهایت قرینه این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(-2x-1)$ به دست آید.



$$y = f(x-1)$$

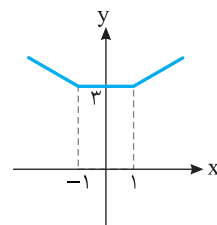


$$y = f(2x-1)$$



$$y = f(-2x-1)$$

۹ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و به جای آن قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

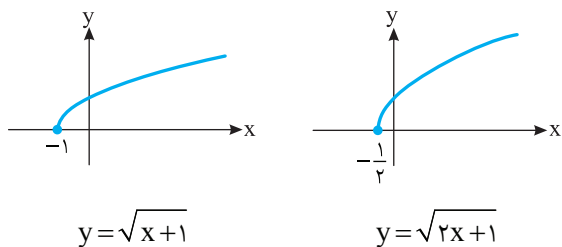


۱۰ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینه قسمتی که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم. بدین

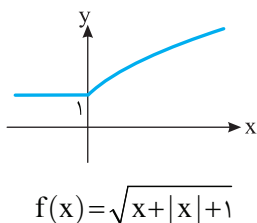
۱۵ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+x+1} & x \geq 0 \\ \sqrt{x-x+1} & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & x \geq 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{2x+1}$ را به این ترتیب رسم می‌کنیم: نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می‌کنیم.

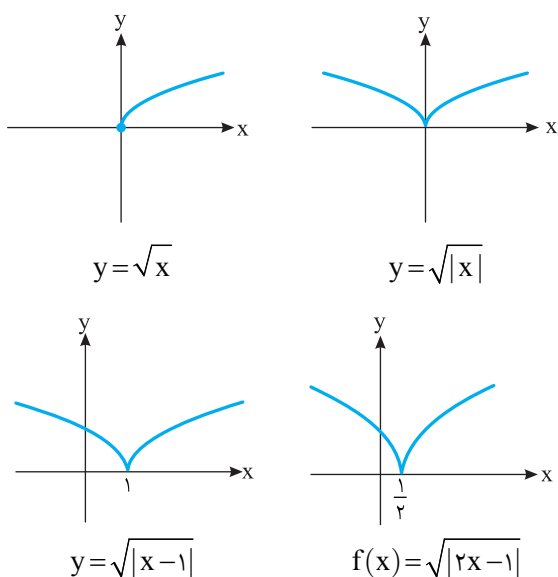


اکنون نمودار تابع f را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



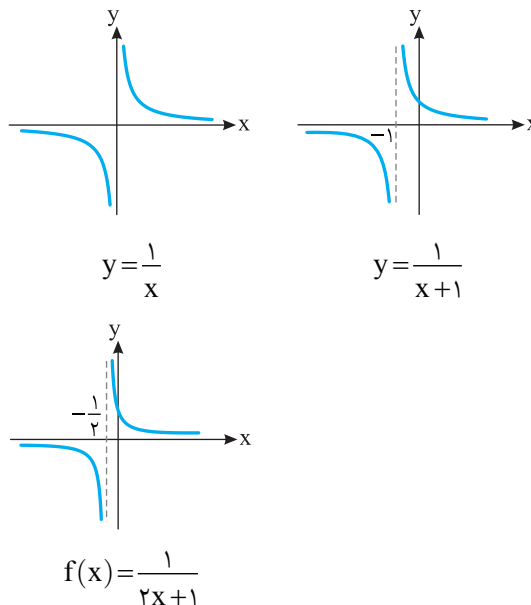
۱۶ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس

قرینه آن نمودار نسبت به محور عرض‌ها را نیز به آن اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{|x|}$ به دست آید. اکنون نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{|x-1|}$ به دست آید. در آخر طول نقاط روی نمودار به دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|2x-1|}$ به دست آید.



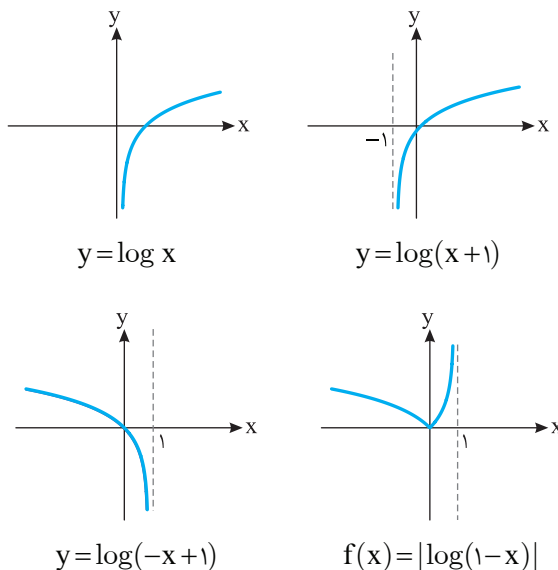
۱۳ ابتدا نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک

واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ به دست آید. اکنون طول نقاط نمودار به دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ به دست آید.



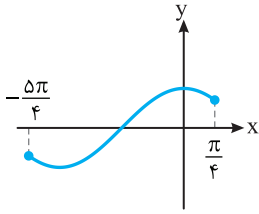
۱۴ ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و آن را

یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log(x+1)$ به دست آید. اکنون این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log(-x+1)$ به دست آید. در نمودار به دست آمده، قسمتی را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = |\log(1-x)|$ به دست آید.

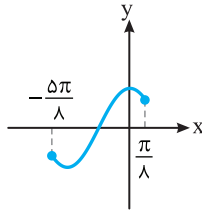


نمودار تابع زیر در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ به دست آید:

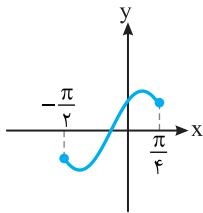
$$f(x) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$



$$y = \cos x$$



$$y = \cos 2x$$



$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

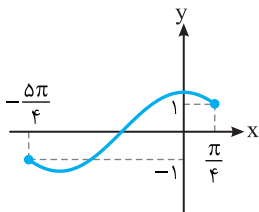
راه حل دوم ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

رسم می کنیم. سپس نمودار را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل

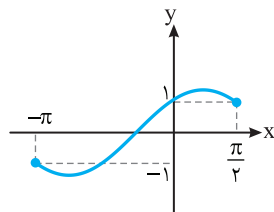
می کنیم تا نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[-\pi, \frac{\pi}{4}]$ به دست

آید. اکنون طول نقاط این نمودار را نصف می کنیم تا نمودار تابع

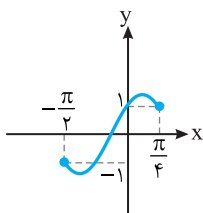
$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ به دست آید.



$$y = \cos x$$



$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ابتدا توجه کنید که **۱۷**

$$-\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

پس نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم.

سپس طول نقاط این نمودار را دو برابر می کنیم تا نمودار تابع

$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آید. اگر عرض نقاط

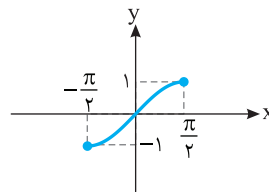
این نمودار را دو برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طولها

قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست می آید.

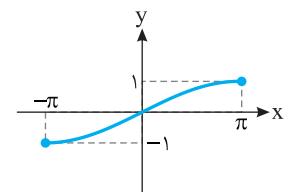
اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار

تابع زیر به دست آید:

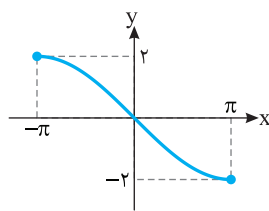
$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$



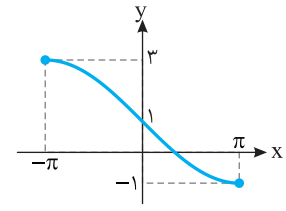
$$y = \sin x$$



$$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$



$$y = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$



$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

ابتدا توجه کنید که **۱۸**

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

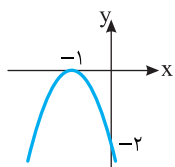
راه حل اول ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

رسم می کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف می کنیم تا

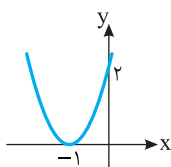
نمودار تابع $y = \cos 2x$ در بازه $[-\frac{5\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ به دست آید.

اکنون این نمودار را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا

به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -2f(x)$ به دست بیاید.



$$y = 2f(x)$$



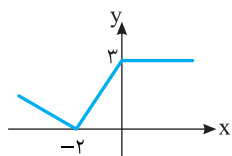
$$y = -2f(x)$$

۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) + f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) + f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

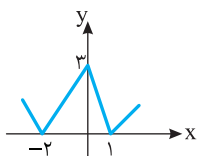
بنابراین، در جاهایی که مقادیر f نامنفی‌اند باید نمودار تابع $y = 3f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که مقادیر f منفی‌اند باید نمودار تابع $y = -f(x)$ را رسم کنیم.



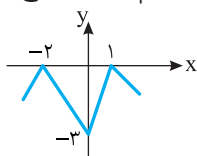
$$y = 2|f(x)| + f(x)$$

۶- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع $y = |f(x)|$ را رسم می‌کنیم.

برای این کار، قرینه قسمتی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. اکنون، اگر نمودار تابع $|f|$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -|f(x)|$ به دست می‌آید.

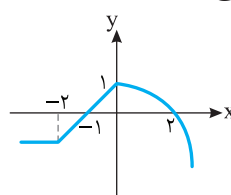


$$y = |f(x)|$$

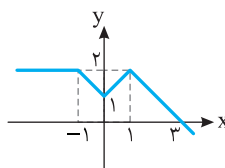


$$y = -|f(x)|$$

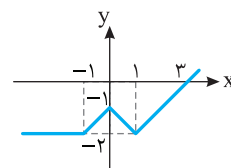
۱- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.



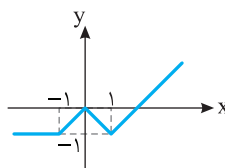
۲- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست بیاید. اکنون قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x-1)$ به دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 1 - f(x-1)$ به دست بیاید.



$$y = f(x-1)$$

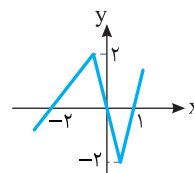


$$y = -f(x-1)$$



$$y = 1 - f(x-1)$$

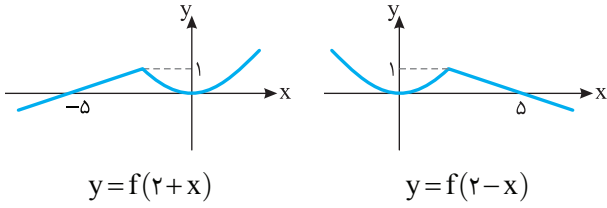
۳- گزینه ۱ باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = 2f(x)$ به دست بیاید.



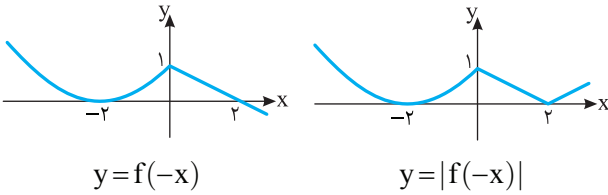
۴- گزینه ۱ توجه کنید که همواره $f(x) \leq 0$. بنابراین

$$y = |f(x)| - f(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

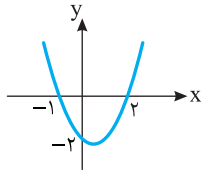
برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ ، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2f(x)$



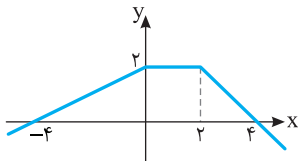
۱۲- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم نمودار تابع $y = |f(-x)|$ ، قرینه قسمتی از نمودار تابع $y = f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



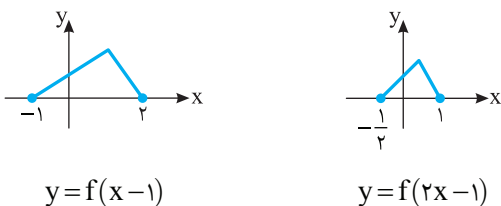
۱۳- گزینه ۱ باید طول هر نقطه روی نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x)$ به دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار در امتداد محور طولها منقبض می‌شود.



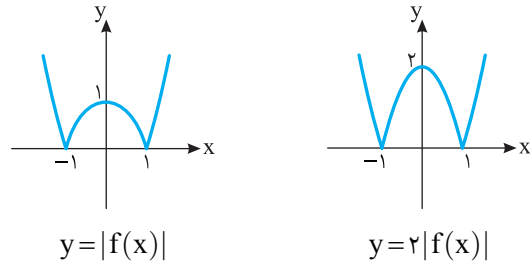
۱۴- گزینه ۱ باید طول هر نقطه از نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ، یعنی $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ به دست بیاید. توجه کنید که با این کار، نمودار در امتداد محور طولها منبسط می‌شود.



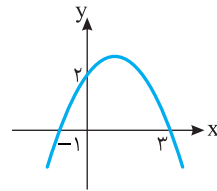
۱۵- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع $y = f(2x-1)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طولها منقبض می‌شود.



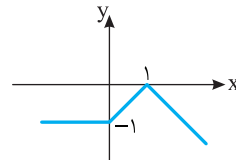
۷- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = |f(x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه قسمتی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. اکنون، نمودار تابع $|f|$ را در امتداد محور y با ضریب ۲ به طور عمودی منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2|f(x)|$ به دست بیاید.



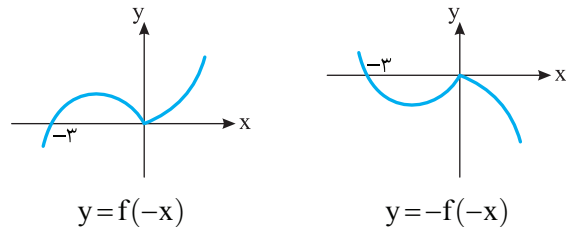
۸- گزینه ۳ باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم تا نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست بیاید.



۹- گزینه ۱ باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم تا نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست بیاید.



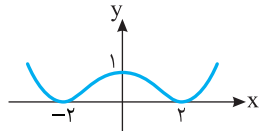
۱۰- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست بیاید. سپس قرینه نمودار این تابع را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(-x)$ به دست بیاید.



۱۱- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(2+x)$ به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(2-x)$ به دست بیاید.

۱۹- گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ، قسمتی

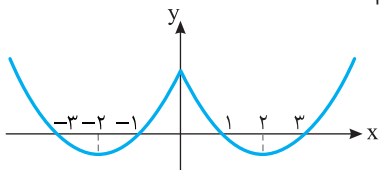
از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



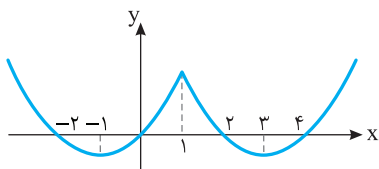
$y=f(|x|)$

۲۰- گزینه ۴ توجه کنید که اگر ابتدا نمودار تابع

$y=f(|x|)$ را رسم کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ به دست می‌آید. برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ کافی است قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم کنیم.



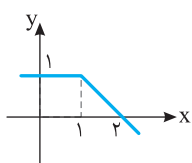
$y=f(|x|)$



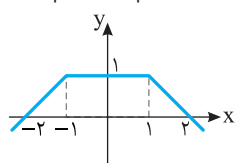
$y=f(|x-1|)$

۲۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم

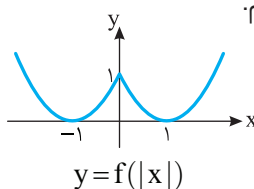
می‌کنیم. برای این کار، نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. اکنون نمودار تابع $y=g(|x|)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قسمتی را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمت سمت راست را نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



$y=f(x-1)$



$y=f(|x-1|)$

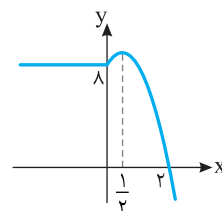


$y=f(|x|)$

۱۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$y = \begin{cases} f(x+x) & x \geq 0 \\ f(x-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(2x) & x \geq 0 \\ f(0) & x < 0 \end{cases}$$

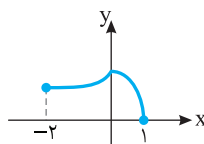
بنابراین باید روی بازه $[0, +\infty)$ نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کنیم. یعنی باید روی بازه $[0, +\infty)$ طول هر نقطه روی نمودار f را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. با این کار نمودار f روی این بازه در امتداد محور طولها منقبض می‌شود. نمودار تابع مورد نظر روی بازه $(-\infty, 0)$ خط ثابت $y=f(0)=8$ است.



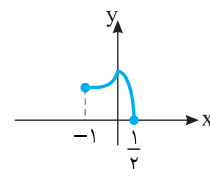
$y=f(x+|x|)$

۱۷- گزینه ۱ اگر طول نقاط نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ را

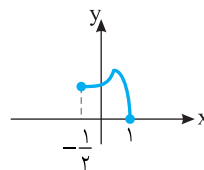
نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{2x}{2})=f(x)$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را نیم واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-\frac{1}{2})$ رسم می‌شود.



$y=f(\frac{x}{2})$



$y=f(x)$



$y=f(x-\frac{1}{2})$

۱۸- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ، قسمتی

از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به این محور رسم می‌کنیم.

۲۶- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را یک

واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(2(x-1)) - 1$ به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = f(2(2x-1)) - 1 = f(4x-2) - 1$ به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2(f(4x-2)) - 1$ به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده به صورت $y = 2f(4x-2) - 2$ است.

۲۷- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x-1)}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را مجدداً نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(-x-1)}$ به دست می‌آید. بنابراین نمودار نهایی متعلق به تابع $y = \sqrt{x+1}$ است.

۲۸- گزینه ۴ وقتی طول نقاط نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ را

سه برابر می‌کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{\frac{x}{3}-1}$ رسم می‌شود و وقتی عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم نمودار تابع $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{3}-1}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-1}$ به دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(x-1)}{3}-1}$ به دست می‌آید. بنابراین ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده است به صورت $y = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}$ است.

۲۹- گزینه ۱ وقتی نمودار تابع $y = \sin(\frac{x}{4})$ را یک واحد به

سمت راست منتقل می‌کنیم نمودار تابع $y = \sin(\frac{x-1}{4})$ به دست

می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = \sin(\frac{2x-1}{4})$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار یک

واحد به سمت راست منتقل شود، نمودار تابع $y = \sin(\frac{2(x-1)-1}{4})$

به دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sin(\frac{2(-x-1)-1}{4})$ به دست می‌آید که

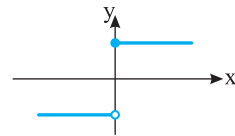
پس از ساده کردن به صورت $y = \sin(-x - \frac{3}{4})$ یا به صورت

$$y = -\sin(x + \frac{3}{4})$$
 در می‌آید.

۲۲- گزینه ۳ اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $g(x) = |f(x)|$ ، بنابراین،

باید به ازای $x \geq 0$ نمودار تابع $y = |f(x)|$ را رسم کنیم. برای این کار، به ازای $x \geq 0$ ، قرینه قسمتی از نمودار f را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

اگر $x < 0$ ، آن گاه $g(x) = f(|x|)$. بنابراین، باید به ازای $x < 0$ نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، به ازای $x < 0$ ، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی از نمودار f را که سمت راست محور y است نسبت به این محور رسم می‌کنیم.



۲۳- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x+1)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x+1)+1$ به دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-x+1)+1$ به دست می‌آید.

۲۴- گزینه ۴ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست می‌آید. اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط نمودار اخیر را

نصف کنیم، نمودار تابع $y = 2f(2x-1)$ به دست می‌آید.

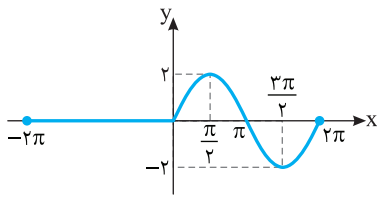
۲۵- گزینه ۲ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ

و یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(x+1)-1$ به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم،

نمودار تابع $y = 2f(\frac{x}{2}+1)-1$ به دست می‌آید و اگر عرض نقاط

نمودار اخیر را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2(f(\frac{x}{2}+1)-1)$

به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده به صورت $y = 2f(\frac{x}{2}+1)-2$ است.

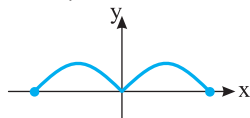


$$y = \sin|x| + \sin x$$

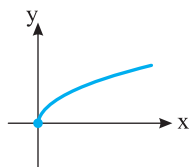
۳۳- گزینه ۳ **راهحل اول** توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sin(-x) & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} -\sin x & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

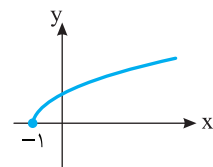
بنابراین، باید روی بازه $[-\pi, 0)$ قرینه نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x رسم کنیم که نمودار تابع $y = -\sin x$ روی این بازه می‌شود و روی بازه $[0, \pi]$ نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنیم. **راهحل دوم** ابتدا نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = \sin x$ و دامنه $[-\pi, \pi]$ را رسم می‌کنیم. اکنون توجه کنید که $f(x) = g(|x|)$ ، در نتیجه، کافی است نمودار تابع $y = g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، قسمتی از نمودار تابع g را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



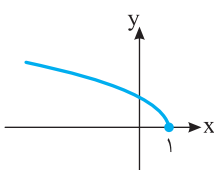
۳۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{-x+1}$ به دست آید و در آخر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -\sqrt{1-x}$ به دست آید.



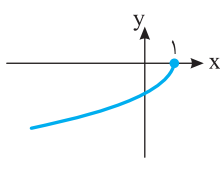
$$y = \sqrt{x}$$



$$y = \sqrt{x+1}$$

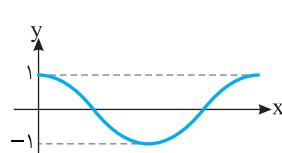


$$y = \sqrt{-x+1}$$

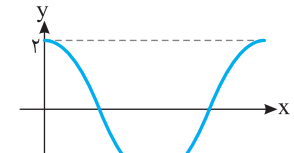


$$y = -\sqrt{1-x}$$

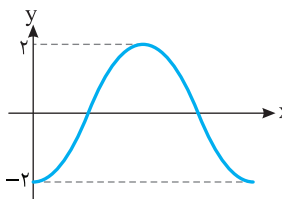
۳۰- گزینه ۴ نمودار تابع $y = -2 \cos x$ از دو برابر کردن عرض نقاط در نمودار تابع $y = \cos x$ و سپس قرینه کردن آنها نسبت به محور x به دست می‌آید.



$$y = \cos x$$

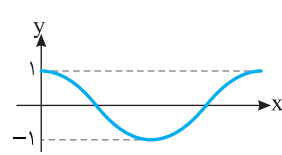


$$y = 2 \cos x$$

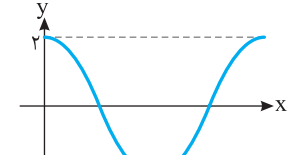


$$y = -2 \cos x$$

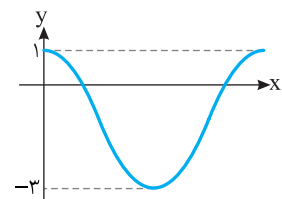
۳۱- گزینه ۲ ابتدا عرض نقاط نمودار تابع $y = \cos x$ دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \cos x$ به دست آید. نمودار به دست آمده را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \cos x - 1$ به دست آید.



$$y = \cos x$$



$$y = 2 \cos x$$



$$y = 2 \cos x - 1$$

۳۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sin(-x) + \sin x & -2\pi \leq x < 0 \\ \sin x + \sin x & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & -2\pi \leq x < 0 \\ 2 \sin x & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع روی بازه $[-2\pi, 0)$ خط ثابت $y = 0$ است، و روی بازه $[0, 2\pi]$ نمودار تابع $y = 2 \sin x$ است. برای رسم نمودار تابع $y = 2 \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را در ۲ ضرب کنیم.