هندسه
دوازدهم

ماتریس و کاربردها

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

آشنایی با ماتریس

تعریف ماتریس

یک آرایش مستطیلی شامل $m \times n$ عدد حقیقی است که به شکل زیر در m سطر و n ستون چیده شده باشند:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

به $m \times n$، مرتبهٔ ماتریس و به هر یک از اعداد ماتریس، یک درایه از ماتریس می‌گویند.

a_{ij} را درایهٔ سطر iام و ستون j ام ماتریس می‌نامند به قسمی که $۱ \le i \le m$ و $۱ \le j \le n$ تغییر می‌کنند. می‌توان به اختصار، ماتریس A را به صورت $A = \left[a_{ij}\right]$ نیز نمایش داد.

مثال ماتریس $A = \left[a_{ij}\right]_{۲\times۳}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j-i & i<j \\ i+j & i \ge j \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

پاسخ با مقایسهٔ گزینه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که بهتر است فقط درایهٔ متفاوت در گزینه‌ها را محاسبه کنیم:

مثلاً $a_{۲۱} \xrightarrow[i>j]{i=۲,\, j=۱}$ را در ضابطهٔ دوم قرار می‌دهیم j و i $\Rightarrow a_{۲۱} = i+j = ۲+۱ = ۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} - & - & - \\ ۳ & - & - \end{bmatrix}$

گزینهٔ (۱) پاسخ صحیح است.

معرفی چند ماتریس خاص

بعضی از ماتریس‌ها اسامی خاصی دارند:

① ماتریسی که از یک سطر به صورت $\left[a_{۱۱} \;\; a_{۱۲} \;\; \cdots \;\; a_{۱n}\right]_{۱\times n}$ تشکیل شده باشد، **ماتریس سطری** و ماتریسی که از یک ستون به صورت $\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times۱}$ تشکیل شده باشد، **ماتریس ستونی** نام دارد. به‌عنوان مثال ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۱}$ ماتریس ستونی و $\left[۱ \;\; ۲ \;\; -۶ \;\; ۷\right]_{۱\times۴}$: ماتریس سطری است.

② ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند، «**ماتریس مربعی**» نامیده می‌شود. مثال: $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$

③ در ماتریس مربعی $n \times n$، به درایه‌های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}$ «**درایه‌های قطر اصلی**» و به درایه‌های $a_{۱n}, a_{۲\,n-۱}, \ldots, a_{n۱}$ «**درایه‌های قطر فرعی**» می‌گویند. مثال:

قطر فرعی

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۵ \\ -۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

قطر اصلی

④ در ماتریس مربعی اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند، آن را ماتریس «**بالا مثلثی**» می‌گویند. مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

⑤ در ماتریس مربعی اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند، آن را ماتریس «**پایین مثلثی**» می‌گویند. مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۶ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

⑥ اگر تمام درایه‌های خارج قطر اصلی صفر باشند، ماتریس را «**قطری**» می‌گویند[۱]. مثال:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱- ماتریسی که تمام درایه‌های آن به‌جز درایه‌های قطر فرعی صفر باشند را ماتریس شبه‌قطری می‌گویند. مثال: $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

⑦ ماتریس قطری که تمام درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند را ماتریس «**اسکالر**» می‌گویند. مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

⑧ ماتریس اسکالری که تمام درایه‌های قطر اصلی آن عدد ۱ باشند را ماتریس «واحد یا همانی» می‌گویند و آن را به صورت I_n یا $I_{n\times n}$ نشان می‌دهند. مثال:

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

⑨ ماتریس $m\times n$ که تمام درایه‌های آن صفر باشند را ماتریس صفر از مرتبهٔ m در n می‌گویند و به صورت $\overline{O}$ نشان می‌دهند.

عمل‌های مقدماتی روی ماتریس‌ها و تساوی ماتریس‌ها

① **تساوی دو ماتریس:** دو ماتریس هم‌مرتبه هنگامی با هم برابرند که درایه‌های متناظر در دو ماتریس، با هم برابر باشند.

② **جمع و تفریق دو ماتریس:** به شرطی که ماتریس‌های مورد نظر هم‌مرتبه باشند، می‌توانیم درایه‌های متناظر در ماتریس‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.

لازم به ذکر است که ویژگی‌های جمع و تفریق ماتریسی شبیه به جمع و تفریق اعداد حقیقی است.

* جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد: $A+B=B+A$
* تفریق ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد: $A-B\neq B-A$
* جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد: $A+(B+C)=(A+B)+C$
* $\overline{O}$ ، عضو خنثی در عمل جمع ماتریسی می‌باشد: $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$

③ **ضرب عدد حقیقی در ماتریس:** کافی است عدد مورد نظر را در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب کنیم.

ضرب ماتریس‌ها

شرط ضرب‌پذیر بودن ماتریس‌های $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ (یعنی AB) آن است که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد؛ یعنی $A_{m\times \boxed{n}}\times B_{\boxed{n}\times p}=C_{m\times p}$ (حذف)؛ که هر درایهٔ ماتریس C یعنی c_{ij} از رابطهٔ $c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$ به دست می‌آید. به عبارت ساده‌تر، هر درایه مثل c_{ij} (از ماتریس $C_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}$) از ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B به دست می‌آید.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $(A\times B)-(B\times A)$ را به دست آورید؟

پاسخ

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (۰\times۴)+(۱\times۲) & (۰\times۳)+(۱\times۱) \\ (۱\times۴)+(۰\times۲) & (۱\times۳)+(۰\times۱) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}\quad(۱)$$

مثلاً درایهٔ $c_{۲۱}$ از ضرب سطر دوم A در ستون اول B به دست می‌آید.

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)-(۲)}(A\times B)-(B\times A)=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه‌گیری از حل مثال و با توجه به (۱) و (۲) متوجه می‌شویم که $AB\neq BA$ است.

خواص ضرب ماتریس‌ها

① در حالت کلی $AB=BA$ برقرار نیست. یعنی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

نتیجه‌گیری از آن‌جایی که $AB\neq BA$ ، اتحادهای جبری بین ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی: $(A+B)^۲\neq A^۲+۲AB+B^۲$

بلکه داریم:

$$(A+B)^۲=(A+B)\times(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$$

② در حالت کلی، خاصیت حذف برقرار نیست. یعنی در دنیای ماتریس‌ها (جدول‌ها) نمی‌توان طرفین یک تساوی را تقسیم بر یک جدول کرد:

$$AB=AC\not\Rightarrow B=C$$

۳) دو طرف یک تساوی ماتریسی را می‌توان از سمت چپ یا راست در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد. یعنی:

$$A=B\begin{cases}\xrightarrow[\text{از راست}]{\times C} AC=BC\\ \xrightarrow[\text{از چپ}]{C\times} CA=CB\end{cases}$$

۴) **مهم:** ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی: $A(BC)=(AB)C$

۵) ضرب ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع یا تفریق خاصیت توزیع‌پذیری دارد، یعنی: $A(B\pm C)=AB\pm AC$

۶) $A^2=A\times A$ و به همین ترتیب به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم: $A^k=A^{k-1}A$

۷) I_n عضو خنثی در عمل ضرب ماتریسی می‌باشد، یعنی: $AI_n=I_nA=A$

توجه) اگر $AB=\overline{O}$ باشد، آن‌گاه به طور قطع نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\overline{O}$ یا $B=\overline{O}$ است. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\overline{O}$$

مثال) اگر $AB+BA=\overline{O}$ و $AB^2=kB^2A$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ)

$$AB+BA=\overline{O}\Rightarrow AB=-BA \qquad (1)$$

$$AB^2=kB^2A\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(\underbrace{AB}_{-BA})B=kB(\underbrace{BA}_{-AB})\xrightarrow{(1)}-BAB=-kBAB\Rightarrow k=1$$

توجه کنید که در تساوی اخیر، ماتریس‌های $-BAB$ را از طرفین تساوی ساده نمی‌کنیم، بلکه فقط ادعا می‌کنیم از آن‌جا که در طرفین تساوی دو جدول یا ماتریس برابر دیده می‌شود، پس باید $k=1$ باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) پاسخ صحیح است.

تعویض‌پذیری (جابه‌جایی) در ضرب ماتریس‌ها

قبلاً آموختیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی **خاصیت جابه‌جایی ندارد** ولی در **حالت خاص** که دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، اگر $AB=BA$ باشد (خاصیت جابه‌جایی داشته باشد)، آن‌گاه به A و B ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌گویند.

نکات ماتریس‌های تعویض‌پذیر به شرح زیر است:

۱) اتحادهای جبری بین ماتریس‌های تعویض‌پذیر برقرار می‌شود:

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2\ ,\ (A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\ ,\ (A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3\ ,\cdots$$

$$(AB)^n=\underbrace{(AB)(AB)\ldots(AB)}_{n\text{ تا}}=A^nB^n$$

۲) توجه کنید که ویژگی $(AB)^n=A^nB^n$ در حالت کلی برقرار نیست و فقط زمانی که ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند می‌توان از آن استفاده کرد. برای تمرین بیشتر، این تساوی را به ازای $n=2$ تحقق می‌کنیم:

$$(AB)^2=(AB)(AB)\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}A(BA)B\xrightarrow[\text{A و B تعویض‌پذیرند}]{AB=BA}A(AB)B=A^2B^2$$

۳) حاصل‌ضرب توان‌های مختلف A و B تعویض‌پذیرند. یعنی:

$$A^mB^n=B^nA^m$$

۴) توان‌های مختلف یک ماتریس، خود با یک‌دیگر تعویض‌پذیرند. یعنی:

$$A^mA^n=A^nA^m=A^{m+n}$$

۵) ماتریس‌های قطری هم‌مرتبه تعویض‌پذیرند. یعنی داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{bmatrix}\Rightarrow AB=BA=\begin{bmatrix}a_1b_1&0&0\\0&a_2b_2&0\\0&0&a_3b_3\end{bmatrix}$$

نتیجه‌گیری) اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی A به توان n برسند.[1]

۱- توجه کنید که این نتیجه برای ماتریس شبه قطری کاربرد ندارد.

مثال

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}۱^n&۰&۰\\۰&۲^n&۰\\۰&۰&(-۳)^n\end{bmatrix}$$

۶) ماتریس‌هایی به شکل $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$ با هر ماتریس دیگر به این شکل تعویض‌پذیرند. همچنین ماتریس‌هایی به شکل $\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$ با هر ماتریس دیگر به این شکل، تعویض‌پذیرند.

۷) $A_{n\times n}$ و $I_{n\times n}$ تعویض‌پذیرند.

مثال **اگر A، B و C ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و داشته باشیم $AB=C$، آن‌گاه $A(BA)^۳B$ با کدام گزینه برابر است؟**

۱) $C^۲$ ۲) ACB ۳) $C^۴$ ۴) BCA

پاسخ

$$A(BA)^۳B=A(BA)(BA)(BA)B\xlongequal{\text{شرکت‌پذیری}}\underbrace{(AB)}_{C}\underbrace{(AB)}_{C}\underbrace{(AB)}_{C}\underbrace{(AB)}_{C}=C^۴$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تذکر اولاً $AB\neq BA$ و ثانیاً $A(BA)^۳B\neq A(B^۳A^۳)B$ زیرا در حالت کلی $(AB)^n\neq A^nB^n$ است، مگر این‌که ماتریس‌ها تعویض‌پذیر باشند.

درس دوم: دترمینان و وارون ماتریس ۲×۲

آشنایی با دترمینان

تعریف دترمینان: عددی حقیقی است که به یک ماتریس مربعی نسبت داده می‌شود.

دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را با $|A|$ یا $\det(A)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$|A|=ad-bc$ (حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ـ حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی)

مثال **ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-۲&۱\\-۳x&x+۲\end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $|A|=۰$ باشد، آن‌گاه مقدار x را به دست آورید؟**

پاسخ

$$|A|=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۲)-(-۳x)=۰\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow(x-۱)(x+۴)=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۴$$

مثال **اگر رابطهٔ ماتریسی $A\times\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۴&۲\end{bmatrix}$ برقرار باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟**

پاسخ می‌توان از طرفین یک تساوی ماتریسی دترمینان گرفت، یعنی: اگر $AB=C$ آن‌گاه $|A||B|=|C|$. پس می‌توان نوشت:

$$|A|\begin{vmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲&۲\\۴&۲\end{vmatrix}\Rightarrow ۲|A|=-۴\Rightarrow|A|=-۲$$

توجه روش محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ (و مرتبه‌های بالاتر) با ۲×۲ فرق می‌کند و برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس ۳×۳ باید مسیر زیر را طی کنیم: تشکیل ماتریس کهاد ← محاسبهٔ عدد همسازه ← محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳ از روش بسط.

تعریف ماتریس کهاد: اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر و یک ستون را حذف کنیم، آن‌گاه به ماتریس به دست آمده، ماتریس کهاد می‌گوییم و آن را با نماد M_{ij} نمایش می‌دهیم که در آن i و j به ترتیب شمارهٔ سطر و ستون حذف‌شده می‌باشد. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۳&۵\\۱&۲&۴\\۳&۰&-۱\end{bmatrix}\xRightarrow[\text{اول و ستون سوم}]{\text{کهاد نظیر سطر}}M_{۱۳}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۰\end{bmatrix}$$

تعریف عدد همسازه: به هر درایه از یک ماتریس مربعی، عددی به صورت زیر نسبت می‌دهیم که به آن همسازهٔ آن درایه می‌گوییم:

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\underbrace{|M_{ij}|}_{\text{دترمینان ماتریس کهاد}}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۳&۵\\۱&۲&۴\\۳&۰&-۱\end{bmatrix}\xRightarrow[\text{اول و ستون سوم}]{\text{همسازهٔ سطر}}A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\underbrace{\begin{vmatrix}۱&۲\\۳&۰\end{vmatrix}}_{-۶}=-۶$$

روش بسط در محاسبه دترمینان 3×3 (و مراتب بالاتر)

دترمینان ماتریس $A_{3\times 3}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

بسط فوق را به صورت روبه‌رو نیز نشان می‌دهند که بسط حول سطر اول است:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

به همین ترتیب می‌توان دترمینان را حول هر سطر یا هر ستون بسط داد:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$$

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

توجه کنید که به صورت قراردادی سطرها را با حرف R و ستون‌ها را با حرف C نشان می‌دهند. مثلاً R_2 یعنی سطر دوم و C_3 یعنی ستون سوم ماتریس.

مثال اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7\\ 2 & -1 & 1\\ x & 1 & 2\end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix} 2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}$، مقدار A کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7\\ 2 & -1 & 1\\ x & 1 & 2\end{vmatrix}}^{\text{بسط روی } R_1}=A+x\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 7\\ -1 & 1\end{vmatrix}}^{\text{قطر فرعی - قطر اصلی}}\Rightarrow 1\times(-1)^2\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}_{-3}+2\times(-1)^3\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1\\ x & 2\end{vmatrix}}_{4-x}+7\times(-1)^4\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1\\ x & 1\end{vmatrix}}_{2+x}=A+x(2+7)$$

$$\Rightarrow -3-8+2x+14+7x=A+9x\Rightarrow A=3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تذکر از آن‌جا که محاسبهٔ دترمینان به سطر یا ستون انتخاب‌شده بستگی ندارد، پس بهتر است برای استفاده از روش بسط، در صورت وجود صفر در سطرها یا ستون‌ها، سطرها یا ستون‌هایی را انتخاب کنیم که تعداد صفر بیشتری دارند تا محاسبات راحت‌تر و سریع‌تر انجام شود.

دستور ساروس، فقط برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3

در این روش دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم. $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b\\ d & e\\ g & h\end{matrix}\qquad |A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال اگر $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4\\ a & b & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 1\\ a & b & -1\end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $-D-2$ ۲) $-D+2$ ۳) $D-1$ ۴) $D+1$

پاسخ

$$D=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 4\\ a & b & 1\\ 2 & 5 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2\\ a & b\\ 2 & 5\end{matrix}=(b+20a+4)-(8b+2a+5)=-7b+18a-1\quad(1)$$

$$8b\quad 5\quad 2a\qquad b\quad 4\quad 20a$$

$$\text{حکم سوال}=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 1\\ a & b & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2\\ 2 & 5\\ a & b\end{matrix}=(8b+2a-5)-(b+20a-4)=7b-18a-1\overset{(1)}{=\!=}-D-2$$

$$20a\quad b\quad -4\qquad -5\quad 2a\quad 8b$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

برخی از ویژگی‌های دترمینان

تقریباً تمام ویژگی‌هایی که در زیر آمده است را می‌توان با روش‌های بسط یا ساروس اثبات کرد. توجه کنید در هر مورد باید A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند.

ویژگی ۱: اگر تمام درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) دترمینانی برابر صفر باشند، آن‌گاه حاصل آن دترمینان صفر است.

ویژگی ۲: تأکید می‌کنیم که اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه باشند، داریم: $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

نتیجه‌گیری: اگر n یک عدد طبیعی باشد، داریم: $|A^n|=|A|^n$

ویژگی ۳: دترمینان ماتریس‌های قطری، بالامثلثی یا پایین‌مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است:

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{vmatrix} = abc$$

ویژگی ۴ (مهم): اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ n باشند و k یک عدد حقیقی باشد، چنان‌چه یک سطر یا ستون ماتریس، k برابر شود، آن‌گاه حاصل دترمینان آن ماتریس k برابر می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر از یک سطر یا یک ستون ماتریس، عدد k را فاکتور بگیریم، آن‌گاه k در دترمینان ماتریس حاصل، ضرب می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} , \ B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = k|A|$$

و در حالت کلی اگر تمام سطرهای (یا ستون‌های) یک ماتریس k برابر شوند، آن‌گاه حاصل دترمینان k^n برابر می‌شود. یعنی:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} , \ B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = k^{۳}|A|$$

مثلاً برای ماتریس $A_{۲\times۲}$ می‌توان نوشت: $|۳A| = ۳^{۲}|A|$

ویژگی ۵: (خارج از کتاب درسی اما کاربردی): اگر تمام درایه‌های متناظر دو سطر با هم (یا دو ستون با هم) برابر باشند، حاصل دترمینان صفر می‌شود. مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۴ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \ , \ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۴ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۰$$

ویژگی ۶ به عنوان ترکیبی از ویژگی‌های ۴ و ۵: (خارج از کتاب اما کاربردی): اگر تمام درایه‌های متناظر دو سطر (یا دو ستون) دترمینان مضرب یک‌دیگر باشند، حاصل دترمینان صفر می‌شود. مثلاً داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۴ & -۶ \end{vmatrix} \xlongequal[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در } R_۳ \text{ از } ۲} ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۲ & -۳ \end{vmatrix} \xlongequal{R_۱ \text{ و } R_۳ \text{ برابرند}} ۲\times۰=۰$$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۶ & ۲ & ۴ \\ ۱۵ & ۵ & -۳ \end{vmatrix} \xlongequal[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در } C_۱ \text{ از } ۳} ۳\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۵ & -۳ \end{vmatrix} \xlongequal{C_۱ \text{ و } C_۲ \text{ برابرند}} ۳\times۰=۰$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

پاسخ

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} \xlongequal{\text{ویژگی ۳}} ۴$$

$$\left|\frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})\right| = \left|\frac{۱}{۲}A^{۳}(A-I)\right| \xlongequal{\text{ویژگی‌های ۲ و ۴}} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}|A|^{۳}|A-I| = \frac{۱}{۸}\times۴^{۳}\times \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}}_{۶} = ۴۸$$

پس گزینهٔ (۴) پاسخ صحیح است.

روش عددگذاری در محاسبهٔ دترمینان: در بسیاری از اوقات به‌جای استفادهٔ صرف از روش‌های بسط، ساروس یا ویژگی‌های دترمینان، می‌توان به‌جای مجهولات در درایه‌های دترمینان عددگذاری کرد و پس از محاسبهٔ پاسخ نهایی، آن را با گزینه‌های عددگذاری‌شده مقایسه نمود. در عددگذاری سعی می‌کنیم تا حد امکان اعداد کوچک انتخاب کنیم به‌طوری که با عددگذاری در گزینه‌ها، حاصل آن‌ها مثل هم نشود (وگرنه نمی‌توان گزینهٔ درست را تشخیص داد!)

توجه کنید که بهتر است اعداد انتخابی را ابتدا در گزینه‌ها و سپس در صورت سوال قرار دهیم تا اگر گزینه‌ها تکراری شدند، اعداد انتخابی را عوض کنیم.

مثال اگر a و b دو عدد متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴(a+b) \\ ۱ & a+۱ & a^۲(b+۲) \\ ۱ & b+۱ & b^۲(a+۲) \end{vmatrix}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) صفر ۲) $۴ab$ ۳) $(a-۲)(b-۲)$ ۴) $۲(a-۲)(b-۲)$

پاسخ

فرض کنیم $a=۱$ و $b=-۱$ باشد، در این صورت مقدار گزینه‌ها از (۱) تا (۴) به ترتیب ۰، ۴-، ۳ و ۶ می‌شوند. حال که خیالمان از تکراری‌نشدن گزینه‌ها آسوده شد، به محاسبهٔ مقدار دترمینان صورت سوال و مقایسهٔ آن با گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط روی } R_۳} ۱(۳-۰)+۳(۲-۳)=۰$$

تنها گزینه‌ای که با جواب صفر هم‌خوانی دارد، گزینهٔ (۱) است. (سایر گزینه‌ها به ازای $a=۱$ و $b=-۱$، صفر نمی‌شوند.)

وارون ماتریس

همان‌طور که می‌دانید در دستگاه اعداد حقیقی به ازای هر عدد حقیقی $a\neq ۰$ عدد b وجود دارد به‌طوری که $ab=ba=۱$. در این صورت عدد b را وارون عدد a می‌گوییم و با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم. حال خواهیم دید که این ویژگی در مورد ماتریس‌های مربعی نیز به صورت متفاوت و تحت شرایطی برقرار است.

تعریف ماتریس وارون

ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر گویند، هرگاه ماتریس B (هم‌مرتبهٔ A) وجود داشته باشد به‌طوری که: $AB=BA=I$ (یعنی هر ماتریس با معکوس خود تعویض‌پذیر است). در این شرایط برای یکسان‌سازی نمایش ماتریس وارون، معکوس A را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم و چنین می‌نویسیم:

$$AA^{-۱}=I \xRightarrow{\det} |AA^{-۱}|=|I| \Rightarrow \underbrace{|A|}_{\text{عدد}}\underbrace{|A^{-۱}|}_{\text{عدد}}=۱ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|} \quad ; \quad |A|\neq ۰$$

توجه کنید که: $A^{-۱}\neq \frac{۱}{A}$

نتیجه‌گیری اثبات بالا اشاره به این قضیهٔ مهم دارد که: «شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس A آن است که $|A|\neq ۰$ باشد.»

مثال نشان دهید اگر A وارون‌پذیر و $AB=AC$ باشد، آن‌گاه $B=C$ است؟

پاسخ چون A وارون‌پذیر است پس $A^{-۱}$ وجود دارد. با ضرب طرفین $AB=AC$ از چپ در $A^{-۱}$ و استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها، داریم:

$$A^{-۱}(AB)=A^{-۱}(AC) \Rightarrow (A^{-۱}A)B=(A^{-۱}A)C \Rightarrow IB=IC \Rightarrow B=C$$

مثال به ازای چند مقدار m، دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m & ۳ \\ m & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ با دترمینان معکوس آن برابر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|} \text{: طبق قضیهٔ قبل} \\ |A|=|A^{-۱}| \text{: از طرفی طبق فرض سؤال} \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=\frac{۱}{|A|} \Rightarrow |A|^۲=۱ \Rightarrow |A|=\pm ۱ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & m & ۳ \\ m & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط روی } R_۲} -m(m-۳)=\pm ۱ \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \oplus : -m^۲+۳m-۱=۰ \Rightarrow m=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴}}{-۲} \\ \ominus : -m^۲+۳m+۱=۰ \Rightarrow m=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۴}}{-۲} \end{array}\right. \Rightarrow \text{۴ مقدار برای m وجود دارد}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

قضیه وارون هر ماتریس منحصربه‌فرد است.

اثبات فرض کنیم A ماتریسی وارون‌پذیر و B و C دو ماتریس مربعی باشند که هر دو وارون A باشند. طبق تعریف ماتریس وارون می‌توان چنین نوشت:

$$AB=BA=I \quad (۱)$$
$$AC=CA=I \quad (۲)$$

حال باید به طریقی ثابت کنیم $B=C$ است. به این منظور چنین می‌نویسیم:

$$B=BI \overset{(۲)}{=} B(AC) \xlongequal{\text{شرکت‌پذیری}} (BA)C \overset{(۱)}{=} IC=C$$

مثال ماتریس‌های A، B و I مربعی و از مرتبهٔ ۳ هستند و $I-2A$ و $2I+A$ هر دو وارون‌های ماتریس B هستند. دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{27}$ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{27}$

پاسخ همان‌طور که از قضیهٔ اخیر آموختیم «وارون هر ماتریس منحصربه‌فرد است»، بنابراین می‌توان نوشت:

$$2I+A=I-2A\Rightarrow 3A=-I\xrightarrow{\div 3}A=-\frac{1}{3}I\xrightarrow{\det}|A|=|-\frac{1}{3}I|\Rightarrow|A|=(-\frac{1}{3})^3|I|=-\frac{1}{27}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

وارون ماتریس ۲ × ۲

اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه وارون ماتریس A را از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$
$|A|\neq 0$

مثال وارون ماتریس $R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$

پاسخ

$$R_\alpha^{-1}=\frac{1}{\underbrace{|R_\alpha|}_{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

برخی ویژگی‌های ماتریس وارون

قضیه برای دو ماتریس وارون‌پذیر ۲ × ۲ و دلخواه A و B و عدد حقیقی k، داریم:

۱) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ۲) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ ۳) $(A^{-1})^{-1}=A$

مثال اگر A، B و C ماتریس‌های وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

پاسخ برای اثبات، دو بار از ویژگی $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$(\overbrace{AB}^{D}C)^{-1}=(DC)^{-1}=C^{-1}D^{-1}=C^{-1}(AB)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

مثال اگر $\frac{1}{2}AB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $2BA^{-1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ برای حل از ویژگی‌های ۱ و ۲ ماتریس وارون کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}AB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{وارون می‌گیریم}}(\frac{1}{2}AB^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow 2BA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=1+2+1=4$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

دستگاه معادلات خطی ۲×۲[1]

روش حل دستگاه به کمک ماتریس معکوس: اگر دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$ را به صورت ضرب ماتریسی $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$ یا به‌طور خلاصه به صورت $AX=B$ تبدیل کنیم که در آن A ماتریس ضرایب، X ماتریس مجهولات و B ماتریس معلومات باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ ماتریس مجهولات لازم است دو طرف تساوی اخیر را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم:

$$AX=B\xrightarrow{A^{-1}\times}A^{-1}(AX)=A^{-1}B\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری در ضرب}}IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

بدیهی است شرط قابل محاسبه بودن A^{-1} آن است که $|A|\neq 0$ باشد.

۱- منظور از دستگاه معادلات خطی آن است که درجهٔ مجهولات هر معادله ۱ باشد.

مثال در دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$، **معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت** $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **است. $x+y$ کدام است؟**

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

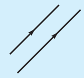
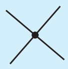
پاسخ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۳ \Rightarrow x+y=۴$$

گزینهٔ (۴) پاسخ صحیح است.

بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله دو مجهول: بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله دو مجهول مانند بحث روی اوضاع نسبی دو خط در صفحه است که سه وضعیت[۱] دارند و در جدول زیر آمده است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

نسبت ضرایب و اعداد ثابت	شکل دو خط	وضعیت دو خط	تعداد جواب دستگاه
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$		موازی	بدون جواب (غیرممکن)
$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$		متقاطع	جواب منحصربه‌فرد (یکتا)
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$		منطبق	بی‌شمار جواب

نتیجه‌گیری اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، در این صورت با توجه به جدول قبل می‌توان گفت:

۱) اگر $|A|\neq ۰$ آن‌گاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (یعنی دو خط متقاطع‌اند).

۲) اگر $|A|=۰$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (یعنی دو خط موازی‌اند) و یا این‌که دستگاه بی‌شمار جواب دارد (یعنی دو خط برهم منطبق هستند).

مثال **دستگاه معادلات** $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$**، به ازای کدام مقدار m غیرممکن است؟**

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ «غیرممکن» در صورت سؤال یعنی «فاقد جواب». بنابراین باید مثل ردیف اول جدول عمل کنیم و شرط توازی را برای این دو خط بنویسیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{m-۳}{۴}=\frac{۳}{m+۱}\neq\frac{m}{۲}$$

$$m^۲+m\neq۶ \Rightarrow m^۲+m-۶\neq۰ \Rightarrow (m+۳)(m-۲)\neq۰ \Rightarrow \begin{cases} m\neq-۳ \\ m\neq۲ \end{cases}$$

$$m^۲-۲m-۳=۱۲ \Rightarrow m^۲-۲m-۱۵=۰ \Rightarrow (m-۵)(m+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۵ \\ m=-۳ \end{cases}$$

با توجه به غیرممکن بودن دستگاه، باید $m=۵$ را انتخاب کنیم. (توجه کنید که اشتراک گرفتن از جواب‌ها و انتخاب $m=-۳$ از اشتباهات شایع در حل این‌گونه سؤالات است! که منجر به تساوی هر سه کسر می‌شود و این یعنی دستگاه بی‌شمار ریشه دارد.) بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

عمل‌های مقدماتی روی ماتریس‌ها، تساوی ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها

۱- اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ با یک‌دیگر مساوی باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $x+y+z$ برابر کدام است؟

۱) x ۲) y ۳) z ۴) صفر — تمرین کتاب درسی با تغییر

۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱- دو خط در صفحه سه وضعیت توازی، تقاطع و انطباق (حالت خاصی از موازی‌بودن) و هم‌چنین دو خط در فضا چهار وضعیت توازی، تقاطع، انطباق (حالت خاصی از موازی‌بودن) و متنافربودن را دارند.

Ⓐ ۳- اگر $A=[i-j]_{3\times3}$ باشد، حاصل $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) صفر

Ⓐ ۴- ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$ معرفی شده‌اند. درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر کدام است؟

تمرین کتاب درسی با تغییر

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۳

Ⓐ ۵- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ m & 4 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر عنصر واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس BA برابر صفر باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۲۰-

Ⓐ ۶- اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I_2$ باشد، دوتایی مرتب (α,β) کدام است؟

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$

Ⓐ ۷- چند ماتریس مانند $A_{2\times2}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) بی‌شمار ۴) ۲

Ⓑ ۸- اگر A و B دو ماتریس مربعی 2×2 و $AB=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) I ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $-I$

Ⓑ ۹- اگر $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B^2=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B-A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

Ⓑ ۱۰- اگر $2AB+BA=\overline{O}$ و $mB^3A=AB^3$ باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

Ⓑ ۱۱- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند که $BA=B$ و $AB^2=A$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح‌اند؟

الف) $B^6=B^2$ ب) $A^n=A$ پ) $AB=B^2$ ت) $(AB)^2=A$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Ⓑ ۱۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند که $A=2B^2-3I$ ، آن‌گاه $A(BA)^2B-B(AB)^2A$ برابر کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $\overline{O}$ ۳) AB ۴) A^2

Ⓐ ۱۳- اگر برای ماتریس A رابطه‌های $A^2-2A+3I=\overline{O}$ و $A^3-\alpha A-\beta I=\overline{O}$ برقرار باشند، آن‌گاه مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۶- ۳) ۷- ۴) ۹-

Ⓒ ۱۴- معادلهٔ $A^2=I$ در مجموعهٔ ماتریس‌های قطری از مرتبهٔ n چند جواب دارد؟

۱) n ۲) $2n$ ۳) 2^n ۴) بی‌شمار

Ⓑ ۱۵- اگر $A_{2\times2}$ باشد، معادلهٔ $A^2-A=\overline{O}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

توان‌های ماتریس

(B) ۱۶- اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) بالا مثلثی ۲) پایین مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

(B) ۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه حاصل A^4-B^{40} برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&81\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}81&0&0\\0&16&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&15&0\\0&0&80\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}80&0&0\\0&15&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(A) ۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه در ماتریس A^{100} مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

(A) ۱۹- اگر $A_{n\times n}$ و $A^3=I$ باشد، آن‌گاه حاصل A^{200} کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) A^2 ۴) $3A$

(A) ۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}0&\tan\alpha\\\cot\alpha&0\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{20}-A^{19}$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $A-I$ ۴) $I-A$

(A) ۲۱- اگر $M=\begin{bmatrix}0&-k\\\frac{1}{k}&0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس M^{1001} برابر کدام است؟

۱) I ۲) M ۳) $-I$ ۴) kM

(B) ۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس $A^{313!}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}4&9&25\\1&16&25\\1&9&16\end{bmatrix}$ ۲) I ۳) A ۴) $\overline{O}$

(A) ۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha&\sin\alpha\cos\alpha\\\sin\alpha\cos\alpha&\cos^2\alpha\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^5 کدام است؟

۱) $1+\sin^2\alpha$ ۲) $1+\sin2\alpha$ ۳) $1+\cos^2\alpha$ ۴) $1+\cos2\alpha$

(A) ۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟ ریاضی داخل ۹۷

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

(B) ۲۵- اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند به قسمی که $BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $B(AB)^{14}A$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{27}$ ۴) ۲۷

B ۲۶- اگر $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A+I)^n$ برابر کدام است؟

۱) $A + I$ ۲) $2^n A + I$ ۳) $(2^n - 1)A$ ۴) $(2^n - 1)A + I$

A ۲۷- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل‌جمع درایه‌های $A^{1!} + A^{2!} + A^{3!} + \cdots + A^{110!}$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵۵

B ۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1398 & 1399 \\ 0 & 0 & 1400 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A^5 - I)(A^{14} - I)$ برابر کدام است؟

۱) $A^2 - I$ ۲) $A^2 + I$ ۳) $A^{80} + I$ ۴) $A^{80} - I$

A ۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A(I - A)^4$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) A ۲) I ۳) $-A$ ۴) $\overline{O}$

B ۳۰- اگر $A^2 = 3A$ باشد، آن‌گاه A^{100} برابر کدام است؟

۱) $100A^{99}$ ۲) $99A$ ۳) $3^{99}A$ ۴) $3^{100}A$

B ۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل A^5 کدام است؟

۱) $3A$ ۲) $9A$ ۳) $27A$ ۴) $81A$

C ۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^n کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) 2^n ۴) 2^{n+1}

C ۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^n کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} n+1 & n-2 \\ n & n-1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & n-1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} n+1 & n-2 \\ n & 1-n \end{bmatrix}$

B ۳۴- مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۹۲ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۲۲

C ۳۵- A ماتریسی مربعی است به قسمی که $A^2 + A = -I$. در این صورت حاصل A^{1398} برابر کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\overline{O}$ ۴) $-A$

C ۳۶- اگر A، ماتریسی مربعی باشد به قسمی که $A^2 = A - 2I$، در این صورت A^8 کدام است؟

۱) $-3A + 2I$ ۲) $-3A - 2I$ ۳) $3A - 14I$ ۴) $-3A - 14I$

درس دوم: دترمینان و وارون ماتریس ۲×۲

دترمینان

B ۳۷- حاصل دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟ تمرین کتاب درسی

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

(C) ۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $|A|$ کدام است؟

۱) $2\log 1/25$ ۲) $\log 2/5$ ۳) $\log 3$ ۴) $\log 6/25$

(A) ۳۹- اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & m & -2\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{bmatrix}$ برابر ۲۰ و همسازه‌های آن $A_{11}=2A_{12}=-A_{13}=10$ باشند، m کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

(A) ۴۰- دترمینان ماتریس $A=[ij]_{3\times 3}$ برابر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) صفر

(B) ۴۱- با فرض $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$، حاصل $|A|+|2A^2|+|3A^3|+\cdots+|1399A^{1399}|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) صفر

(A) ۴۲- اگر $abc\neq 0$ باشد، از معادلهٔ $\begin{vmatrix}1 & a+1 & b+1\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}=0$ کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) $a+b+c=0$ ۲) $a-b+c=0$ ۳) $a+b-c=0$ ۴) $-a+b+c=0$

(B) ۴۳- اگر $\begin{vmatrix}\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\\ 1 & \sin 2\alpha & 2\\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه مقدار زاویهٔ α برحسب درجه کدام است؟

۱) ۷/۵- ۲) ۱۵- ۳) ۲۲/۵- ۴) ۳۰-

(A) ۴۴- به ازای کدام مقدار k، معادلهٔ دترمینان $\begin{vmatrix}x & 0 & k\\ 1 & x+1 & 0\\ 2 & 0 & x+2\end{vmatrix}=0$ فقط یک ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

(A) ۴۵- مقادیر x از معادلهٔ $\begin{vmatrix}0 & x-3 & x-2\\ x+3 & 0 & -4\\ x+2 & 6 & 0\end{vmatrix}=0$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۷

۱) ۱-، ۶- ۲) ۱-، ۶ ۳) ۱، ۶- ۴) ۱، ۶

(A) ۴۶- اگر $A^3=I$، آن‌گاه حاصل $\frac{|A+I|}{|A^2+I|}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

(A) ۴۷- در ضرب ماتریسی $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، حاصل $|A|$ برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۵-

(B) ۴۸- اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند به‌طوری که $|A|^2-5|A|+6=0$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟ تمرین کتاب درسی با تغییر

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

(A) ۴۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$ باشند، در این صورت حاصل $\frac{|BA|}{|AB|}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۳- ۴) صفر

(B) ۵۰- اگر A و B دو ماتریس مربعیِ هم‌مرتبه باشند به قسمی که $AB=\begin{bmatrix}8 & 11\\ -12 & -15\end{bmatrix}$، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند BA باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 11 & 2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0 & -3\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-12 & 11\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

C ۵۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، مجموعه جواب‌های X از معادلهٔ $|A-XI|=۰$ کدام است؟

۱) $\{-۲,۲,۴\}$ ۲) $\{-۱,۲,۵\}$ ۳) $\{-۲,۲,۵\}$ ۴) $\{-۳,۱,۴\}$

A ۵۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ چند مقدار صحیح می‌پذیرد؟ تمرین کتاب درسی با تغییر

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

A ۵۳- به کدام‌یک از درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$، دو واحد اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند؟

۱) $a_{۱۳}$ ۲) $a_{۳۲}$ ۳) $a_{۲۳}$ ۴) $a_{۲۲}$

A ۵۴- در دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}$ اگر به درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، a کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

A ۵۵- اگر به هر درایهٔ واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ریاضی خارج ۸۹

A ۵۶- به ازای کدام مقادیر a و b، اگر ۲ واحد به درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} a+۳ & b & c \\ ۳ & b+۲ & c \\ a & b & c+۱ \end{bmatrix}$ اضافه شود، آن‌گاه ۳ واحد به مقدار دترمینان آن افزوده می‌شود؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) a هرچه باشد، $b=-\frac{۱}{۲}$ ۲) a هرچه باشد، $b=\frac{۱}{۲}$ ۳) b هرچه باشد، $a=-\frac{۱}{۲}$ ۴) b هرچه باشد، $a=\frac{۱}{۲}$

B ۵۷- اگر از هر درایهٔ واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۵ & ۴ & -۳ \\ ۲a & a+۱ & a-۱ \\ ۲ & ۵ & -۴ \end{vmatrix}$، ۲ برابر شمارهٔ ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه چه‌قدر افزوده می‌شود؟

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۶ ریاضی خارج ۹۷

A ۵۸- مساحت محدود به نمودار $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{vmatrix}=۰$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

A ۵۹- نقطهٔ برخورد دو خط $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰$ و $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۴ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۰$ چه فاصله‌ای تا مبدأ مختصات دارد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

B ۶۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & m \end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای چند مقدار حقیقی m، حاصل $|AB|$ برابر صفر است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

B ۶۱- حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & n & n & \cdots & n \\ n & ۲ & n & \cdots & n \\ n & n & ۳ & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}_{n\times n}$ برابر کدام است؟

۱) $n!$ ۲) $(n-۱)!$ ۳) $(-۱)^n n!$ ۴) $(-۱)^{n-۱} n!$

Ⓒ ۶۲- اگر A یک ماتریس ۴×۴ و بالامثلثی باشد که درایه‌های آن همگی اعداد اول متمایز باشند و $|A| = ۲۱۰$ ، در این صورت حاصل $|A - I|$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۵

Ⓒ ۶۳- حاصل دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & ۲\sin^۲\alpha & \cos ۲\alpha \\ \cos^۲\beta & ۲\sin^۲\beta & \cos ۲\beta \\ \cos^۲\gamma & ۲\sin^۲\gamma & \cos ۲\gamma \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$

Ⓑ ۶۴- اگر $a + b + c = ۵$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۴+a & b & c \\ a & ۴+b & c \\ a & b & ۴+c \end{bmatrix}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۴

Ⓑ ۶۵- اگر $D = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ab & ac & bc \\ bc & ab & ac \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ab & b & a+b \\ bc & c & b+c \\ ac & a & a+c \end{vmatrix}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) $-D$ ۲) D ۳) $(a+b+c)D$ ۴) $abcD$

Ⓒ ۶۶- حاصل $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a-c \\ ۰ & c-b & c \\ b-a & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & b-c \\ ۰ & c-a & c \\ a-b & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a+b \\ ۰ & b-c & c \\ c-a & a & b \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $(a-b)^۳ + (b-c)^۳ + (c-a)^۳$ ۲) $(a+b)(b-c)(c-a)$

۳) $a^۳ + b^۳ + c^۳$ ۴) صفر

Ⓑ ۶۷- اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j به ترتیب شماره‌های سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{۳\times۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $ab(a+b)$ ۳) ab ۴) $a+b$ ریاضی داخل ۸۹

Ⓐ ۶۸- اگر $\begin{bmatrix} -۱ & |A| \\ |A| & ۴ \end{bmatrix} = ۲A$، آن‌گاه حاصل $||A|A|A|A|$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

Ⓒ ۶۹- برای ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۲، رابطهٔ $|A - ۳A|=|A|A||$ برقرار است. حاصل $|A^۳|A|A||$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲^۳$ ۲) $۲^۴$ ۳) $۲^۵$ ۴) $۲^۸$

Ⓐ ۷۰- اگر A ماتریسی از مرتبهٔ ۲ باشد و $A^۲ = -۴I$، دترمینان ماتریس $A + ۲I$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

Ⓒ ۷۱- دترمینان $\begin{vmatrix} ac & ab & ۱ \\ bc & ۱ & ab \\ ۱ & bc & ac \end{vmatrix}$ با کدام‌یک از دترمینان‌های زیر برابر است؟

۱) $\begin{vmatrix} c^۲ & b^۲ & a \\ c^۲ & b & a^۲ \\ c & b^۲ & a^۲ \end{vmatrix}$ ۲) $\begin{vmatrix} c & b & \frac{۱}{a} \\ c & \frac{۱}{b} & a \\ \frac{۱}{c} & b & a \end{vmatrix}$ ۳) $\begin{vmatrix} c^۲ & b^۲ & ۱ \\ c^۲ & ۱ & a^۲ \\ ۱ & b^۲ & a^۲ \end{vmatrix}$ ۴) صفر

Ⓑ ۷۲- اگر $m = \begin{vmatrix} a^۲ & a & ۱ \\ b^۲ & b & ۱ \\ c^۲ & c & ۱ \end{vmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\begin{vmatrix} a & ۱ & \frac{۱}{a} \\ b & ۱ & \frac{۱}{b} \\ c & ۱ & \frac{۱}{c} \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{m}{abc}$ ۳) $mabc$ ۴) $m + a + b + c$

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۲**

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}2x-y & 5\\ z & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=3\\ 2x+y=5\\ z=-2\end{cases}\Rightarrow x=2,y=1\Rightarrow x+y+z=2+1-2=1=y$$

۲ **۳** ماتریس قطری ماتریسی است که تمام درایه‌های خارج قطر اصلیش صفر باشند. پس:

$$AB=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a & -8+2a\\ b-3 & -2b-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قطری } AB}\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow a=4\\ b-3=0\Rightarrow b=3\end{cases}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=16+(-8)=8$$

۳ **۴**

$$A=[i-j]_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

از طرفی: $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}=\sum_{j=1}^{3}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j})=(a_{11}+a_{21}+a_{31})+(a_{12}+a_{22}+a_{32})+(a_{13}+a_{23}+a_{33})=$ مجموع همهٔ درایه‌های ماتریس $A=0$

۴ **۴** با توجه به ضابطه‌های داده‌شده، ابتدا فقط سطر دوم ماتریس A و ستون سوم ماتریس B را تشکیل می‌دهیم و سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}- & -\\ 1 & 3\\ - & -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}- & - & 0\\ - & - & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (AB)_{23}=(1\times 0)+(3\times 1)=3$$

۵ **۳**

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ m & 4\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}- & - & -\\ - & - & -\\ - & x_{32} & -\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$x_{32}=(\text{سطر سوم ماتریس } B)\times(\text{ستون دوم ماتریس } A)\xrightarrow{\text{طبق فرض}}0\Rightarrow\begin{bmatrix}m & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=0\Rightarrow 2m+12=0\Rightarrow m=-6$$

۶ **۲**

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}$$

$$A^2=\alpha A+\beta I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha & \alpha\\ 5\alpha & 4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta & \alpha\\ 5\alpha & 4\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ -2\alpha+\beta=9\Rightarrow -4+\beta=9\Rightarrow\beta=13\end{cases}$$

۷ **۳** اگر A را به صورت $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a & a\\ 2c & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a=0\Rightarrow a=0\\ 2c=8\Rightarrow c=4\end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید b و d در محاسبات نهایی شرکت نمی‌کنند و این یعنی هر دو اعداد دلخواهی هستند؛ پس بی‌شمار ماتریس برای A وجود دارد.

۸ **۳** ابتدا ماتریس A را از سمت چپ و سپس ماتریس B را از سمت راست فاکتور می‌گیریم. داریم:

$$A\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}B+\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}B\right)=A\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I}\Big)B=A(-I)B=-AB=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

۹ **۱** هر چند که A^2، B^2 و $B-A$ استفاده از اتحاد را تداعی می‌کنند، اما باید توجه کنیم که در این سؤال، مجوز لازم که همان شرط «تعویض‌پذیری» است را نداریم. پس باید چنین بنویسیم:

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2}_{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}-(AB+BA)+\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

۱۰ | **۴**

$$۲AB+BA=\overline{O}\Rightarrow BA=-۲AB$$

از طرف: $mB^۳A=AB^۳\Rightarrow mBB\underbrace{BA}_{-۲AB}=AB^۳\Rightarrow -۲mB(\underbrace{BA}_{-۲AB})B=AB^۳\Rightarrow ۴m(\underbrace{BA}_{-۲AB})B^۲=AB^۳$

$$\Rightarrow -۸mAB^۳=AB^۳\Rightarrow -۸m=۱\Rightarrow m=-\frac{۱}{۸}$$

۱۱ | **۳** سه گزارهٔ «الف»، «ب» و «ت» صحیح هستند که آن‌ها را اثبات و گزارهٔ «پ» را با مثال نقض رد می‌کنیم:

اثبات گزارهٔ (الف): الف) $AB^۲=A\xrightarrow[B\times]{\text{از چپ}}BAB^۲=BA\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{BA=B}B^۳=B\xrightarrow{\text{به توان ۲}}B^۶=B^۲$

اثبات گزارهٔ (ب): ب) $A^۲=A\times A\overset{A=AB^۲}{=\!=\!=}AB^۲A=(AB)(BA)\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{BA=B}(AB)B=AB^۲\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}A\Rightarrow A^۲=A\Rightarrow A^n=A$

اثبات گزارهٔ (ت): ت) $(AB)^۲=AB\times AB\overset{\text{خاصیت شرکت‌پذیری}}{=\!=\!=\!=}A(BA)B\overset{BA=B}{\underset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}}AB^۲\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}A$

برای رَدِ گزارهٔ «پ» کافی است فرض کنیم $A=I$ و $B=-I$.

۱۲ | **۲** سعی می‌کنیم با کمک‌گرفتن از فرض سؤال، AB و BA ایجاد کنیم و آن‌ها را در حکم قرار دهیم:

$$A=۲B^۲-۳I\begin{cases}\xrightarrow[\text{از راست}]{\times B}AB=۲B^۳-۳B\\ \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times B}BA=۲B^۳-۳B\end{cases}\Rightarrow AB=BA\qquad(۱)$$

$$A(\underline{BA})^۲B-B(\underline{AB})^۲A=A(\underline{BA})(\underline{BA})B-B(\underline{AB})(\underline{AB})A\overset{\text{خاصیت شرکت‌پذیری}}{=\!=\!=\!=}(AB)(AB)(AB)-(BA)(BA)(BA)\overset{(۱)}{=\!=}\overline{O}$$

۱۳ | **۱** سعی می‌کنیم با ضرب طرفین فرض سؤال در ماتریس A و ساده‌کردن آن، به حکم سؤال برسیم:

$$\left.\begin{array}{l}A^۲-۲A+۳I=\overline{O}\xrightarrow{\times A}A^۳-۲A^۲+۳A=\overline{O}\\ \text{از فرض}: A^۲=۲A-۳I\end{array}\right\}\Rightarrow A^۳-۲(۲A-۳I)+۳A=\overline{O}$$

$$\Rightarrow A^۳-A+۶I=\overline{O}\xrightarrow[A^۳-\alpha A-\beta I=\overline{O}]{\text{مقایسه با عبارت}}\alpha=۱,\beta=-۶\Rightarrow\alpha+\beta=-۵$$

۱۴ | **۳** اگر درایه‌های قطر اصلی ماتریس A به صورت $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و ... باشند، آن‌گاه درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ به فرم $a_{۱۱}^۲$، $a_{۲۲}^۲$ و ... هستند و با توجه به فرض $A^۲=I$ می‌توان نوشت $a_{۱۱}^۲=۱$. پس $a_{۱۱}=\pm۱$ و به همین ترتیب برای بقیهٔ درایه‌ها نیز دو وضعیت وجود دارد (۱ یا ۱-). بنابراین کلاً $\underbrace{۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n\text{ تا}}=۲^n$ حالت انتخاب یا جواب وجود دارد.

۱۵ | **۳** تذکر (مانند همهٔ تساوی‌های ماتریسی)، می‌دانیم که اگر $A^۲=A$ باشد نمی‌توانیم طرفین تساوی را تقسیم بر ماتریس A کنیم، زیرا A یک جدول شامل اعداد است و تقسیم جدول بر جدول تعریف‌نشده است. برای حل می‌نویسیم: $A^۲-A=\overline{O}\Rightarrow A(A-I)=\overline{O}$؛ ولی باز هم توجه می‌کنیم که اگر ضرب دو ماتریس صفر باشد، لزوماً نباید یکی از آن‌ها صفر باشد. از طرفی از تساوی اخیر به ریشه‌های احتمالی $A=\overline{O}$ یا $A=I$ می‌رسیم، اما از سوی دیگر با توجه به $A^۲=A$ می‌دانیم که ممکن است جواب از خانوادهٔ ماتریس‌های خودتوان مثل $A=\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۱\end{bmatrix}$ یا $A=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ و ... نیز باشد. پس پاسخ، بی‌شمار ریشه است.

۱۶ | **۴**

نیم‌نگاه

در تست‌های به این سبک، پس از محاسبهٔ $A^۲$ یا $A^۳$ به نظم یا الگوی خاصی می‌رسیم، در غیر این صورت از روی $A^۲$ به محاسبهٔ $A^۴$ می‌پردازیم، یعنی $A^۴=(A^۲)^۲$ و برای صرفه‌جویی در زمان، $A^۳$ را محاسبه نمی‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}$$

$$A^۴=A^۲\times A^۲=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

۱۷ ۳

نکات ① برای به توان رساندن ماتریس‌های قطری فقط کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم.

② برای ماتریس $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$، توان‌های زوج برابر I و توان‌های فرد برابر خود $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ هستند.

$$\begin{cases}A^4=\begin{bmatrix}(-1)^4&0&0\\0&2^4&0\\0&0&3^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&81\end{bmatrix}\\ B^{40}=I\end{cases}\Rightarrow A^4-B^{40}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&15&0\\0&0&80\end{bmatrix}$$

۱۸ ۳

نیم‌نگاه

گاهی در طی به توان رساندن ماتریس‌ها به I یا $-I$ می‌رسیم که در این صورت، افزایش تدریجی توان (که از طریق ضرب طرفین تساوی در A است) را متوقف کرده و طرفین تساوی را به فراخور نیاز به توان بزرگ می‌رسانیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I\Rightarrow A^3=-I\xRightarrow{\text{به توان ۳۳}}A^{99}=-I^{33}=-I\xRightarrow{\times A}A^{100}=-A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-1$$

۱۹ ۳

$$\begin{array}{r|l}200&3\\ \hline -18&66\\ 20&\\ -18&\\ 2&\end{array}\quad\Rightarrow\quad A^3=I\xRightarrow{\text{به توان ۶۶}}(A^3)^{66}=I^{66}\Rightarrow A^{198}=I\xRightarrow{\times A^2}A^{200}=A^2$$

۲۰ ۴

$$\left.\begin{array}{l}A^2=\begin{bmatrix}0&\tan\alpha\\\cot\alpha&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\tan\alpha\\\cot\alpha&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\\ A^3=A^2\times A=IA=A\xRightarrow{\text{۱۹ عدد فرد است}}A^{19}=A\\ A^4=A^2\times A^2=I\times I=I\xRightarrow{\text{۲۰ عدد زوج است}}A^{20}=I\end{array}\right\}\Rightarrow A^{20}-A^{19}=I-A$$

۲۱ ۲

$$M=\begin{bmatrix}0&-k\\\frac{1}{k}&0\end{bmatrix}\Rightarrow M^2=\begin{bmatrix}0&-k\\\frac{1}{k}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-k\\\frac{1}{k}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I\Rightarrow M^2=-I\Rightarrow M^{1001}=(M^2)^{500}\times M=I\times M=M$$

۲۲ ۳

نیم‌نگاه

گاهی در طی افزایش توانِ یک ماتریس، به $A^2=A$ می‌رسیم که در این صورت به ماتریس A «خودتوان» می‌گویند. در این شرایط به راحتی می‌توان با الگویابی ثابت کرد که: $A^n=A$

اثبات

$$A^2=A\xRightarrow{\times A}A^3=A^2\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}A\xRightarrow{\times A}A^4=A^2\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}A\Rightarrow A^n=n$$

مثال $A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$ و I سه نمونه از ماتریس‌های خودتوان‌اند.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=A\Rightarrow$$ ماتریس A خودتوان است. $\Rightarrow A^n=A\Rightarrow A^{313!}=A$

۲۳ ۲

$$A^۲=\begin{bmatrix}\sin^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^۲\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^۲\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin^۴\alpha+\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha & \sin^۳\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^۳ a\\ \sin^۳\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^۳\alpha & \cos^۴\alpha+\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^۲\alpha\overbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}^{۱} & \cos\alpha\sin\alpha\overbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}^{۱}\\ \sin\alpha\cos\alpha\underbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}_{۱} & \cos^۲\alpha\underbrace{(\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha)}_{۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin^۲\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^۲\alpha\end{bmatrix}=A$$

$\Rightarrow A^۲=A\Rightarrow$ خودتوان است $A\Rightarrow A^۵=A\Rightarrow$ مجموع درایه‌های $A^۵=$ مجموع درایه‌های A $=\sin^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha+\cos^۲\alpha=۱+\sin ۲\alpha$

۲۴ ۱ منظور از $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ ماتریسی است که سطرهای اول و دوم آن را ماتریس A و سطرهای سوم و چهارم آن را، ماتریس B تشکیل می‌دهند. حال می‌توان نوشت:

$$C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow C^۲=C\times C=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & - & - & -\\ - & ۴ & - & -\\ - & - & ۴ & -\\ - & - & - & ۴\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ $=۴\times ۴=۱۶$

۲۵ ۲

$$BA=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\Rightarrow (BA)^۲=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ خود توان است $BA\Rightarrow (BA)^n=BA$ (۱)

از طرفی: $B\underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{\text{۱۴بار}}A\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=\!=}\underbrace{(BA)(BA)\dots(BA)}_{\text{۱۵بار}}=(BA)^{۱۵}\overset{(۱)}{=}BA\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=۹\times\frac{۱}{۳}=۳$

۲۶ ۴

یادآوری ۱ بسط دوجمله‌ای نیوتن:

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

یادآوری ۲

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

$$A^۲=A\Rightarrow A^n=A\quad (۱)$$

$$(I+A)^n\overset{\text{یادآوری (۱)}}{=\!=}I+\binom{n}{۱}A+\binom{n}{۲}A^۲+\dots+\binom{n}{n}A^n\overset{(۱)}{=}I+\binom{n}{۱}A+\binom{n}{۲}A+\dots+\binom{n}{n}A$$

$$=I+A\left(\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}\right)\overset{\text{یادآوری (۲)}}{=\!=}I+A(۲^n-۱)$$

۲۷ ۳

نیم‌نگاه

① ماتریس مربعی A را پوچ توان گویند، هرگاه به ازای عددی طبیعی مثل n داشته باشیم $A^n=\bar{O}$. مانند ماتریس‌های $\begin{bmatrix}۶ & ۹\\ -۴ & -۶\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۳\\ ۲ & ۲ & ۶\\ -۱ & -۱ & -۳\end{bmatrix}$

② ماتریس‌های بالا مثلثی با قطر اصلی صفر، به ازای توان‌های $n\geq ۳$ پوچ توان‌اند.

$$A^{۱!}+A^{۲!}+A^{۳!}+\dots+A^{۱۰!}=\underbrace{\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}}_{A^{۱!}}+\underbrace{\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}}_{A^{۲!}}+\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}}_{\underbrace{A^{۳!}}_{\text{ماتریس پوچ}}}}^{\bar{O}}+\dots+\underbrace{\bar{O}}_{A^{۱۰!}}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=۱+۲+۱=۴$

۲۸ **۳** با توجه به این‌که ماتریس‌های بالامثلثی با قطر اصلی صفر، به ازای توان‌های $n \geq ۳$ پوچ توان‌اند، می‌توان چنین نوشت:

$$A^{۵}=\bar{O} \Rightarrow A^{۱۴}=\bar{O}$$

$$\underbrace{(A^{۵}-I)}_{\bar{O}-I}\underbrace{(A^{۱۴}-I)}_{\bar{O}-I}=(-I)\times(-I)=I^{۲}=I$$

با بررسی گزینه‌ها فقط به درستی گزینهٔ (۳) پی می‌بریم. زیرا $\underbrace{A^{۸۰}}_{\bar{O}}+I=I$

۲۹ **۱**

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۶ & ۹\\ -۴ & -۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶ & ۹\\ -۴ & -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow$$ (۱) ماتریس A پوچ توان است

از طرفی: $A(I-A)^{۴}=A\underbrace{\left(I^{۴}-\binom{۴}{۱}A+\binom{۴}{۲}A^{۲}-\cdots\right)}_{\text{بسط دوجمله‌ای نیوتن}}\overset{(۱)}{=}A\underbrace{-۴A^{۲}+۶A^{۳}-\cdots}_{\bar{O}}=A$

۳۰ **۳**

نکته اگر A یک ماتریس مربعی و k عدد حقیقی باشد، آن‌گاه داریم:

$$A^{۲}=kA \xRightarrow{(k\neq ۰)} A^{n}=k^{n-۱}A$$

بنابراین طبق نکتهٔ اخیر داریم:

$$A^{۲}=۳A \Rightarrow A^{۱۰۰}=۳^{۹۹}A$$

اثبات

$$A^{۲}=۳A \quad (۱)$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A\overset{(۱)}{=}۳A\times A=۳A^{۲}\overset{(۱)}{=}۳\times ۳A=۳^{۲}A \quad (۲)$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A\overset{(۲)}{=}۳^{۲}A\times A=۳^{۲}A^{۲}\overset{(۱)}{=}۳^{۲}\times ۳A=۳^{۳}A\xRightarrow{\text{الگویابی}}A^{n}=۳^{n-۱}A\Rightarrow A^{۱۰۰}=۳^{۹۹}A$$

توجه کنید که اثبات نکته در حالت کلی (که به‌جای عدد ۳، k قرار می‌گیرد) نیز دقیقاً به همین صورت است.

۳۱ **۴**

$$A^{۲}=kA \Rightarrow A^{n}=k^{n-۱}A \qquad (۱)$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۶\\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۶\\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۶ & ۱۸\\ \frac{۳}{۲} & ۳ & ۹\\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳\end{bmatrix}=۳A\xRightarrow{(۱)}A^{۵}=۳^{۴}A=۸۱A$$

۳۲ **۲**

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۳ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۸ & -۷ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow \text{به کمک الگویابی}\Rightarrow A^{n}=\begin{bmatrix}۲^{n} & -۲^{n}+۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=۲$

۳۳ **۱**

نیم‌نگاه

در به توان رساندن ماتریس‌ها، محاسبهٔ توان بیشتر از ۳ معمول نیست! یعنی معمولاً با توجه به A، $A^{۲}$ و $A^{۳}$ می‌توان به یک الگوی کلی رسید.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$$

به کمک الگویابی از محاسبات قبل می‌توان دریافت که در تمامی مراحل، درایه‌های قطر فرعی قرینهٔ یک‌دیگرند و همچنین مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۲ واحد است، پس پاسخ $\begin{bmatrix}n+۱ & -n\\ n & ۱-n\end{bmatrix}$ است.

۳۴ ۴

نکته

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$$

یادآوری

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

با توجه به نکته و یادآوری بالا می‌توان چنین نوشت:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+۳+\cdots+۱۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱۵(۱۵+۱)}{۲} & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۲۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۱۲۲$$

۳۵ ۱

نیم‌نگاه

گاهی با دیدن عبارت سه‌جمله‌ای در ماتریس‌ها مثل $A^۲+A+I$ به یاد قسمت چاق از اتحاد چاق‌ولاغر می‌افتیم:

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(a^۲+ab+b^۲)}_{\text{چاق}}=a^۳-b^۳$$

$$A^۲+A=-I\Rightarrow A^۲+A+I=\bar{O}\xrightarrow[(A-I)\times]{\text{ابتکار}}\overbrace{(A-I)}^{\text{لاغر}}\overbrace{(A^۲+A+I)}^{\text{چاق}}=\bar{O}\Rightarrow A^۳-I^۳=\bar{O}\Rightarrow A^۳=I\xrightarrow[(۱)]{\text{به توان ۴۶۶}}A^{۱۳۹۸}=I$$

$$۱۳۹۸\div ۳=۴۶۶\quad (۱)$$

۳۶ ۴

نیم‌نگاه

I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ خودش تعویض‌پذیر است، یعنی اتحادهای جبری بین آن‌ها برقرار است.

طبق فرض: $(۱)\ A^۲=A-۲I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^۴=A^۲+۴I-۴AI\stackrel{(۱)}{=}(A-۲I)+۴I-۴A=-۳A+۲I$

بنابراین: $A^۴=-۳A+۲I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^۸=۹A^۲+۴I^۲-۱۲AI\stackrel{(۱)}{=}۹(A-۲I)+۴I-۱۲A=-۳A-۱۴I$

۳۷ ۴ مطابق تعریف دترمینان ماتریس ۲ × ۲ عمل می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۱ & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۶ \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix}=-۱ & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}=۱۳ \end{vmatrix}=۱۳-(-۶)=۱۹$$

۳۸ ۲

یادآوری

(۱) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(۲) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

$$|A|=\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix}=(\log ۵)^۲-(\log ۲)^۲=(\log ۵-\log ۲)(\log ۵+\log ۲)=\log\frac{۵}{۲}\times\underbrace{\log(۵\times ۲)}_{۱}=\log ۲/۵$$

۳۹ ۳

نیم‌نگاه

هر چند که برای محاسبهٔ حاصل دترمینان از روش بسط می‌توان روی هر سطر یا ستون دلخواهی بسط را نوشت، اما گاهی اوقات مثل این سؤال، طراح نشانه‌ای در سؤال قرار می‌دهد تا ما متوجه شویم که در این شرایط خاص، فقط روی یک سطر یا ستون خاص می‌توانیم بسط بنویسیم.

طبق فرض: $A_{۱۱}=۲A_{۱۲}=-A_{۱۳}=۱۰$

سطر اول

در این سؤال باید بسط را روی سطر اول تعریف کنیم:

$$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}\stackrel{\text{از فرض}}{=}۱(۱۰)+m(۵)+(-۲)(-۱۰)\stackrel{\text{از فرض}}{=}۲۰\Rightarrow ۱۰+۵m+۲۰=۲۰\Rightarrow m=-۲$$

۴۰ ۴

$$|A|=\begin{vmatrix}۱\times۱ & ۱\times۲ & ۱\times۳\\ ۲\times۱ & ۲\times۲ & ۲\times۳\\ ۳\times۱ & ۳\times۲ & ۳\times۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۲&۳\\۲&۴&۶\\۳&۶&۹\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{در } R_۳ \text{ از ۳ فاکتور}]{\text{در } R_۲ \text{ از ۲ فاکتور}}۲\times۳\underbrace{\begin{vmatrix}۱&۲&۳\\۱&۲&۳\\۱&۲&۳\end{vmatrix}}_{\text{سطرهای تکراری}}=۶\times۰=۰$$

۴۱ ۴

نیم‌نگاه

دترمینان ماتریس‌های پوچ‌توان همواره برابر صفر است. زیرا:

$$\text{پوچ‌توان}\quad A^n=\bar{O}\xrightarrow{\det}|A^n|=|\bar{O}|\Rightarrow|A|^n=۰\Rightarrow|A|=۰$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۳\\۲&۲&۶\\-۱&-۱&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۳\\۲&۲&۶\\-۱&-۱&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\bar{O}$$

A ماتریسی پوچ‌توان است و داریم $A^{n\geq۲}=\bar{O}$. در نتیجه، طبق نیم‌نگاه می‌توان نوشت:

$$\underbrace{|A|}_{۰}+\underbrace{|۲A^۲|}_{۰}+\underbrace{|۳A^۳|}_{۰}+\underbrace{\cdots}_{۰}+\underbrace{|۱۳۹۹A^{۱۳۹۹}|}_{۰}=۰$$

۴۲ ۲ از روش بسط به محاسبهٔ حاصل دترمینان می‌پردازیم:

$$\begin{vmatrix}۱&a+۱&b+۱\\-a&۰&c\\-b&-c&۰\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط روی}}a_{۲۱}A_{۲۱}+a_{۲۳}A_{۲۳}=a(bc+c)-c(-c+ab+b)=ac+c^۲-bc=۰$$

$$\Rightarrow c\underbrace{(a+c-b)}_{۰}=۰\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{c\neq۰}a-b+c=۰$$

۴۳ ۱

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha&۰&\cos\alpha\\۱&\sin۲\alpha&۲\\\cos\alpha&۰&\sin\alpha\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط روی}}\sin۲\alpha(\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha)\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times۲}-۲\sin۲\alpha\times\cos۲\alpha=۱$$

$$\Rightarrow\sin۴\alpha=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow۴\alpha=-۳۰^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{-۳۰^\circ}{۴}=-۷/۵^\circ$$

۴۴ ۲

$$\begin{vmatrix}x&۰&k\\۱&x+۱&۰\\۲&۰&x+۲\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط روی}}\underbrace{a_{۱۲}A_{۱۲}}_{۰}+a_{۲۲}A_{۲۲}+\underbrace{a_{۳۲}A_{۳۲}}_{۰}=(x+۱)(-۱)^۴[x(x+۲)-۲k]\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}۰\Rightarrow(x+۱)(x^۲+۲x-۲k)=۰$$

این معادله همواره دارای ریشهٔ $x=-۱$ است؛ اما برای این‌که فقط یک ریشه داشته باشیم باید معادلهٔ درجه دوم $x^۲+۲x-۲k$ فاقد ریشه باشد. یعنی:

$$x^۲+۲x-۲k=۰:\Delta<۰\Rightarrow۴+۸k<۰\Rightarrow k<-\frac{۱}{۲}$$

که با توجه به گزینه‌ها فقط $k=-۱$ در نامساوی بالا صدق می‌کند.

۴۵ ۳ برای محاسبهٔ حاصل دترمینان از روش ساروس استفاده می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}۰&x-۳&x-۲&۰&x-۳\\x+۳&۰&-۴&x+۳&۰\\x+۲&۶&۰&x+۲&۶\end{array}\right|\Rightarrow۲x^۲+۱۰x-۱۲=۰\xrightarrow{\div۲}x^۲+۵x-۶=۰\Rightarrow(x+۶)(x-۱)=۰\Rightarrow x=-۶,۱$$

$$۶(x-۲)(x+۳)=۶x^۲+۶x-۳۶$$

$$-۴(x-۳)(x+۲)=-۴x^۲+۴x+۲۴$$

۴۶ ۲ از طرفین فرض دترمینان می‌گیریم. داریم:

$$A^۳=I\xrightarrow{\text{دترمینان}}|A^۳|=|I|\Rightarrow|A|^۳=۱\Rightarrow|A|=۱\qquad(۱)$$

$$\underbrace{\frac{|A+I|}{|A^۲+I|}=\frac{|A+I|}{|A^۲+A^۳|}}_{\text{طبق فرض}}=\frac{|A+I|}{|A^۲(I+A)|}=\frac{\cancel{|A+I|}}{|A^۲|\,\cancel{|A+I|}}=\frac{۱}{|A^۲|}\overset{(۱)}{=}۱$$

۴۷ ۲

نکته

$$\begin{bmatrix}۱&a\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&b\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&a+b\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}۱&۹\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&\overbrace{۱-۲+۳-۴+\cdots-۱۰}^{\text{علامت فردها مثبت و زوج‌ها منفی}}\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۵\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}۱&-۵\\۰&۱\end{vmatrix}=۱$$

توجه کنید که می‌توانستیم بدون انجام محاسبات بالا نیز به این سؤال پاسخ دهیم؛ زیرا حاصل $|A|$ برابر ضرب عناصر قطر اصلی یعنی ۱×۱ منهای ضرب عناصر قطر فرعی است که قطعاً می‌دانیم طبق نکتهٔ کادر نیم‌نگاه صفر است.

۴۸ ۴

طبق فرض: $|A|^۲-۵|A|+۶=۰\Rightarrow(|A|-۲)(|A|-۳)=۰\Rightarrow$

$$\begin{cases}|A|=۲\\|A|=۳\end{cases}\xrightarrow[\text{کم‌ترین حدس می‌زنیم}]{\text{با درایه‌های طبیعی}}\begin{cases}A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\\A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها در هر دو حالت ۶ است.

۴۹ ۴

$$\left.\begin{aligned}|AB|&=\left|[۱\ \ ۲\ \ -۳]_{۱\times۳}\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}_{۳\times۱}\right|=\left|[(-۲)+(-۲)+(-۹)]_{۱\times۱}\right|=|-۱۳|=-۱۳\\|BA|&=\left|\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}_{۳\times۱}[۱\ \ ۲\ \ -۳]_{۱\times۳}\right|=\begin{vmatrix}-۲&-۴&۶\\-۱&-۲&۳\\۳&۶&-۹\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در }R_۱\text{ از ۲}}۲\begin{vmatrix}-۱&-۲&۳\\-۱&-۲&۳\\۳&۶&۹\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{هستند}]{R_۱\text{ و }R_۲\text{ مساوی}}۲\times۰=۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{|BA|}{|AB|}=\frac{۰}{-۱۳}=۰$$

تذکر همان‌طور که در متن درسنامهٔ ویژگی‌های دترمینان تأکید شد، تساوی $|AB|=|BA|$ در شرایطی برقرار است که ماتریس‌های A و B مربعی و هم‌مرتبه باشند، در غیر این صورت باید حاصل دترمینان‌ها به صورت جداگانه محاسبه شوند.

۵۰ ۳

نیم‌نگاه

در نکات درسنامه آموختیم که اگر A و B ماتریس‌های مربعیِ هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه داریم: $|AB|=|BA|$

تنها گزینه‌ای که هر دو شرط کادر قبل را دارد گزینهٔ (۳) است.

گزینهٔ (۱) دترمینانی برابر ۱۲ دارد و مجموع درایه‌های قطر اصلیش برابر ۷- نمی‌شود.

در گزینه‌های (۲) و (۴) مجموع عناصر قطر اصلی ۷- است ولی دترمینان آن‌ها ۱۲ نمی‌شود.

۵۱ ۳

$$|A-XI|=\left|\begin{bmatrix}۲&۰&۳\\۰&۲&۰\\۴&۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}X&۰&۰\\۰&X&۰\\۰&۰&X\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}۲-X&۰&۳\\۰&۲-X&۰\\۴&۰&۱-X\end{vmatrix}\xlongequal{\text{طبق فرض}}۰$$

$$\xrightarrow{\text{بسط روی ستون دوم}}(۲-X)(\underbrace{(۲-X)(۱-X)-۱۲}_{X^۲-۳X-۱۰})=۰\Rightarrow(۲-X)(X-۵)(X+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}X=۲\\X=۵\\X=-۲\end{cases}$$

۵۲ ۱

$$A=\begin{bmatrix}۵|A|&|A|\\۵&۴|A|^۲\end{bmatrix}\xRightarrow{\det}|A|=\begin{vmatrix}۵|A|&|A|\\۵&۴|A|^۲\end{vmatrix}=۲۰|A|^۳-۵|A|\Rightarrow۲۰|A|^۳-۶|A|=۰\xRightarrow{\div۲}|A|(۱۰|A|^۲-۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=۰ & \text{صحیح است، قابل قبول}\\ ۱۰|A|^۲-۳=۰\Rightarrow|A|=\pm\sqrt{۰/۳} & \text{صحیح نیست، غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۵۳ ۴

نکته تغییرات درایه‌ای که همسازهٔ نظیرش صفر است در محاسبهٔ حاصل دترمینان بی‌اثر است. زیرا در محاسبهٔ دترمینان همان درایه در همسازهٔ نظیر خودش ضرب می‌شود.

با توجه به نکتهٔ قبل داریم:

$$a_{22} \text{ همسازهٔ نظیر } = (-1)^4 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}_{12-12} = 0 \Rightarrow |A| \xRightarrow{\text{بسط حول } R_2} a_{21}A_{21} + \underbrace{\underset{\text{هرعدد دلخواه}}{a_{22}}\ \underset{0}{A_{22}}}_{0} + a_{23}A_{23}$$

۵۴ ۲ **روش اول:** با توجه به نکتهٔ تست قبل، تغییر در درایه‌ای که همسازهٔ نظیر آن صفر است، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد. پس باید همسازهٔ A_{33} صفر باشد:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

روش دوم: ابتدا به درایهٔ a_{33}، ۴ واحد اضافه می‌کنیم و سپس دترمینان حاصل را مساوی دترمینان اولیه قرار می‌دهیم.

توجه برای افزایش سرعت بهتر است در سؤالاتِ به این سبک، برای محاسبهٔ دترمینان اولیه و ثانویه، از روش بسط حول سطرِ (یا ستون) شامل «درایهٔ در حال تغییر» استفاده کنیم.

مثلاً در این تست، بسط‌ها را روی سطر سوم (یا ستون سوم) می‌نویسیم تا دو جمله از سه جملهٔ بسط در هر دو دترمینان تکراری شوند و از مقایسه و محاسبه حذف گردند.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xRightarrow[R_3]{\text{بسط حول}} \cancel{4(1-3a)} \cancel{-2(2+9)} + 2(2a+3) = \cancel{4(1-3a)} \cancel{-2(2+9)} - 2(2a+3)$$

$$4(2a+3) = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵۵ ۳ ابتدا به هر درایهٔ سطر دوم دترمینان مورد نظر ۱ واحد اضافه می‌کنیم و سپس حاصل را مساوی دترمینان اولیه به علاوهٔ عدد ۶ قرار می‌دهیم. همان‌طور که در تست قبل نیز اشاره شد، بهتر است در سؤالات به این سبک، برای محاسبهٔ دترمینان اولیه و ثانویه از روش بسط حول سطرِ (یا ستون) شامل درایهٔ در حال تغییر استفاده کنیم.

مثلاً در سؤال حاضر، بسط‌ها را روی سطر دوم می‌نویسیم تا جملات بسط در هر دو دترمینان تکراری شوند و مقایسه و محاسبه آسان‌تر شود:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4+1 & -2+1 & 7+1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{طبق فرض}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 6 \xRightarrow[R_2]{\text{بسط روی}} -5\underbrace{(12-5a)} - (\underline{18}) - 8(\underline{\underline{15}}) = -4\underbrace{(12-5a)} - 2(\underline{18}) - 7(\underline{\underline{15}}) + 6$$

$$\Rightarrow -(12-5a) + 18 - 15 = 6 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

۵۶ ۱

$$\begin{vmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c+2 \\ a & b & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix} + 3$$

$$\xRightarrow[\text{حول } C_3 \text{ بسط می‌دهیم}]{\text{هر دو دترمینان را}} c\begin{vmatrix} 3 & b+2 \\ a & b \end{vmatrix} - (c+2)\begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix} + (c+1)\begin{vmatrix} a+3 & b \\ 3 & b+2 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 3 & b+2 \\ a & b \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a+3 & b \\ a & b \end{vmatrix} + (c+1)\begin{vmatrix} a+3 & b \\ 3 & b+2 \end{vmatrix} + 3$$

$$-(c+2)(3b) = -c(3b) + 3 \Rightarrow -3b\cancel{c} - 6b = -3b\cancel{c} + 3 \Rightarrow -6b = 3 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

a نیز در طی محاسبات حذف شد و این یعنی به ازای جمیع مقادیر a حکم سؤال برقرار می‌شود.

۵۷ ۴ برای سهولت محاسبات، دترمینان اولیه را $|A|$ و دترمینان ثانویه را $|B|$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $a = 0$ باشد. داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط حول} R_2} \underbrace{(-20+6)}_{-14} + \underbrace{(25-8)}_{17} = 3$$

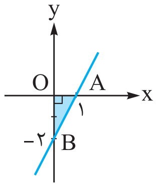
$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -2 & 1-4 & -1-6 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{بسط حول} R_2} \underbrace{2(-16+15)}_{-2} + \underbrace{(-3)(-20+6)}_{42} + \underbrace{7(25-8)}_{119} = 159 \Rightarrow |B| - |A| = 159 - 3 = 156$$

۵۸ ۱

نکته می‌توان معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ را از محاسبهٔ دترمینان $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ به دست آورد.

ابتدا حاصل دترمینان را محاسبه می‌کنیم تا مشخص شود منحنی حاصل چیست:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{\text{ساروس}} (\text{خط})\ y = ۲x - ۲ \quad \begin{cases} y = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x = ۰ \Rightarrow y = -۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{رسم شکل}}$$



$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲ = ۱$$

نتیجه‌گیری همان‌طور که در سؤال اخیر مشاهده کردید، یکی از کاربردهای دترمینان، نوشتن معادلهٔ خط است.

۵۹ **۲** حاصل هر دو دترمینان را از روش ساروس محاسبه می‌کنیم تا دو معادله خط به دست آیند.

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{matrix} \Rightarrow ۴x - ۲y - ۲ = ۰ \ \text{یا}\ ۲x - y = ۱$$

$$۰ \quad -x \quad ۲y \quad ۳x \quad ۰ \quad -۲$$

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۴ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ ۲ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{matrix} \Rightarrow -۳x - ۶y = ۰ \ \text{یا}\ x + ۲y = ۰$$

$$۴ \quad ۲x \quad ۲y \quad -x \quad -۴y \quad ۴$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} y = -\frac{۱}{۵}, x = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله از مبدأ} = \sqrt{\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ + \left(-\frac{۱}{۵}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۲۵} + \frac{۱}{۲۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۶۰ **۴**

نیم‌نگاه

حاصل $|A_{m\times n}B_{n\times m}|$ به شرط $m > n$ همواره برابر صفر است. ولی اگر $m < n$ یا $m = n$، نمی‌توان بدون انجام محاسبات اظهارنظر کرد!

در این تست $m = ۳ > n = ۲$ است، پس به ازای جمیع مقادیر حقیقی m داریم: $|AB| = ۰$

۶۱ **۴** به کمک الگویابی برای $n = ۲$ و $n = ۳$ به یک الگوی کلی می‌رسیم:

$$n = ۲ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} = ۲ - ۴ = -۲ = (-۱)^{۲-۱} ۲!$$

$$n = ۳ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط روی}} -۳ - ۰ + ۹ = ۶ = (-۱)^{۳-۱} ۳!$$

$$\Rightarrow \text{حاصل دترمینان} = (-۱)^{n-۱} n!$$

۶۲ **۲**

نیم‌نگاه

حاصل $|A|$ در ماتریس‌های بالامثلثی (پایین‌مثلثی یا قطری) برابر حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی است.

با توجه به نیم‌نگاه قبلی می‌توان نوشت: $|A| = P_۱ \times P_۲ \times P_۳ \times P_۴ = ۲۱۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$

بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی A عبارتند از: ۲، ۳، ۵ و ۷. پس درایه‌های روی قطر اصلی $A - I$ عبارتند از: ۱، ۲، ۴ و ۶. بنابراین:

$$|A - I| \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{ضرب درایه‌های}} ۶ \times ۴ \times ۲ \times ۱ = ۴۸$$

۶۳ **۱** از عددگذاری استفاده می‌کنیم. مثلاً قرار می‌دهیم: $\alpha = \beta = \gamma = \pi$ حال داریم:

$$\begin{vmatrix} \cos ۲\pi & ۲\sin^۲ \pi & \cos^۲ \pi \\ \cos ۲\pi & ۲\sin^۲ \pi & \cos^۲ \pi \\ \cos ۲\pi & ۲\sin^۲ \pi & \cos^۲ \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{همهٔ سطرها برابرند}} ۰$$

لازم به ذکر است که مقدار گزینهٔ «۴» نیز به ازای $\alpha = \pi$ برابر صفر می‌شود. یعنی $\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\pi = ۰$. این در حالی است که به ازای بی‌شمار مقدار دیگر برای α حاصل این گزینه صفر نمی‌شود.

۶۴ **۴**

نیم‌نگاه

دترمینان ماتریس‌های مثلثی و قطری برابر است با ضرب عناصر روی قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{vmatrix} = adf$$

با توجه به فرض $a+b+c=5$ از عددگذاری استفاده می‌کنیم. مثلاً قرار می‌دهیم: $c=0$، $b=0$ و $a=5$. داریم:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 9\times 4\times 4 = 144$$

۶۵ | ۱ از عددگذاری استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم: $c=-1$، $b=0$ و $a=1$. داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط روی سطر سوم}} -1$$

$$\text{حکم سؤال} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 = -D$$

۶۶ | ۲ **روش اول:** حل به روش عددگذاری؛ فرض می‌کنیم: $a=0$، $b=1$ و $c=2$. داریم:

$$\text{حکم سؤال}: \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{-2} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{2} + \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-2} = -2$$

روش دوم: دترمینان ماتریس پایین مثلثی برابر ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است. پس داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 \\ c & b-c & 0 \\ b & a & c-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b-c & 0 & 0 \\ c & c-a & 0 \\ b & a & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ c & c-b & 0 \\ b & a & b-a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(b-c)(c-a) + (b-c)(c-a)(a-b) + \underbrace{(a-c)}_{-(c-a)}\underbrace{(c-b)}_{-(b-c)}(b-a)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (b-c)(c-a)(\overbrace{(a+b)+(a-b)+(b-a)}^{(a+b)}) = \underbrace{(a+b)}_{1}\underbrace{(b-c)}_{-1}\underbrace{(c-a)}_{2} = -2$$

که فقط حاصل گزینهٔ «۲» به ازای این مقادیر، برابر -2 می‌شود.

۶۷ | ۱

نیم‌نگاه

در روش عددگذاری، ابتدا عددهای انتخابی را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم و پس از این‌که اطمینان حاصل کردیم که گزینه‌ها برابر نمی‌شوند، آن اعداد را در صورت سؤال نیز قرار می‌دهیم.

ابتدا دترمینان ماتریس A را تشکیل می‌دهیم: $|A| = \begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ 2a+b & 2a+2b & 2a+3b \\ 3a+b & 3a+2b & 3a+3b \end{vmatrix}$. حال به کمک عددگذاری، فرض می‌کنیم $b=2$ و $a=1$. داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از } R_2 \text{ در } 2} 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{matrix} = 2(279-279) = 0$$

$$\underbrace{105 \quad 84 \quad 90}_{279} \qquad \underbrace{81 \quad 100 \quad 98}_{279}$$

۶۸ | ۳ از طرفین فرض سؤال دترمینان می‌گیریم. داریم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -1 \\ 4 & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} |2A| = \begin{vmatrix} |A| & -1 \\ 4 & |A| \end{vmatrix} \Rightarrow 2^2|A| = |A|^2+4 \Rightarrow |A|^2-4|A|+4=0 \Rightarrow (|A|-2)^2=0 \Rightarrow |A|=2 \quad (1)$$

$$|\underbrace{|2A|}_{\text{عدد}}A| = |2A|^2|A| = |2A|^2\times 2 = (2^2\underbrace{|A|}_{2})^2\times 2 = (2^3)^2\times 2 = 2^7 = 128$$

۶۹ | ۳ برای حل این مسائل از دو ویژگی $|A^n| = |A|^n$, $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$ استفاده می‌کنیم.

$$||A|A-3A| = |A| \Rightarrow |A(\underbrace{|A|-3}_{\text{عدد}})| = |A| \Rightarrow (|A|-3)^2\cancel{|A|} = \cancel{|A|} \begin{cases} \to (|A|-3)^2=1 \Rightarrow |A|-3=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |A|=4 \\ |A|=2 \end{cases} \\ \to |A|=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\underbrace{|A|}_{\text{عدد}}A^3| = |A|^2|A|^3 = |A|^5 = \begin{cases} 4^5 \\ 2^5 \\ 0 \end{cases}$$

۷۰ ۴

نیم‌نگاه

گاهی در حل تست‌های دترمینان، محاسبهٔ دترمینان توان دوم حکم و جذرگرفتن از پاسخ نهایی مفید است.

$$A^2=-4I \xrightarrow{\det} |A^2|=|-4I| \Rightarrow |A|^2=16 \Rightarrow |A|=\pm 4 \quad (1)$$

ابتکار : $|(A+2I)^2|=|A^2+4I+4A|=|-4I+4I^2+4A|=4^2|A|=16|A| \Rightarrow |(A+2I)^2|=|A+2I|^2=16|A| \xrightarrow[|A+2I|^2\geq 0]{|A|=\pm 4 \text{ و } (1)} 64$

$\Rightarrow |A+2I|=\pm 8$

۷۱ ۳ از سطر اول a، از سطر دوم b و از سطر سوم c فاکتور می‌گیریم. سپس آن‌ها را به ترتیب در ستون اول و دوم و سوم ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ ab & 1 & bc \\ ac & bc & 1 \end{vmatrix}=(a\,b\,c)\times\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & b & c \\ a & \frac{1}{b} & c \\ a & b & \frac{1}{c} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$$

۷۲ ۲ **روش اول:**

$$m=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\text{ابتکار}}{=} \begin{vmatrix} a\times\frac{1}{a} & a\times 1 & a\times a \\ b\times\frac{1}{b} & b\times 1 & b\times b \\ c\times\frac{1}{c} & c\times 1 & c\times c \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}=\frac{m}{abc}$$

روش دوم: لازم به ذکر است این تست را به راحتی از روش عددگذاری نیز می‌توان حل کرد.

۷۳ ۱ شرط وارون‌ناپذیری ماتریس آن است که دترمینانش برابر صفر باشد. پس ابتدا $A+2B$ را محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل دترمینانش را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$A+2B=\begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix}$$

شرط وارون‌ناپذیری : $\begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a^2+2a-35=0 \Rightarrow (a+7)(a-5)=0 \Rightarrow a=-7, a=5$

۷۴ ۳

نیم‌نگاه

شرط وارون‌پذیری ماتریس AB آن است که $|AB|\neq 0$.

$$|A\times B|=\left|\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1+a^2 & 3a-2 \\ 3a-2 & 14 \end{vmatrix}=14a^2+14-(3a-2)^2=5a^2+12a+10$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=144-4\times 5\times 10=-56<0$$

بنابراین معادلهٔ درجه دوم فوق ریشه ندارد، پس دترمینان ماتریس مورد نظر هرگز نمی‌تواند صفر باشد، پس به ازای جمیع مقادیر a وارون‌پذیر است.

۷۵ ۲ به درایه‌های سطر سوم ماتریس A، m واحد اضافه می‌کنیم و ماتریس جدید را B می‌نامیم. برای این‌که ماتریس B وارون‌ناپذیر باشد، باید دترمینان آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$|B|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1+m & -2+m & 1+m \end{vmatrix}=0 \xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{بسط روی}} 3\underbrace{(-4+2m+1+m)}_{3m-3}+\underbrace{(1+m)(-1-4)}_{-5m-5}=0 \Rightarrow 4m-14=0 \Rightarrow m=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

۷۶ ۴ از آن‌جا که به ازای هر عدد طبیعی n تساوی $A^n=A$ برقرار است، چنان‌چه قرار دهیم $n=2$ داریم $A^2=A$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$A^2=A \xrightarrow{\times A^{-1}} A=I$$

که این خلاف فرض است، پس A^{-1} وجود ندارد که این به معنی معکوس‌ناپذیری A است.

۷۷ ۲ از آن‌جا که $|A||A^{-1}|=1$ و تمام درایه‌های ماتریس‌های A و A^{-1} اعداد صحیح هستند، پس $|A|$ و $|A^{-1}|$ هر دو عدد صحیح هستند و لزوماً باید:

$$|A|=|A^{-1}|=\pm 1 \Rightarrow |A|^2+2=3$$