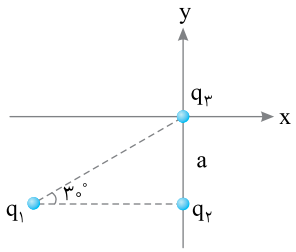
* ۶۴- در شکل روبه‌رو، $q_1=q_2=q_3=10\mu C$ و $a=50cm$ است. برآیند نیروی الکتریکی وارد بر بار q_3 را بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ مشخص کنید.



بخش سوم: میدان الکتریکی

میدان الکتریکی

در زندگی روزمره هرگاه شما بخواهید بر جسمی نیرو وارد کنید (آن را بکشید یا هُل دهید)، باید با آن تماس برقرار کنید، یعنی جسم را لمس کنید و بر آن نیرو وارد کنید و اگر یک شعبده‌باز را ببینید که بدون دست زدن به یک جسم آن را از زمین بلند می‌کند، دائما به دنبال نخ‌های نامرئی می‌گردید که شعبده‌باز به کمک آن‌ها جسم را از زمین بلند می‌کند و باور ندارید که بدون تماس بتوان به جسم نیرو وارد کرد و مثلاً آن را از زمین جدا کرد.

اما جالب است که هرگاه یک شانه‌ی پلاستیکی را با موی سر خود مالش می‌دهید و آن را باردار می‌کنید و با نزدیک کردن شانه به ذرات کاغذ شاهد ربوده شدن ذرات کاغذ توسط شانه می‌شوید، متعجب نمی‌شوید. انگار باور دارید در اطراف این شانه‌ی پلاستیکی باردار خاصیتی وجود دارد که قادر است بدون تماس با ذرات کاغذ آن‌ها را برباید و البته این حس شما درست است. این خاصیت فضای اطراف جسم باردار را که بر اجسام دیگر نیرو وارد می‌کند، **میدان الکتریکی** گویند.

تعریف ◀ **در فضای اطراف هر جسم باردار خاصیتی ایجاد می‌شود که هر جسم دیگری را که در این فضا واقع شود، تحت تأثیر قرار می‌دهد. به این خاصیت میدان الکتریکی می‌گویند.**

به بیان دیگر، میدان الکتریکی خاصیتی است که در اطراف هر جسم باردار ایجاد می‌شود، به گونه‌ای که هرگاه جسم باردار دیگری در این فضا قرار گیرد، بر آن نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

تعریف کمّی میدان الکتریکی: میدان الکتریکی به طور کمّی به صورت نیروی وارد بر یکای بار مثبت در هر نقطه تعریف می‌شود. مطابق شکل زیر، بار نقطه‌ای $+q_0$ را در نظر بگیرید که در میدان الکتریکی بار $+q$ و در نقطه‌ی A قرار گرفته است و نیروی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اگر میدان الکتریکی حاصل از بار $+q$ در نقطه‌ی A را با $\vec{E}$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

با توجه به رابطه‌ی $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$، یکای میدان الکتریکی نیوتون بر کولن $(\frac{N}{C})$ است.

ضرب عدد در بردار:

در صفحه‌ی ۷۵ کتاب ریاضی پایه‌ی هشتم ضرب عدد در بردار را خوانده‌اید:

یادآوری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

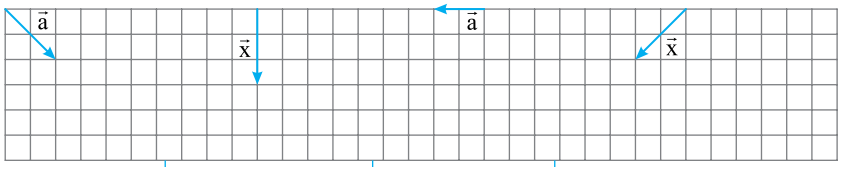
$$k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینهٔ بردار a باشد، می‌نویسیم: $\vec{b}=(-1)\vec{a}$ یا $\vec{b}=-\vec{a}$

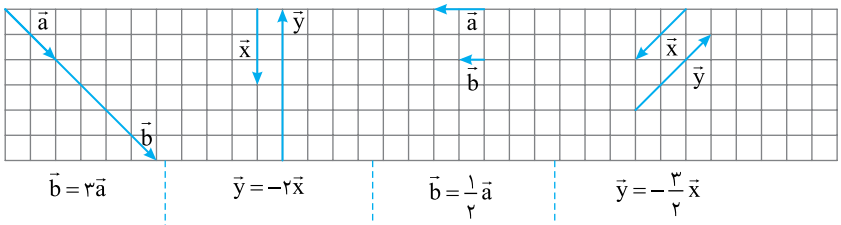
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\rightarrow\vec{b}=-\vec{a}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$

کار در کلاس صفحه‌ی ۷۵ کتاب ریاضی هشتم:

با توجه به بردارهای داده شده، بردار موردنظر را رسم کنید.



پاسخ: با توجه به ضرب عدد در بردار، حاصل‌ضرب یک عدد مانند k در یک بردار مانند a بردار جدیدی مانند b است که طول آن k برابر بردار a است. اگر k مثبت باشد $\vec{b}$ و $\vec{a}$ هم‌جهتند و اگر k عددی منفی باشد بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ درخلاف جهت هم هستند. اکنون بردارها را رسم می‌کنیم.



اکنون به رابطه‌ی $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_۰}$ دقت کنید، $\vec{E}$ در واقع حاصل‌ضرب کمیت عددی $\frac{۱}{q_۰}$ در بردار $\vec{F}$ است. بنابراین جهت نیروی وارد بر بار مثبت هم جهت میدان و بر بار منفی در خلاف جهت میدان است.

مسأله ۳۱ **ذره‌ای با بار $q=+۵\mu C$ در یک میدان الکتریکی قرار دارد و بر آن نیروی الکتریکی $۱/۵N$ وارد می‌شود.**

الف) میدان الکتریکی در محل ذره چند $\frac{N}{C}$ است؟

ب) اگر بار $q=-۲\mu C$ را در همان نقطه قرار دهیم، نیروی وارد بر آن توسط میدان چند نیوتون است؟

راه‌حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_۰}\Rightarrow E=\frac{۱/۵}{۵\times ۱۰^{-۶}}\Rightarrow E=۳\times ۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

بار q مثبت است و نیرو و میدان هم‌جهت هستند.

ب) نیروی وارد بر بار منفی خواهد شد:

$$\vec{F}=q_۰\vec{E}\Rightarrow F=-۲\times ۱۰^{-۶}\times ۳\times ۱۰^{۵}\Rightarrow F=-۰/۶N\Rightarrow|\vec{F}|=۰/۶N$$

مفهوم این علامت منفی این است که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسأله ۳۲ **بر بار $q=-۲\ mC$ در یک میدان الکتریکی نیروی $\vec{F}=۶\times ۱۰^{-۴}\vec{i}-۸\times ۱۰^{-۴}\vec{j}$ وارد می‌شود:**

الف) میدان الکتریکی در محل بار q را بر حسب بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌دست آورید.

ب) بزرگی میدان الکتریکی چند نیوتون بر کولن است؟

راه‌حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}\Rightarrow\vec{E}=\frac{۶\times ۱۰^{-۴}\vec{i}-۸\times ۱۰^{-۴}\vec{j}}{-۲\times ۱۰^{-۳}}\Rightarrow\vec{E}=-۰/۳\vec{i}+۰/۴\vec{j}$$

ب) بزرگی میدان الکتریکی برابر است با:

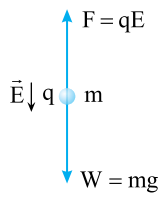
$$|\vec{E}|=\sqrt{E_x^{۲}+E_y^{۲}}=\sqrt{(-۰/۳)^{۲}+(۰/۴)^{۲}}\Rightarrow|\vec{E}|=۰/۵\ \frac{N}{C}$$

نیروی وارد بر بار الکتریکی در میدان الکتریکی

هرگاه بار q در میدان الکتریکی قرار گیرد، بر آن نیروی $\vec{F}=q\vec{E}$ وارد می‌شود. اگر بار q مثبت باشد، جهت نیروی وارد بر آن در جهت میدان الکتریکی و اگر بار q منفی باشد، جهت نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسأله ۳۳ **ذره‌ای با بار $-5\mu C$ و جرم $20mg$ در یک میدان الکتریکی، معلق و در حال تعادل است، اندازه‌ی میدان و جهت آن را مشخص کنید.** $(g=10\frac{N}{kg})$

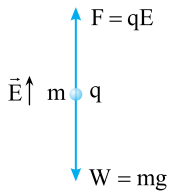
راه‌حل: ذره، معلق و در حال تعادل است، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. نیروی وزن می‌خواهد جسم را به پایین بکشد، بنابراین میدان الکتریکی باید به این ذره‌ی باردار نیروی F را مطابق شکل رو به بالا وارد کند. چون بار جسم منفی است، بنابراین جهت میدان الکتریکی رو به پایین است و اندازه‌ی آن خواهد شد:



$$\vec{F}_T=0\Rightarrow W=F\Rightarrow mg=|q|E\Rightarrow(20\times10^{-6})\times10=5\times10^{-6}\times E\Rightarrow E=40\frac{N}{C}$$

مسأله ۳۴ **گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم با بار الکتریکی $+5\ \mu C$ را در یک میدان الکتریکی که مقدار آن در تمام نقاط $3\times10^4\frac{N}{C}$ و جهت آن در امتداد قائم و رو به بالا است، رها می‌کنیم. اندازه و جهت شتاب گلوله را بیابید.** $(g=10\frac{N}{kg})$

راه‌حل: بار الکتریکی گلوله مثبت و جهت میدان الکتریکی رو به بالا است. نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان (رو به بالا) خواهد بود (مطابق شکل):



$$F=qE=5\times10^{-6}\times3\times10^4=0/15\ N$$

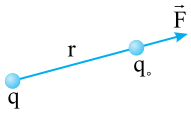
$$W=mg=0/01\times10\Rightarrow W=0/1\ N$$

نتیجه می‌گیریم برایند نیروهای وارد بر گلوله رو به بالا خواهد بود و شتاب نیز بنا به قانون دوم نیوتون رو به بالا است و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$\vec{F}_T=m\vec{a}\Rightarrow0/15-0/1=0/01a\Rightarrow a=5\frac{m}{s^2}$$

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره‌ی باردار

برای یافتن میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از آن، مطابق شکل بار آزمون q_0 [1] را در فاصله‌ی r از آن قرار می‌دهیم. بزرگی نیرویی که توسط بار q بر بار q_0 وارد می‌شود، برابر است با: $F=k\frac{|q|q_0}{r^2}$



بنا به تعریف میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا $(\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0})$ خواهیم داشت: $E=k\frac{|q|}{r^2}$

تذکر: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در هر نقطه از فضا، همواره در راستای خطی است که بار را به نقطه‌ی موردنظر وصل می‌کند.

مسأله ۳۵ **اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی ۴ و ۵ متری از آن برابر $9\frac{N}{C}$ است. بزرگی میدان در فاصله‌ی ۱ متری از بار نقطه‌ای q چند نیوتون بر کولن است؟**

راه‌حل: با توجه به رابطه‌ی اندازه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r، خواهیم داشت:

$$E=k\frac{|q|}{r^2}\Rightarrow\begin{cases}E_1=9\times10^9\times\frac{|q|}{(4)^2}\\E_2=9\times10^9\times\frac{|q|}{(5)^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{25}{16}$$

۱- بار آزمون به بار مثبت بسیار کوچکی گفته می‌شود که هرگاه در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرد آرایش میدان را به هم نمی‌زند.

از طرفی داریم: $E_۱ - E_۲ = ۹ \Rightarrow E_۱ - \frac{۱۶}{۲۵}E_۱ = ۹ \Rightarrow \frac{۲۵E_۱ - ۱۶E_۱}{۲۵} = ۹ \Rightarrow E_۱ = ۲۵\frac{N}{C}$

بنابراین میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی یک متری بار نقطه‌ای q که آن را $E_۳$ می‌نامیم، خواهد شد:

$$\frac{E_۳}{E_۱} = (\frac{r_۱}{r_۳})^۲ \Rightarrow \frac{E_۳}{۲۵} = (\frac{۴}{۱})^۲ \Rightarrow E_۳ = ۴۰۰\frac{N}{C}$$

تست۶: بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی ۲cm از بار نقطه‌ای $q_۱$، برابر E و در فاصله‌ی ۳cm از بار نقطه‌ای $q_۲$ برابر $\frac{۳}{۲}E$ است.

نسبت $\frac{|q_۱|}{|q_۲|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۲۷}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۸}$

پاسخ: رابطه‌ی بزرگی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

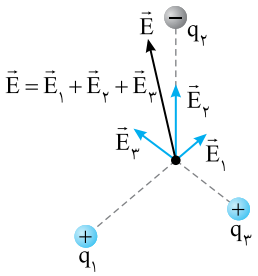
$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} E = k\frac{|q_۱|}{۲^۲ \times ۱۰^{-۴}} \\ \frac{۳}{۲}E = k\frac{|q_۲|}{۳^۲ \times ۱۰^{-۴}} \end{cases} \Rightarrow \frac{E}{\frac{۳}{۲}E} = \frac{|q_۱|}{|q_۲|} \times \frac{۹}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{|q_۱|}{|q_۲|} \times \frac{۹}{۴} \Rightarrow \frac{|q_۱|}{|q_۲|} = \frac{۸}{۲۷}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

برایند میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی ناشی از چند بار الکتریکی در نقطه‌ای از فضا، برابر مجموع میدان‌هایی است که هر بار در نبود سایر بارها در آن نقطه از فضا ایجاد می‌کند: ①

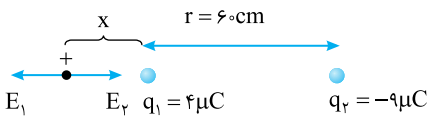
$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ + \dots$$



میدان الکتریکی $\vec{E}$ در محل بار آزمون، جمع برداری میدان های $\vec{E}_۱$ ، $\vec{E}_۲$ و $\vec{E}_۳$ در محل این بار است.

مسأله ۳۶ دو بار الکتریکی $q_۱ = ۴\,\mu C$ و $q_۲ = -۹\,\mu C$ در فاصله‌ی $r = ۶۰\,cm$ از هم قرار دارند. در چه نقطه‌ای برایند میدان الکتریکی دو بار صفر می‌شود؟

راه‌حل: نقطه‌ای که در آن اندازه‌ی میدان الکتریکی دو بار برابر می‌شود، باید به بار کوچک‌تر نزدیک‌تر باشد. از طرفی، میدان‌ها باید یک‌دیگر را خنثی کنند، بنابراین باید در خلاف جهت هم باشند. در نتیجه نقطه‌ی مورد نظر باید در خارج خط واصل دو بار باشد.



برای تعیین جهت میدان در یک نقطه یک بار فرضی مثبت در آن نقطه تصور می‌کنیم، بار $q_۱$ مثبت بوده و مطابق شکل بر بار مثبت نیرویی رانشی رو به چپ وارد کند. پس میدان بار $q_۱$، یعنی $E_۱$ به سمت چپ است و با همین استدلال، میدان بار $q_۲$ که منفی است، رو به راست است. اکنون میدان‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow k\frac{|q_۱|}{x^۲} = k\frac{|q_۲|}{(r+x)^۲} \Rightarrow \frac{۴}{x^۲} = \frac{۹}{(۶۰+x)^۲} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۳}{۶۰+x} \Rightarrow ۳x = ۱۲۰ + ۲x \Rightarrow x = ۱۲۰\,cm$$

بنابراین در فاصله‌ی ۱۲۰cm از بار $q_۱$ و ۱۸۰cm از بار $q_۲$ میدان الکتریکی صفر است.

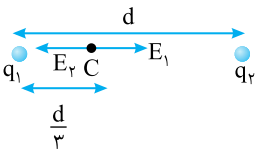
۱- این روش بر اصلی به نام اصل برهم نهی میدان‌های الکتریکی استوار است.

تست۷: دو بـار نقطـه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی d از یک‌دیگر قرار دارند. اگر در نقطه‌ی C بین دو بار و به فاصله‌ی $\frac{d}{3}$ از بار q_1 بزرگی میدان الکتریکی صفر باشد، نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) -4 ۴) ۴

پاسخ: بین دو بار میدان صفر شده است، بنابراین میدان دو بار در خلاف جهت هم بوده است و دو بار همنام (یا هر دو مثبت یا هر دو منفی) هستند، که برای سادگی هر دو را مثبت گرفته‌ایم.

اگر به شکل روبه‌رو دقت کنید، دلیل همنام بودن q_1 و q_2 را می‌فهمید. اما حل مسأله:

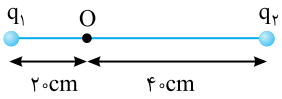


$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{q_1}{(\frac{d}{3})^2} = k\frac{q_2}{(\frac{2d}{3})^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نتیجه اگر دو بار همنام باشـند، میدان بارها در هر نقطه روی خط واصل دو بار و بین دو بار در خلاف جهت هم خواهد بود. اگر دو بار ناهمنام باشند، جهت میدان‌های حاصل از دو بار روی خط واصل و بین دو بار هم‌جهت خواهد بود.

مسأله ۳۷ **در شکل روبه‌رو دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی ۶۰cm از یک‌دیگر قرار دارند و میدان در نقطه‌ی O برابر $\vec{E}$ است. اگر بار q_2 حذف شود، میدان در همان نقطه برابر $\frac{\vec{E}}{2}$ می‌شود.**



معلوم کنید که بارهای q_1 و q_2 همنامند یا ناهمنام؟ نسبت $\frac{|q_2|}{|q_1|}$ را بیابید.

راه‌حل: در ابتدا میدان کل در نقطه‌ی O برابر است با:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \quad (1)$$

با حذف بار q_2 میدان در نقطه‌ی O ناشی از بار q_1 است، از این رو:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{E}}{2} + \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (3)$$

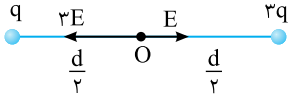
از مقایسـه‌ی رابطه‌های (۲) و (۳)، نتیجه می‌شـود میدان‌های E_1 و E_2 در نقطه‌ی O هم‌جهت بوده، بنابراین بارهای q_1 و q_2 ناهمنام هستند. از طرفی:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\vec{E}}{2} \\ \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}}{2} \end{cases} \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{(0/2)^2} = k\frac{|q_2|}{(0/4)^2} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = 4$$

تذکر: به روش حل دو مسأله زیر دقت کنید، برای حل چنین مسائلی، بهتر است این روش را به کار ببرید.

مسأله ۳۸ **دو بار نقطه‌ای همنام که بزرگی یکی از آن‌ها ۳ برابر دیگری است، در فاصله‌ی d از هم قرار دارند. بزرگی میدان برایند در وسط خط واصل دو بار برابر $150\frac{N}{C}$ است. اگر بار کوچک‌تر را حذف کنیم، بزرگی میدان در همان نقطه چند نیوتون بر کولن می‌شود؟**

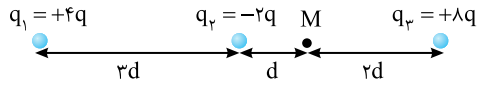
راه‌حل: اگر یکی از بارها q باشد، بنا به فرض مسأله بار دیگر 3q است. در حل این مسائل بـه این روش عمـل می‌کنیم که میدان بار q در نقطـه‌ی O را E فرض می‌کنیم. در این صورت میدان بار 3q در نقطه‌ی O، 3E می‌شود. میدان‌های بارهای همنام در بین دو بار در خلاف جهت هم هستند و اندازه‌ی برایند آن‌ها برابر با تفاضل اندازه‌ی آن‌ها است. با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت:



$$E_T = 3E - E = 2E \Rightarrow 2E = 150\frac{N}{C} \Rightarrow E = 75\frac{N}{C}$$

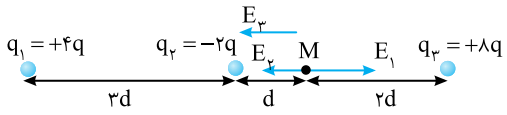
با حذف بار q، میدان در نقطه‌ی O تنها ناشی از بار 3q است و برابر $3E = 3\times 75 = 225\frac{N}{C}$ خواهد شد.

مسأله ۳۹ **اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $+q$ در فاصله‌ی d از بار برابر $۱۰^۵ \frac{N}{C}$ باشد، در شکل روبه‌رو میدان الکتریکی برایند (خالص) حاصل از سه بار الکتریکی $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ در نقطه‌ی M را حساب کنید.**



راه‌حل: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای با مقدار بار نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

با توجه به فرض مسأله $E = k\frac{q}{d^۲} = ۱۰^۵ \frac{N}{C}$ است.



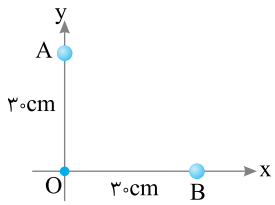
$$q_۱ \text{ میدان بار}: E_۱ = k\frac{۴q}{(۴d)^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۴}k\frac{q}{d^۲} = \frac{۱}{۴}\times ۱۰^۵ \frac{N}{C} \quad , \quad q_۲ \text{ میدان بار}: E_۲ = k\frac{۲q}{d^۲} \Rightarrow E_۲ = ۲k\frac{q}{d^۲} = ۲\times ۱۰^۵ \frac{N}{C}$$

$$q_۳ \text{ میدان بار}: E_۳ = k\frac{۸q}{(۲d)^۲} \Rightarrow E_۳ = ۲\frac{kq}{d^۲} = ۲\times ۱۰^۵ \frac{N}{C}$$

با توجه به جهت بردارهای $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ می‌توان نوشت:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ \Rightarrow E_T = |E_۱ - E_۲ - E_۳| = |\frac{۱}{۴}\times ۱۰^۵ - ۲\times ۱۰^۵ - ۲\times ۱۰^۵| \Rightarrow E_T = ۳/۷۵\times ۱۰^۵ \frac{N}{C}$$

مسأله ۴۰ **در شکل روبه‌رو دو بار نقطه‌ای $۶\,\mu C$ و $-۸\,\mu C$ به ترتیب در نقاط A و B قرار دارند:**

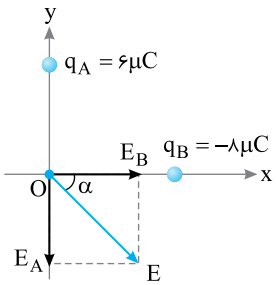


الف) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

ب) اندازه‌ی میدان را در نقطه‌ی O حساب کنید.

پ) زاویه‌ای را که بردار میدان برایند با محور xها می‌سازد را بیابید.

راه‌حل: الف) در نقطه‌ی O یک بار مثبت فرضی در نظر می‌گیریم و به کمک آن جهت میدان بارهای q_A و q_B را در نقطه‌ی O را مشخص می‌کنیم و میدان‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} E_A = ۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۶\times ۱۰^{-۶}}{۹\times ۱۰^{-۲}} = ۶\times ۱۰^۵ \frac{N}{C} \\ E_B = ۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۸\times ۱۰^{-۶}}{۹\times ۱۰^{-۲}} = ۸\times ۱۰^۵ \frac{N}{C} \end{cases}$$

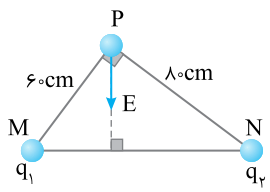
در این صورت میدان برایند در نقطه‌ی O خواهد شد: $\vec{E} = ۸\times ۱۰^۵ \vec{i} - ۶\times ۱۰^۵ \vec{j}$

ب) زاویه‌ای که بردار $\vec{E}$ با محور xها می‌سازد، برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{-۶\times ۱۰^۵}{۸\times ۱۰^۵} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۹۰^\circ + ۳۷^\circ = ۱۲۷^\circ \\ \alpha = -۳۷^\circ \end{cases}$$

با توجه به شکل $\alpha = -۳۷^\circ$ قابل قبول است.

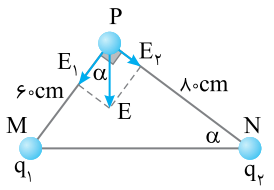
مسأله ۴۱ **در شکل روبه‌رو، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در رأس‌های M و N مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر قدرمطلق بار $q_۱$ برابر $۱۸\mu C$ باشد و بردار میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی P مطابق شکل باشد.**



الف) نوع بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را مشخص کنید.

ب) مقدار بار $q_۲$ چند میکروکولن است؟

راه‌حل: الف) میدان E را در امتداد ضلع‌های PN و PM تجزیه می‌کنیم، مطابق شکل میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ به‌ترتیب به سوی $q_۱$ و $q_۲$ هستند بنابراین بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هر دو منفی هستند.



ب) با توجه به شکل برای میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ به کمک مثلثات می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha=\frac{E_۲}{E_۱} \quad (۱)$$

در مثلث PMN نیز می‌توان نوشت:

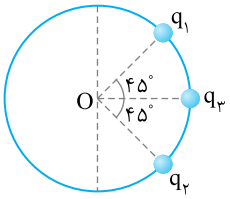
$$\tan\alpha=\frac{PM}{PN}=\frac{۶۰}{۸۰}=\frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

در رابطه‌ی (۱) از رابطه‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

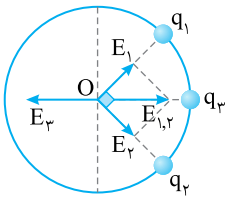
$$\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow E_۲=\frac{۳}{۴}E_۱\Rightarrow k\frac{|q_۲|}{(۰/۸)^۲}=\frac{۳}{۴}k\frac{۱۸}{(۰/۶)^۲}\Rightarrow|q_۲|=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱۸\times۶۴}{۳۶}\Rightarrow|q_۲|=۲۴\mu C$$

بنابراین $q_۲=-۲۴\mu C$ است.

مسأله ۴۲ **اگر در شکل روبه‌رو $q_۱=q_۲=-۴\mu C$ و میدان در مرکز دایره صفر باشد، $q_۳$ چند میکروکولن است؟**



راه‌حل: بردارهای میدان‌های بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را رسم می‌کنیم. بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هم‌اندازه و فاصله‌ی آن‌ها از O یکسان است بنابراین $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ هم‌اندازه هستند و همان‌گونه که بیان شد برایند دو بردار هم‌اندازه روی نیم‌ساز آن‌ها قرار می‌گیرد. به شکل نگاه کنید $\vec{E}_{۱,۲}$ برایند $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ است، برای آن‌که میدان در نقطه‌ی O صفر شود باید میدان $q_۳$ در خلاف جهت $\vec{E}_{۱,۲}$ و هم‌اندازه‌ی آن باشد.



اندازه میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را در O به‌دست می‌آوریم:

$$E_۱=E_۲=k\frac{|q|}{R^۲}$$

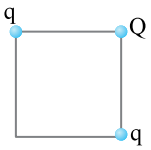
برایند آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$E_{۱,۲}=\sqrt{E_۱^۲+E_۲^۲}=\sqrt{۲E_۱^۲}\Rightarrow E_{۱,۲}=\sqrt{۲}E_۱=\sqrt{۲}k\frac{|q_۱|}{R^۲}$$

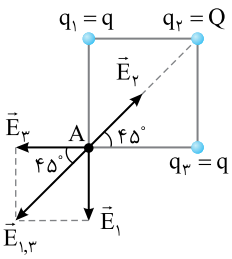
میدان $E_۳$ را با $E_{۱,۲}$ برابر قرار می‌دهیم:

$$E_{۱,۲}=E_۳\Rightarrow\sqrt{۲}k\frac{|q_۱|}{R^۲}\Rightarrow k\frac{|q_۳|}{R^۲}\Rightarrow|q_۳|=\sqrt{۲}|q_۱|\Rightarrow q_۳=+۴\sqrt{۲}\mu C$$

مسأله ۴۳ **مطابق شکل روبه‌رو، در سه رأس یک مربع، دو بار نقطه‌ای q و یک بار نقطه‌ی Q قرار داده‌ایم. نسبت $\frac{Q}{q}$ چقدر باشد، تا میدان الکتریکی در رأس چهارم مربع صفر شود؟**



راه‌حل: در شکل زیر، میدان الکتریکی دو بار با اندازه‌ی یکسان q در رأس چهارم مربع (نقطه‌ی A) را با $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۳$ نشان داده‌ایم. با این فرض که این دو بار مثبت باشند، اگر بار Q نیز مثبت باشد، برایند میدان الکتریکی در نقطه‌ی A صفر نخواهد شد. همین‌طور اگر بارهای q، منفی باشند، آن‌گاه اگر بار Q هم منفی باشد، میدان در نقطه‌ی A صفر نخواهد شد، پس باید Q و q ناهمنام باشند. در شکل زیر، $\vec{E}_۲$ میدان حاصل از بار Q در نقطه‌ی A است، با این فرض که بارهای q مثبت هستند و بار Q منفی است.



می‌دانیم $|\vec{E}_۱|=|\vec{E}_۳|$، پس برایند این دو بردار $\vec{E}_{۱,۳}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۳$ در امتداد قطر مربع قرار می‌گیرد و مقدار آن برابر است با:

$$|\vec{E}_{۱,۳}|=\sqrt{E_۱^۲+E_۳^۲}=\sqrt{۲}E_۱=\frac{\sqrt{۲}kq}{a^۲}$$

اندازه‌ی میدان بار Q در نقطه‌ی A برابر می‌شود با:

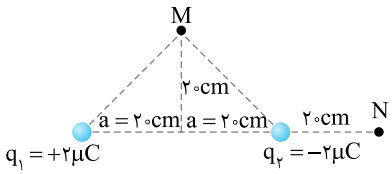
$$|\vec{E}_۲|=\frac{k|Q|}{(\sqrt{۲}a)^۲}=\frac{k|Q|}{۲a^۲}$$

شرط صفر شدن میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ی A به صورت زیر خواهد بود:

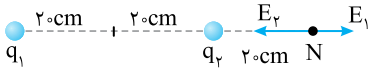
$$E_{۱۳}=E_{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}kq}{a^{۲}}=\frac{k|Q|}{۲a^{۲}}\Rightarrow\frac{Q}{q}=-۲\sqrt{۲}$$

علامت منفی در رابطه‌ی اخیر به این معناست که بارهای q و Q باید مختلف‌العلامت باشند. فرض اولیه بر این بود که $q>۰$ و $Q<۰$. اگر فرض اولیه به صورت $q<۰$ و $Q>۰$ نیز باشد، جواب نهایی تغییر نخواهد کرد.

مسأله ۴۴ **به دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ی ثابت $۲a$ از هم قرار دارند دو قطبی الکتریکی گویند. در شکل مقابل اندازه‌ی میدان الکتریکی دو قطبی در نقطه‌های N و M که M روی عمودمنصف دو بار و N روی خط واصل دو بار قرار دارد، به‌دست آورید.**



راه‌حل: میدان‌های ناشی از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطه‌ی N رسم می‌کنیم.



سپس اندازه‌ی هر میدان را حساب می‌کنیم.

$$E_۱=k\frac{|q_۱|}{r^{۲}}\Rightarrow E_۱=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{(۰/۶)^{۲}}=\frac{۹\times۲\times۱۰^{۳}}{۳۶\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow E_۱=۵\times۱۰^{۴}\ \frac{N}{C}$$

$$E_۲=k\frac{|q_۲|}{r^{۲}}\Rightarrow E_۲=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{(۰/۲)^{۲}}=\frac{۹\times۲\times۱۰^{۳}}{۴\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow E_۲=۴۵\times۱۰^{۴}\ \frac{N}{C}$$

میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی N برابر است با:

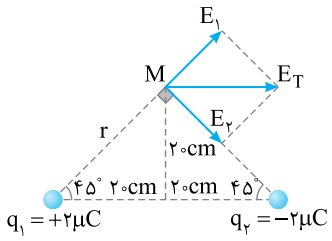
$$E_N=E_۲-E_۱=۴۵\times۱۰^{۴}-۵\times۱۰^{۴}\Rightarrow E_N=۴\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

فاصله‌ی $q_۱$ و $q_۲$ را از نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم.

$$r=\sqrt{۲۰^{۲}+۲۰^{۲}}=۲۰\sqrt{۲}cm$$

اکنون میدان روی عمود منصف را به‌دست می‌آوریم.

میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ با هم برابرند زیرا قدرمطلق بارهای $q_۱$ و $q_۲$ برابر و فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی M یکسان است.



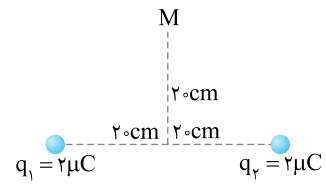
$$E_۱=E_۲=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{(۲۰\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲})^{۲}}\Rightarrow E_۱=E_۲=\frac{۱۸\times۱۰^{۳}}{۸\times۱۰^{-۲}}$$

$$\Rightarrow E_۱=E_۲=\frac{۹}{۴}\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

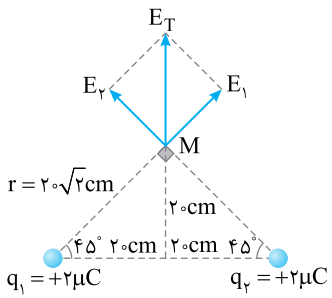
اکنون به کمک رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M حساب می‌کنیم:

$$E_{T_M}=\sqrt{E_۱^{۲}+E_۲^{۲}}=\sqrt{۲}E_۱\Rightarrow E_{T_M}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

مسأله ۴۵ **میدان الکتریکی خالص دو بار الکتریکی $q_۱=q_۲=۲\mu C$ روی عمودمنصف خط واصل دو بار در شکل روبه‌رو در نقطه‌ی M را حساب کنید.**



راه‌حل: میدان‌های بارهای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی M با هم برابر و بر هم عمودند.

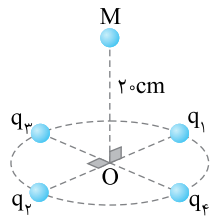


$$E=k\frac{|q|}{r^{۲}}\Rightarrow E_۱=E_۲=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{(۰/۲\sqrt{۲})^{۲}}\Rightarrow E_۱=E_۲=\frac{۹}{۴}\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

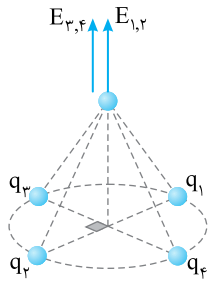
میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M خواهد شد:

$$E_{T_M}=\sqrt{E_۱^{۲}+E_۲^{۲}}\Rightarrow E_{T_M}=\sqrt{۲}E_۱\Rightarrow E_{T_M}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{C}$$

مسأله ۴۶ در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_۱=q_۲=q_۳=q_۴=+۲\mu C$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره حساب کنید. $(R=OM=۲۰cm)$



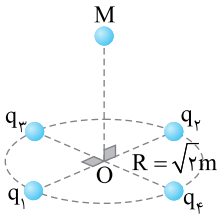
راه‌حل: نگران نباشید با مسأله سختی روبه‌رو نیستید. مسأله‌ی قبل را که میدان دو بار را بررسی می‌کرد، مرور کنید. در آن جا میدان دو بار را به‌دست آوردیم و مشاهده کردیم میدان خالص در امتداد عمود منصف و رو به بالا است. در این مسأله می‌توان میدان هر دو بار مقابل هم را مطابق مسأله‌ی قبل به‌دست آورده آن‌گاه به سادگی دو میدان به‌دست آمده را با هم جمع کرد و میدان الکتریکی خالص خواهد شد: $E_T=E_{۱,۲}+E_{۳,۴}$



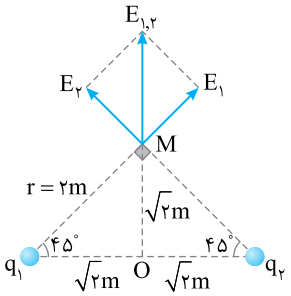
مقدار میدان‌های $E_{۱,۲}$ و $E_{۳,۴}$ را در مسأله‌ی قبلی به‌دست آورده‌ایم:

$$E_T=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times۱۰^۵+\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}\times۱۰^۵\Rightarrow E_T=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times۱۰^۵\ \frac{N}{C}$$

مثال: در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_۱=q_۲=q_۳=+۲\mu C$ و $q_۴=-۲\mu C$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره را حساب کنید. ($OM=\sqrt{۲}m$ و شعاع دایره $\sqrt{۲}m$ است.)



پاسخ: این گونه به چهار بار الکتریکی نگاه نکنید. این مسائل به راحتی قابل حل هستند. ابتدا میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به‌دست می‌آوریم.



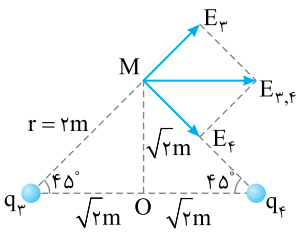
$$r=\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲}\Rightarrow r=۲m$$

$$E_۱=E_۲=k\frac{|q|}{r^۲}\Rightarrow E_۱=E_۲=۹\times۱۰^۹\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{(۲)^۲}\Rightarrow E_۱=E_۲=\frac{۹}{۲}\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E_{۱,۲}=\sqrt{E_۱^۲+E_۲^۲}=\sqrt{۲}E_۱\Rightarrow E_{۱,۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

این میدان در امتداد خط OM است. اکنون میدان الکتریکی ناشی از دو بار $q_۳$ و $q_۴$ را به‌دست می‌آوریم.

میدان‌های $E_۳$ و $E_۴$ هم‌اندازه میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ هستند.



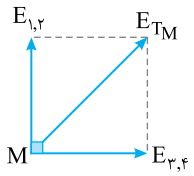
$$E_۳=E_۴=\frac{۹}{۲}\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E_{۳,۴}=\sqrt{E_۳^۲+E_۴^۲}\Rightarrow E_{۳,۴}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

میدان $E_{۳,۴}$ نیز خواهد شد:

این میدان بر خط OM عمود است.

اکنون می‌توانید میدان‌های $E_{۱,۲}$ و $E_{۳,۴}$ را در نقطه‌ی M برای خود رسم کنید.

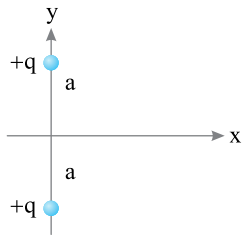


$$E_{T_M}=\sqrt{E_{۱,۲}^۲+E_{۳,۴}^۲}=\sqrt{۲}E_{۱,۲}$$

$$\Rightarrow E_{T_M}=\sqrt{۲}\times\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}\Rightarrow E_{T_M}=۹\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

مسأله‌ی خاص ۱

اکنون می‌خواهیم به سراغ حل یک مسأله خاص برویم، یک مسأله‌ی پارامتری با ریاضیات زیبا که برای درک آن باید حوصله کرد. باید با دقت مراحل مسأله را بجویم و سپس به راحتی قورت دهیم. به نتیجه‌ی زیبای انتهایی این مسأله دقت کنیم تا درک ما از مفهوم بار نقطه‌ای بالاتر رود.

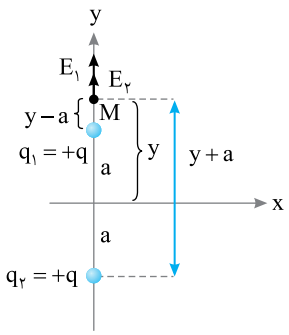


مسأله ۴۷ **دو بار نقطه‌ای همنام $+q$ مطابق شکل در نقاط $y=+a$ و $y=-a$ قرار دارند:**

الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور yها به فاصله‌ی y از مبدأ مختصات را بیابید. $(y>a)$

ب) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی عمودمنصف خط واصل دو بار و به فاصله‌ی x از مبدأ بیابید.

راه‌حل: الف) فاصله‌ی بار q_1 تا نقطه‌ی موردنظر برابر $y-a$ و فاصله‌ی بار q_2 تا آن نقطه برابر $y+a$ است. میدان‌های ناشی از دو بار را نمایش می‌دهیم. میدان‌ها هم‌جهت بوده و با هم جمع می‌شوند و میدان بار نزدیک‌تر به نقطه‌ی مورد نظر از میدان بار دیگر بزرگ‌تر است. میدان‌ها را به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم:



$$E_1=k\frac{q_1}{r_1^2}\Rightarrow E_1=k\frac{q}{(y-a)^2}\quad,\quad E_2=k\frac{q_2}{r_2^2}\Rightarrow E_2=k\frac{q}{(y+a)^2}$$

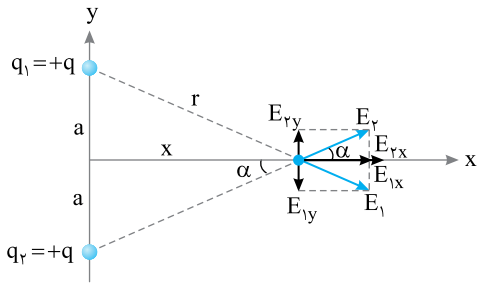
$$E=E_1+E_2\Rightarrow E=kq\left(\frac{1}{(y-a)^2}+\frac{1}{(y+a)^2}\right)$$

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow E=kq\times\frac{y^2+a^2+2ay+y^2+a^2-2ay}{(y^2-a^2)^2}\Rightarrow E=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\Rightarrow\vec{E}=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\vec{j}$$

به مقدار عجیب به‌دست آمده نگاه نکنید. اگر این مسأله را عددی به شما ارائه می‌دادیم به‌راحتی آن را حل می‌کردید. اکنون به سراغ قسمت ب می‌رویم و سپس با یک پرسش شما را به یک نتیجه‌ی زیبا می‌رسانیم.

ب) میدان هر بار را رسم می‌کنیم. اندازه‌ی میدان دو بار در نقطه‌ی مورد نظر برابر است. فاصله‌ی هر بار از نقطه‌ی مورد نظر خواهد شد:



$$r=\sqrt{a^2+x^2}$$

میدان هر بار را در نقطه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آوریم:

$$E_1=E_2=k\frac{q}{r^2}\Rightarrow E_1=E_2=k\frac{q}{(a^2+x^2)}$$

مؤلفه‌های E_{1y} و E_{2y} یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. در این صورت میدان برایند برابر است با:

$$E=E_{1x}+E_{2x}\xrightarrow{E_{1x}=E_{2x}}E=2E_{1x}\Rightarrow E=2E_1\cos\alpha$$

با توجه به شکل $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ است، از این رو:

$$E=2k\frac{q}{a^2+x^2}\times\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow E=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\vec{E}=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

۱- هدف از ارائه‌ی این مسأله‌ی خاص همان‌گونه که بیان می‌شود نتیجه‌ای است که از آن می‌خواهیم به‌دست آوریم. این نوع مسائل در برنامه‌ی رسمی کتاب درسی نیست.

پرسش: اگر در مسأله‌ی قبل فاصله‌ی نقطه‌ی مشاهده نسبت به a بسیار بزرگ باشد $(x \gg a$ و یا $y \gg a)$ میدان الکتریکی چگونه خواهد بود؟

پاسخ: وقتی مقدار $y \gg a$ باشد در واقع y^2 آن قدر از a^2 بزرگ‌تر است که می‌توان در رابطه‌ی $E=\frac{2kq(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}$ از a^2 صرف‌نظر کرد و آن را از رابطه برداشت. در این صورت:

$$E=\frac{2kq(y^2)}{(y^2)^2}=E=k\frac{(2q)}{y^2}$$

مانند این است که یک بار نقطه‌ای $(2q)$ در مرکز مختصات قرار دارد و شما میدان الکتریکی آن را در فاصله‌ی y از بار به‌دست آورده‌اید.

برای میدان روی عمود منصف دو بار نیز همین گونه است وقتی $x \gg a$ باشد، می‌توان a^2 را از رابطه حذف کرد.

$$E=\frac{2kqx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[a^2 \gg a^2]{\text{حذف } a^2} E=\frac{2kqx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E=k\frac{2q}{x^2}$$

نتیجه در فاصله‌ی دور از این دو بار نقطه‌ای می‌توان به جای دو بار q، یک‌بار 2q را در وسط خط واصل دو بار در نظر گرفت و میدان را به‌دست آورد.

این نتیجه، سرآغاز این مطلب است که در فواصل دور از اجسام گسترده‌ی باردار، می‌توان آن‌ها را به‌صورت بار نقطه‌ای فرض کرد. مثلاً میدان یک کره‌ی باردار با بار q در فواصل دور از کره را می‌توان میدان ذره‌ی بارداری در مرکز کره در نظر گرفت.

خطوط میدان الکتریکی

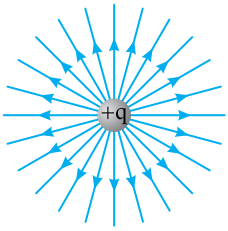
در انیمیشن‌ها بارها دیده‌اید که وقتی ضربه‌ای به سر یکی از شخصیت‌های ماجرا وارد می‌شود، برای نشان دادن گیجی شخص دور سر او تعدادی ستاره در حال حرکت یا گنجشک در حال حرکت رسم می‌کنند تا شما به گیجی شخص پی ببرید و با برطرف شدن گیجی شخص آرام آرام ستاره‌های دور سر او نیز محو می‌شود.

برای نمایش میدان الکتریکی اطراف یک بار الکتریکی نیز باید روشی انتخاب کنیم تا وجود میدان اطراف بار و ضعیف شدن میدان در فاصله‌ی دورتر و آرایش میدان را بتوانیم نمایش دهیم.

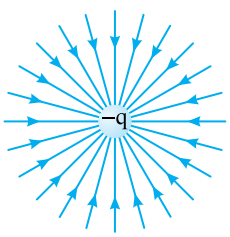
تعریف **خط‌های میدان: برای رسم و تجسم میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خط‌های فرضی جهت‌داری موسوم به «خطوط میدان الکتریکی» استفاده می‌شود.**

ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی

۱) خطوط میدان از بارهای مثبت خارج شده و به بارهای منفی منتهی می‌شوند. در شکل‌های زیر خطوط میدان الکتریکی برای یک ذره باردار رسم شده است.

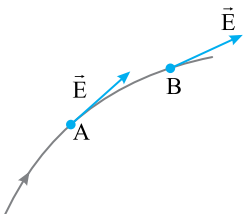


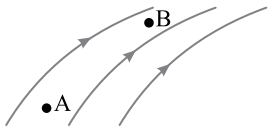
الف) خطوط میدان الکتریکی در جهت دور شدن از ذره‌ی باردار $+q$ است.



ب) خطوط میدان الکتریکی به سمت ذره‌ی باردار $-q$ است.

۲) میدان در هر نقطه، برداری است مماس بر خط میدانی که از آن نقطه می‌گذرد و با آن خط میدان، هم‌جهت است.



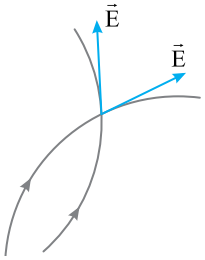


۳) تراکم خطوط میدان با بزرگی میدان متناسب است. در هر ناحیه که میدان قوی‌تر باشد، خطوط میدان، به یک‌دیگر نزدیک‌تر و فشرده‌ترند. $(E_A < E_B)$

۴) خطوط میدان برایند به جز در محل بار هیچ‌گاه یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی از هر نقطه فقط یک خط میدان می‌گذرد. در هر نقطه‌ی فضا فقط یک میدان الکتریکی وجود دارد که همان میدان الکتریکی خالص (برایند) است.

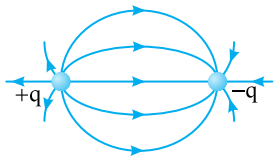
پرسش: چرا در ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی بیان می‌کنیم که این خطوط هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟

پاسخ: اگر فرض کنیم دو خط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع می‌کنند (مطابق شکل روبه‌رو) در این صورت دراین نقطه دو مماس می‌توان رسم کرد یعنی در یک نقطه دو میدان الکتریکی خالص وجود دارد در حالی‌که می‌دانیم در هر نقطه تنها یک میدان الکتریکی خالص وجود دارد از این رو دو خط میدان نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند.

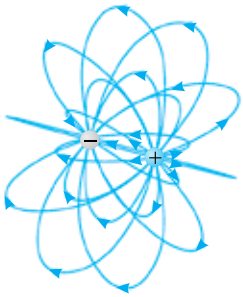


پرسش: خطوط میدان الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی را رسم کنید.

پاسخ: می‌دانیم دو قطبی الکتریکی یعنی دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ی ثابتی از هم قرار دارند.



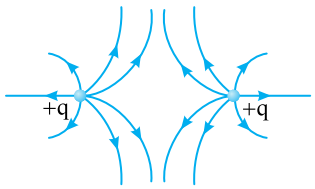
البته شکل واقعی خط‌های میدان الکتریکی دو قطبی مطابق شکل روبه‌رو سه بعدی است.



نمایش سه‌بعدی خطوط میدان
برای یک دوقطبی الکتریکی

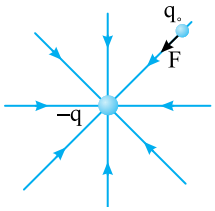
پرسش: خطوط میدان الکتریکی دو بار همنام $+q$ را رسم کنید.

پاسخ: خطوط میدان از دو بار مثبت خارج می‌شوند و در وسط خط واصل دو بار، میدان صفر است. از طرفی دو بار هم‌اندازه هستند، بنابراین خطوط میدان به شکل روبه‌رو و دارای تقارن نسبت به خط عمودمنصف است.

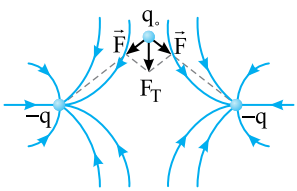


پرسش: آیا اگر یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، الزاماً مسیر حرکتش روی خط میدان است؟ توضیح دهید.

پاسخ: اگر یک بار آزمون q_0 مطابق شکل در مجاورت بار نقطه‌ای $-q$ رها شود، بار در امتداد خط میدان حرکت خواهد کرد.

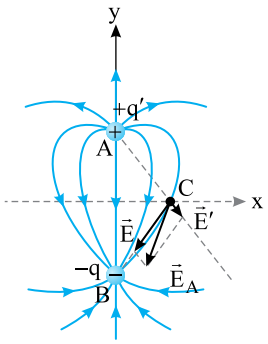


اما اگر همین بار به‌طور مثال روی عمودمنصف دو بار همنام و هم‌اندازه‌ی $-q$ قرار گیرد و رها شود، مطابق شکل، رو به وسط پاره‌خط واصل دو بار حرکت می‌کند که کاملاً مشخص است این مسیر در امتداد خط‌های خمیده‌ی میدان نخواهد بود.



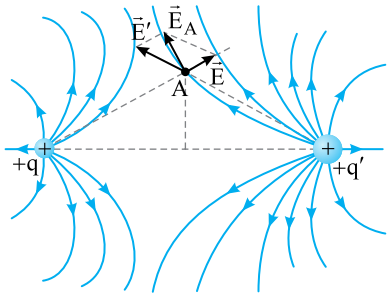
نتیجه هرگاه یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، لزومی ندارد که مسیر حرکت آن در امتداد یکی از خط‌های میدان باشد.

پرسش: اگر دو بار مختلف‌العلامت هم‌اندازه نباشند شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟ $(|q|>|q'|)$



پاسخ: اگر دو بار مثبت و منفی هم‌اندازه نباشند تعداد خط‌های میدان بار بزرگ‌تر بیش‌تر است و نزدیک بار کوچک‌تر خطوط میدان، انحنای بیش‌تری دارند و نزدیک بار بزرگ‌تر خطوط میدان انحنای کم‌تری داشته و به خط راست نزدیک‌تر هستند. اگر روی عمود منصف پاره‌خط واصل دو بار در نقطه‌ای مانند C دو میدان مربوط به دو بار $+q'$ و $-q$ را رسم کنیم، با توجه به این‌که فاصله‌ی این نقطه از دو نقطه‌ی A و B یکسان است و اندازه‌ی بار منفی بزرگ‌تر از اندازه‌ی بار مثبت فرض شده است، $\vec{E}'$ از $\vec{E}$ بزرگ‌تر است و برایند آن‌ها موازی خط واصل دو بار نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی C بر این بردار مماس است و خطوط میدان مطابق شکل می‌شوند.

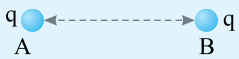
پرسش: اگر دو بار $+q$ و $+q'$ $(q'>q)$ در دو طرف یک پاره‌خط قرار گیرند، شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟



پاسخ: چون بارها هم‌اندازه نیستند شکل متقارن نخواهد بود و خطوط نزدیک بار کوچک‌تر انحنای بیش‌تری دارند، دقت کنید خط‌های خروجی از بار بزرگ‌تر نیز همواره با تعداد بیش‌تری رسم می‌شوند.

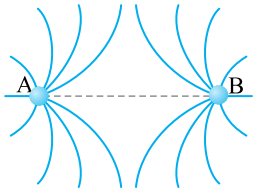
اگر روی عمود منصف پاره‌خط واصل دو بار در نقطه‌ای مانند A دو میدان $\vec{E}$ و $\vec{E}'$ حاصل از دو بار q و q' را رسم کنیم، $E'>E$ است زیرا q' از q بزرگ‌تر است. پس برایند این دو بیش‌تر به E' نزدیک است و منطبق بر راستای عمودمنصف نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی A باید مماس بر $\vec{E}_A$ رسم شود.

تست۸: دو بار هم‌اندازه و هم‌نام در دو نقطه‌ی A و B قرار گرفته‌اند. با حرکت از A به سمت B میدان چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

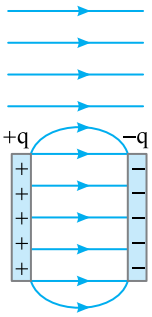
پاسخ: با توجه به شکل خطوط میدان، با حرکت از A به سمت B تراکم خطوط تا وسط پاره‌خط واصل دو بار کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین میدان الکتریکی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و گزینه‌ی (۴) درست است.



میدان الکتریکی یکنواخت

تعریف به میدان الکتریکی که اندازه، راستا و جهت آن در قسمتی از فضا ثابت باشد میدان الکتریکی یکنواخت گفته می‌شود.

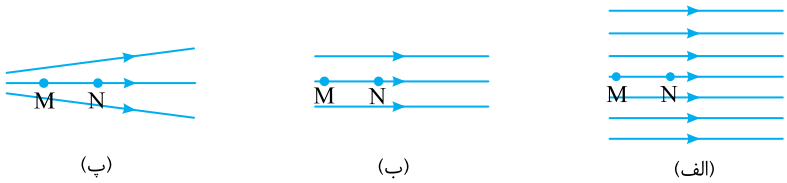
پرسش: خطوط میدان الکتریکی یکنواخت چگونه رسم می‌شود؟



پاسخ: از آن‌جا که تراکم خطوط مشخص‌کننده اندازه‌ی میدان است، بنابراین وقتی میدان الکتریکی در یک فضا یکنواخت است باید تراکم خط‌های میدان در همه‌ی نقاط آن فضا یکسان باشد، یعنی باید خط‌های میدان را به‌صورت خط‌های موازی با فاصله‌های یکسان رسم کرد.

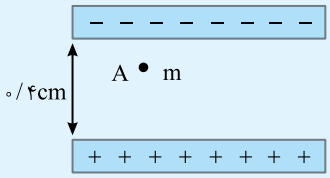
برای ایجاد میدان الکتریکی یکنواخت از دو صفحه‌ی رسانای موازی باردار که فاصله‌ی آن‌ها از هم کم و بار صفحه‌ها هم‌اندازه و ناهمنام است، استفاده می‌شود. در این حالت میدان در فضای بین این دو صفحه و دور از لبه‌ها، یکنواخت است.

پرسش: **در شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی در سه ناحیه از فضا رسم شده است. اگر ذره‌ی بارداری با بار مثبت q_0 را در نقطه‌ی M قرار داده و رها کنیم، در مسیر M تا N، شتاب حرکت ذره در هر شکل چگونه است؟**



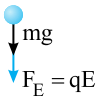
پاسخ: میدان الکتریکی در شکل (الف) و هم‌چنین شکل (ب) یکنواخت است و میدان از M تا N ثابت است، بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت است. اما در شکل (الف) تراکم خط‌های میدان بیش‌تر و میدان قوی‌تر است، بنابراین نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره در شکل (الف) از شکل (ب) بیش‌تر است. اما در شکل (پ) میدان الکتریکی یکنواخت نیست و با توجه به شکل از M تا N میدان در حال کاهش و نیروی وارد بر ذره نیز در حال کاهش است. بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت نیست و از M تا N شتاب در حال کاهش است. اما در هر سه شکل از M تا N سرعت در حال افزایش است.

تست ۹: در شکل روبه‌رو ذره‌ای با بار $-2pC$ و جرم $1mg$ را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $5\times10^6\ \frac{N}{C}$ در نقطه‌ی A مجاور صفحه‌ی منفی قرار داده و رها می‌کنیم. سرعت رسیدن گلوله به صفحه‌ی مثبت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۰۴ **۲)** ۰/۲
۳) ۰/۴ **۴)** ۰/۰۰۴

پاسخ: بنا به قضیه‌ی کار و انرژی، کار نیروی خالص برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است. نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم و برایند نیروها خواهد شد:



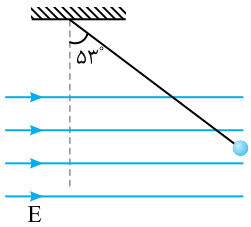
$$F_T = F_E + mg$$

$$W_T = \Delta K \Rightarrow (qE+mg)d = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow (2\times10^{-12}\times5\times10^6 + 10^{-6}\times10)\times4\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times10^{-6}v^2 \Rightarrow v^2 = 0/16 \Rightarrow v = 0/4\ \frac{m}{s}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

حل دو مسأله‌ی خاص برای میدان الکتریکی یکنواخت

مسأله ۴۸ **در شکل روبه‌رو ذره‌ای به جرم ۶۰ میلی‌گرم با بار $10\mu C$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از ریسمان سبکی آویزان و در تعادل است. بزرگی میدان و نیرویی که ریسمان بر ذره وارد می‌کند را بیابید.** $(\sin 53^\circ = 0/8)$

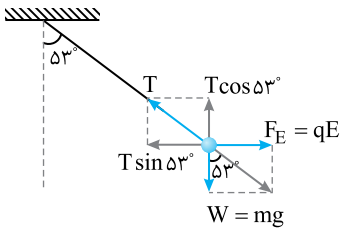


راه‌حل: ابتدا نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم. بر ذره سه نیرو وارد می‌شود:

۱) نیروی وزن توسط کره زمین W

۲) نیروی الکتریکی توسط میدان F_E

۳) نیروی ریسمان (T)

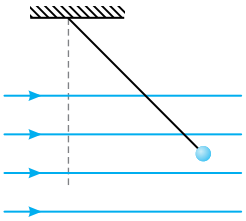


$$\tan 53^\circ = \frac{F_E}{W} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ} = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \frac{0/8}{0/6} = \frac{10\times10^{-6}\times E}{60\times10^{-6}\times10} \Rightarrow E = 80\ \frac{N}{C}$$

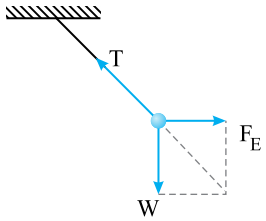
برای به‌دست آوردن نیروی ریسمان، T را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. چون ذره در تعادل است، مؤلفه‌ی قائم T با وزن ذره برابر است:

$$T\cos 53^\circ = mg \Rightarrow T\times0/6 = 60\times10^{-6}\times10 \Rightarrow T = \frac{6\times10^{-4}}{0/6} \Rightarrow T = 10^{-3}\,N$$

مسأله (۴۹) در شکل روبه‌رو یک ذره با جرم $۲۰g$ دارای بار الکتریکی $+۴\mu C$ از یک ریسمان سبک آویزان و در یک میدان الکتریکی یکنواخت در حال تعادل است. اگر میدان الکتریکی ناگهان حذف شود، ذره بلافاصله پس از حذف میدان با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی را بیابید.



راه‌حل: مسأله‌ی زیبایی است. نیروهای وارد بر ذره مطابق شکل سه نیروی وزن $W=mg$، نیروی الکتریکی $F=qE$ و نیروی کشش نخ است که برایند آن‌ها صفر است. هرگاه برایند سه بردار صفر شود، اندازه‌ی هر یک از آن بردارها هم‌اندازه‌ی بردار برایند دو بردار دیگر است:



$$\vec{F}_E+\vec{W}+\vec{T}=۰\Rightarrow|\vec{W}+\vec{T}|=|\vec{F}_E|$$

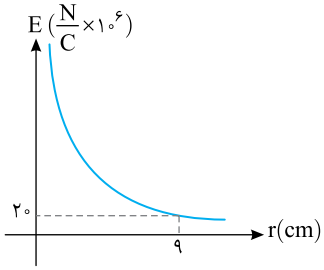
بلافاصله پس از حذف میدان و حذف F، دو نیروی T و W باقی می‌مانند که برایند آن‌ها هم‌اندازه‌ی نیروی F بوده است، از این رو:

$$F_T=ma\Rightarrow|\vec{T}+\vec{W}|=ma\Rightarrow F_E=ma\Rightarrow qE=ma\Rightarrow ۴\times۱۰^{-۶}\times E=۲\times۱۰^{-۲}\times۲\Rightarrow E=۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

تمرین‌های تشریحی بخش سوم

۶۵- بار الکتریکی $+۲\mu C$ در یک نقطه از میدان الکتریکی، نیرویی برابر $۵\times۱۰^{-۲}N$ وارد می‌شود، اندازه‌ی میدان الکتریکی را در این نقطه محاسبه کنید. (تجربی - خرداد ۹۳)

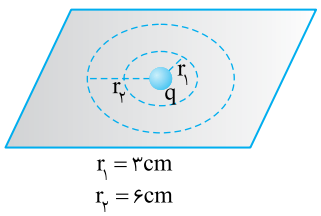
۶۶- نمودار $E-r$ ذره‌ای مطابق شکل روبه‌رو است:



الف) بار ذره را محاسبه کنید.

ب) اندازه‌ی میدان در $r=۳m$ برابر چند نیوتون بر کولن است؟

۶۷- مطابق شکل ذره‌ی بارداری درون صفحه‌ای قرار دارد. اگر بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، ۳×۱۰^۷ نیوتون بر کولن از بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۲) بیش‌تر باشد، اندازه‌ی بار ذره $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$ را بیابید.



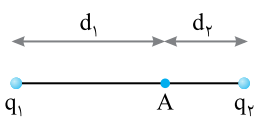
۶۸- اگر ذره‌ای با بار $q=-۲\mu C$ را در میدانی که بردار آن در SI به صورت $\vec{E}=(۱/۵\vec{i}-۲\vec{j})\times۱۰^۷$ است، قرار دهیم،

الف) بردار نیرو و اندازه‌ی نیرو را محاسبه کنید؟

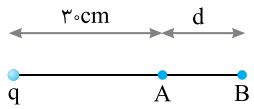
ب) اگر جرم ذره $۵g$ باشد و ذره تنها تحت تأثیر نیروی الکتریکی باشد شتاب را به‌دست آورید.

۶۹- میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱=+۲\mu C$ و $q_۲=+۳۲\mu C$ در فاصله‌ی ۱۶ سانتی‌متری از بار $q_۲$ صفر می‌باشد. فاصله‌ی دو بار الکتریکی از یک‌دیگر چند سانتی‌متر است؟ (ریاضی - خرداد ۹۳)

۷۰- در شکل روبه‌رو بزرگی میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی A برابر E است. اگر بار $q_۱$ خنثی شود، میدان الکتریکی در نقطه‌ی A بدون تغییر جهت برابر $۰/۵E$ می‌شود. دو بار را از نظر علامت و اندازه مقایسه کنید $(d_۱>d_۲)$.

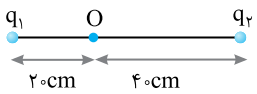


۷۱- در شکل مقابل اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در نقاط A و B به ترتیب E_A و E_B و $\frac{E_A}{E_B}=۲/۲۵$ باشد، d چند سانتی‌متر است؟



۷۲- در شکل روبه‌رو شدت میدان حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی O برابر $\vec{E}$ است.

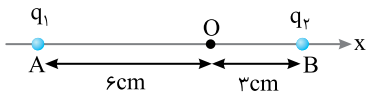
اگر بار $q_۱$ را خنثی کنیم، میدان در نقطه‌ی O برابر $-\vec{E}$ می‌شود. نسبت $\frac{q_۱}{q_۲}$ را به‌دست آورید.



۷۳- دو ذره‌ی باردار $q_۱=+۴\mu C$ و $q_۲=+۲\mu C$ در نقطه‌های A و B روی محور x، مطابق شکل ثابت شده‌اند. (ریاضی - خرداد ۹۴)

الف) میدان الکتریکی برآیند در نقطه‌ی O مبدأ مختصات را (در SI) محاسبه کنید و آن را بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

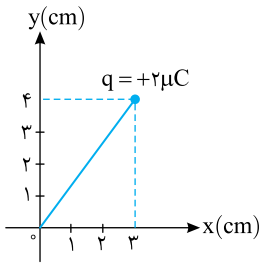
ب) اگر در نقطه‌ی O ذره‌ای با بار الکتریکی $-۵\mu C$ قرار دهیم، نیروی الکتریکی وارد بر ذره را در (در SI) بر حسب بردارهای یکه محاسبه کنید. $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۷۴- بار $۳/۶\mu C$ در مبدأ مختصات قرار دارد. اگر بار $۱\mu C$ در نقطه‌ی $A(۶m,۰)$ و بار q در نقطه‌ی $B(۳m,۰)$ قرار گیرد، میدان الکتریکی در نقطه‌ی $C(۹m,۰)$ برابر $۱۰^۳\ \frac{N}{C}$ و خلاف جهت با محور xها می‌شود. مقدار q را به‌دست آورید. $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$

۷۵- الف) در شکل روبه‌رو میدان حاصل از بار q را، در مبدأ برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید. $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$

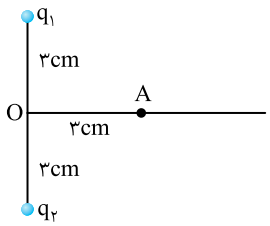
ب) بار $q'=+۲\mu C$ را در کدام نقطه قرار دهیم تا میدان خالص در مبدأ صفر شود؟



۷۶- دو بار الکتریکی نقطه‌ای همنام $q_۱=q_۲=۵\mu C$ مطابق شکل به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر از یک‌دیگر قرار دارند. (تجربی - خرداد ۹۱)

الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی A واقع بر عمودمنصف خط واصل دو بار، در فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از نقطه‌ی O چند نیوتون بر کولن است؟

ب) جهت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A با رسم شکل تعیین کنید. $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



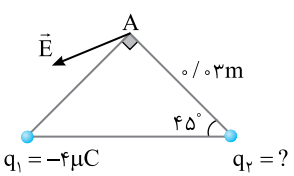
۷۷- دو بار الکتریکی ذره‌ای $q_۱=-q_۲=۱۰\mu C$ در فاصله‌ی ۶cm از یک‌دیگر ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی را روی عمودمنصف خطی که دو ذره را به یک‌دیگر وصل می‌کند و به فاصله‌ی ۳cm از وسط خط واصل دو ذره، به دست آورید. (با رسم شکل) $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$

(ریاضی - دی ۹۱)

۷۸- در شکل روبه‌رو دو ذره‌ی باردار $q_۱$ و $q_۲$ در دو رأس یک مثلث متساوی‌الساقین ثابت شده‌اند و $\vec{E}$ میدان الکتریکی حاصل از این دو بار، در رأس قائم‌الزاویه‌ی A است. (ریاضی - خرداد ۹۱)

الف) بار $q_۲$ مثبت است یا منفی؟

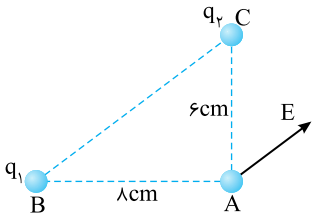
ب) اگر $q_۱=-۴\mu C$ باشد، اندازه‌ی بار $q_۲$ را طوری تعیین کنید که بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ برابر $۵\times۱۰^۷\ \frac{N}{C}$ باشد. $(k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



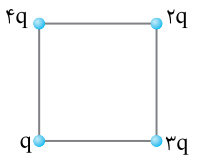
۷۹- در شکل روبه‌رو میدان در رأس قائمه‌ی A با خط BC موازی است.

الف) علامت q_1 و q_2 را مشخص کنید.

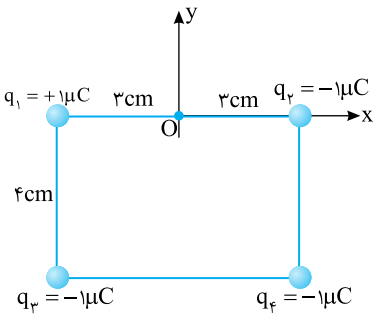
ب) نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ را بیابید.



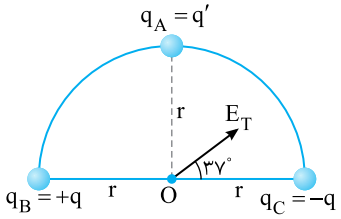
۸۰- اگر در یک رأس مربعی بار الکتریکی q قرار گیرد، اندازه‌ی میدان حاصل از آن در مرکز مربع E خواهد بود. در صورتی که در چهار رأس این مربع بارهای الکتریکی مطابق شکل روبه‌رو قرار گیرد، اندازه‌ی میدان در مرکز آن چند برابر E است؟



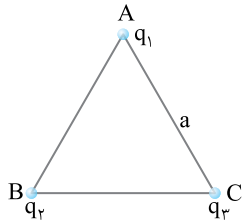
۸۱- میدان الکتریکی خالص (برآیند) ناشی از چهار بار را در نقطه‌ی O برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.



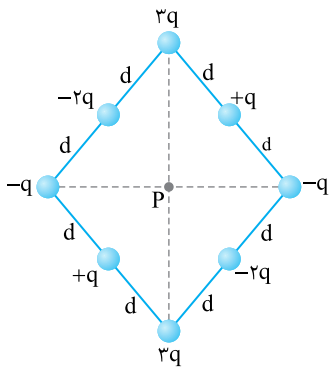
۸۲- در شکل روبه‌رو سه بار q_A، q_B و q_C روی محیط نیم‌دایره قرار دارند. جهت میدان الکتریکی برآیند در مرکز نیم‌دایره مطابق شکل است. بار الکتریکی q_A چند برابر بار الکتریکی q_B است؟ $(\sin ۳۷^\circ = \cos ۵۳^\circ = ۰/۶)$



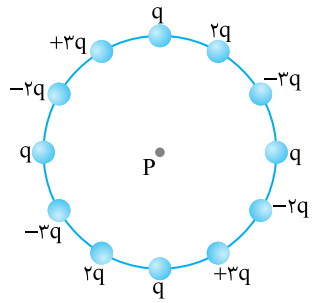
۸۳- در گوشه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $a = ۱m$ مطابق شکل بارهای $q_1 = -۳\mu C$ و $q_2 = q_3 = +۳\mu C$ قرار دارند. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P (وسط ضلع BC) به‌دست آورید. اگر بار $-۴\mu C$ در نقطه‌ی P قرار گیرد، چه نیرویی بر آن وارد می‌شود؟



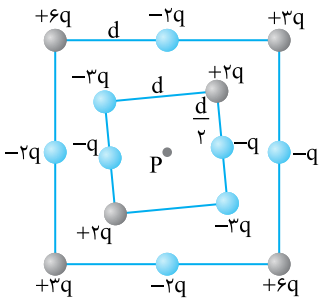
۸۴- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



۸۵- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



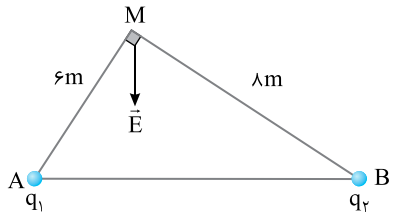
۸۶- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به‌دست آورید.



۸۷- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی بار $q_۲$ برابر $۱۰mC$ است اما علامت آن مشخص نیست. میدان الکتریکی حاصل از دو بار $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی M برابر $\vec{E}$ بوده و امتداد آن بر خط AB عمود است.

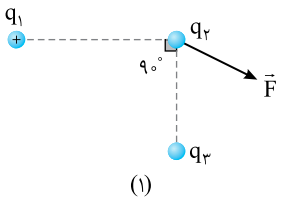
الف) علامت بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را مشخص کنید.

ب) مقدار بار $q_۲$ را به دست آورید.



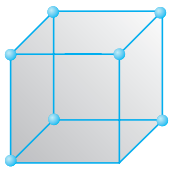
۸۸- در شکل (۱) $\vec{F}$ برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ است. نوع بار $q_۲$ و $q_۳$ را مشخص کنید.

(ریاضی - دی ۹۱)

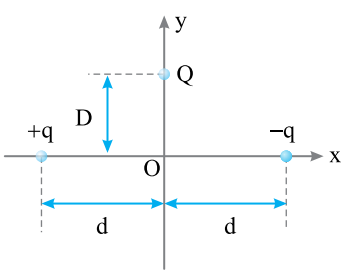


۸۹- روی دایره‌ای به شعاع $۱m$ سه نقطه به فاصله‌های مساوی از یک‌دیگر قرار دارند. دو بار الکتریکی نقطه‌ای $+۱\mu C$ هر کدام روی دو تا از این نقاط قرار دارند. میدان الکتریکی حاصل از آن دو ذره در نقطه‌ی سوم چند نیوتون بر کولن است؟ $\left(k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$

۹۰- در هر یک از رأس‌های مکعبی باری به اندازه‌ی q گذاشته‌ایم، جز یک رأس آن. اندازه‌ی میدان الکتریکی در مرکز این مکعب چقدر است؟ (طول ضلع مکعب را a بگیرید.)



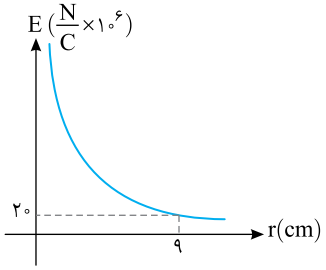
۹۱- در شکل روبه‌رو اگر برآیند میدان الکتریکی بارها در نقطه‌ی O با محور x زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد، q چقدر است؟ در این حالت بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی O را به‌دست آورید. $(Q=+۴۰\mu C\ ,\ D=۲۰cm\ ,\ d=۳۰cm)$



پاسخ ۶۵ (A) با توجه به تعریف میدان $(E=\frac{F}{q})$ خواهیم داشت:

$$F=Eq\Rightarrow ۵\times ۱۰^{-۲}=E\times ۲\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow E=۲/۵\times ۱۰^{۴}\ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۶۶ (A) الف) با توجه به نمودار در فاصله‌ی ۹cm میدان برابر $۲۰\times ۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$ می‌شود، پس:



$$|\vec{E}|=k\frac{q}{r^{۲}}=۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{q}{۸۱\times ۱۰^{-۴}}=۲۰\times ۱۰^{۶}\Rightarrow q=۱۸\times ۱۰^{-۶}=۱۸\mu C$$

ب) بار برابر $q=۱۸\mu C$ و فاصله $r=۳m$ است، پس میدان برابر است با:

$$|\vec{E}|=k\frac{q}{r^{۲}}=۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{۱۸\times ۱۰^{-۶}}{۹}=۱۸\times ۱۰^{۳}\ \frac{N}{C}$$

پاسخ ۶۷ (A) میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، با توجه به فاصله q از آن $(r_۱=۳cm)$ برابر است با:

$$|\vec{E}_۱|=k\frac{q}{r_۱^{۲}}=۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{q}{۹\times ۱۰^{-۴}}=q\times ۱۰^{۱۳}$$

میدان روی محیط دایره‌ی (۲) با توجه به فاصله‌ی q از آن $(r_۲=۶cm)$ برابر است با:

$$|\vec{E}_۲|=k\frac{q}{r_۲^{۲}}=۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{q}{۳۶\times ۱۰^{-۴}}=\frac{q}{۴}\times ۱۰^{۱۳}$$

اندازه‌ی $E_۱$، $۳\times ۱۰^{۷}\ \frac{N}{C}$ از اندازه‌ی $E_۲$ بزرگتر است پس:

$$\vec{E}_۱-\vec{E}_۲=q\times ۱۰^{۱۳}-\frac{q}{۴}\times ۱۰^{۱۳}=۳\times ۱۰^{۷}\Rightarrow\frac{۳q}{۴}\times ۱۰^{۱۳}=۳\times ۱۰^{۷}\Rightarrow q=۴\times ۱۰^{-۶}C=۴\mu C$$

پاسخ ۶۸ (C) با توجه به رابطه‌ی $\vec{F}=\vec{E}q$ داریم:

الف)

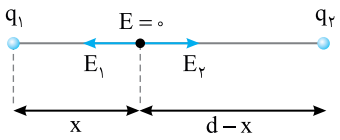
$$\vec{F}=\vec{E}q\Rightarrow\vec{F}=((۱/۵\vec{i}-۲\vec{j})\times ۱۰^{۷})\times(-۲\times ۱۰^{-۶})=-۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}$$

$$|\vec{F}|=\sqrt{(-۳۰)^{۲}+(۴۰)^{۲}}=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰}=\sqrt{۲۵۰۰}=۵۰N$$

ب) در قانون دوم نیوتون داریم $F=ma$ پس:

$$F=ma\Rightarrow ۵۰=۵\times ۱۰^{-۳}\times a\Rightarrow a=۱۰^{۴}\ \frac{m}{s^{۲}}$$

پاسخ ۶۹ (A) باید میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ برابر باشد تا میدان برآیند صفر شود، از این‌رو:



$$E_۱=E_۲\Rightarrow\frac{kq_۱}{r_۱^{۲}}=\frac{kq_۲}{r_۲^{۲}}\Rightarrow\frac{۲}{x^{۲}}=\frac{۳۲}{۱۶^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۴}{۱۶}\Rightarrow x=۴cm$$

میدان در بین دو بار، صفر می‌شود و x فاصله از بار کوچک‌تر و d فاصله‌ی دو بار از هم است، بنابراین داریم:

$$d=۱۶+۴=۲۰cm$$

پاسخ ۷۰ (B) اگر میدان الکتریکی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطه‌ی A به ترتیب $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}\vec{E}_۱+\vec{E}_۲=\vec{E}\\ \vec{E}_۲=۰/۵\vec{E}\end{cases}\Rightarrow\vec{E}_۱=۰/۵\vec{E}$$

میدان الکتریکی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه‌ی A هم‌جهتند $(\vec{E}_۱=\vec{E}_۲=۰/۵\vec{E})$؛ بنابراین علامت بارها یکسان نیست. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در نقطه‌ی A برابر $۰/۵E$ است. بنابراین بار $q_۱$ که در فاصله‌ی بیش‌تری از نقطه‌ی A نسبت به بار $q_۲$ قرار دارد، بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases} E_1=\dfrac{k|q_1|}{d_1^2}=0/5E \\ E_2=\dfrac{k|q_2|}{d_2^2}=0/5E \end{cases} \Rightarrow \frac{|q_1|}{d_1^2}=\frac{|q_2|}{d_2^2}\Rightarrow\frac{|q_1|}{|q_2|}=(\frac{d_1}{d_2})^2 \xrightarrow{d_1>d_2} |q_1|>|q_2|$$

از این‌که با حذف یکی از بارها بدون تغییر جهت میدان اندازه‌ی میدان در نقطه‌ی A کوچک‌تر شده هم می‌توان نتیجه گرفت که بارهای q_1 و q_2 ناهمنام هستند.

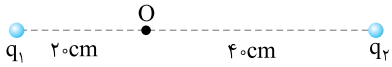
پاسخ ۷۱ میدان در نقاط A و B از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} E_A=k\dfrac{|q|}{(0/3)^2} \\ E_B=k\dfrac{|q|}{(0/3+d)^2} \end{cases}$$

با توجه به نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ مقدار d به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_A}{E_B}=(1+\frac{d}{0/3})^2=2/25\Rightarrow 1+\frac{d}{0/3}=\sqrt{2/25}=1/5\Rightarrow d=0/15m=15\,cm$$

پاسخ ۷۲ میدان حاصل از q_1 و q_2 در نقطه‌ی O به‌ترتیب برابر $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ است که برآیند آن‌ها $\vec{E}$ است. از طرفی با حذف q_1، میدان، ناشی از بار q_2 است، از این‌رو می‌توان دو معادله‌ی زیر را نوشت:



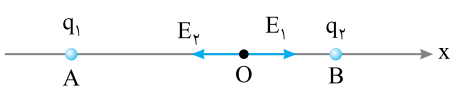
$$\begin{cases} \vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2 \\ -\vec{E}=\vec{E}_2 \end{cases}$$

درنتیجه، $\vec{E}_2=\frac{-\vec{E}_1}{2}$ بنابراین داریم:

$$|\frac{-E_1}{E_2}|=2\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}\times\frac{0/4^2}{0/2^2}=2\Rightarrow 4\frac{q_1}{q_2}=2\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=\frac{1}{2}$$

دو بار باید همنام باشند تا میدان‌های آن‌ها در بین دو بار در خلاف جهت هم باشد.

پاسخ ۷۳ الف) با توجه به رابطه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای، میدان‌های E_1 و E_2 را به دست می‌آوریم:



$$E_1=k\frac{q_1}{r_1^2}\Rightarrow E_1=9\times10^9\times\frac{4\times10^{-6}}{36\times10^{-4}}=10^7\Rightarrow\vec{E}_1=10^7\vec{i}$$

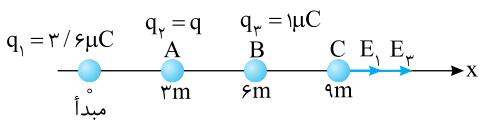
$$E_2=k\frac{q_2}{r_2^2}\Rightarrow E_2=9\times10^9\times\frac{2\times10^{-6}}{9\times10^{-4}}=2\times10^7\Rightarrow -2\times10^7 i$$

$$\vec{E}_T=\vec{E}_1+\vec{E}_2=(-10^7)\vec{i}$$

ب)

$$\vec{F}_o=q\vec{E}_T\Rightarrow\vec{F}_o=-5\times10^{-6}\times(-10^7)=50\vec{i}$$

پاسخ ۷۴ بزرگی میدان حاصل از بار $q_۱$ و $q_۳$ را محاسبه می‌کنیم:



$$|\vec{E}_۱|=k\frac{q_۱}{r_۱^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{۳/۶\times۱۰^{-۶}}{۸۱}=۴۰۰\,\frac{N}{C}$$

$$|E_۳|=k\frac{q_۳}{r_۳^۲}=۹\times۱۰^۹\times\frac{۱\times۱۰^{-۶}}{۹}=۱۰۰۰\,\frac{N}{C}$$

بزرگی برآیند میدان در نقطه ۹m برابر با $+۱۰^۳\,\frac{N}{C}$ است و چون جهت آن در خلاف جهت محور x است، پس بزرگی آن برابر با $-۱۰^۳\,\frac{N}{C}$ است، بنابراین:

$$\vec{E}_۱+\vec{E}_۲+\vec{E}_۳=\vec{E}\Rightarrow ۱۰۰۰+۴۰۰+E_۲=-۱۰۰۰\Rightarrow E_۲=-۲۴۰۰\,\frac{N}{C}$$

پس بزرگی میدان $E_۲$ برابر $۲۴۰۰\,\frac{N}{C}$ و علامت آن منفی است یعنی بردار $E_۲$ در خلاف محور x ها قرار دارد:

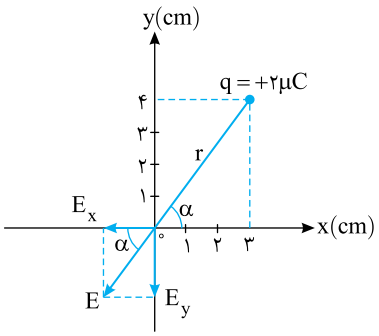
$$|\vec{E}_۲|=k\frac{q_۲}{r_۲^۲}=۲۴۰۰\Rightarrow ۹\times۱۰^۹\times\frac{q}{۳۶}=۲۴۰۰\Rightarrow q\times۱۰^۹=۹۶۰۰\Rightarrow q=۹/۶\times۱۰^{-۶}\,C=۹/۶\mu C$$

پاسخ ۷۵ ابتدا فاصله‌ی بار q را از مبدأ به‌دست می‌آوریم.

$$r=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵cm$$

اندازه‌ی میدان را در مبدأ حساب می‌کنیم.

$$E=k\frac{|q|}{r^۲}\Rightarrow E=۹\times۱۰^۹\times\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲۵\times۱۰^{-۴}}\Rightarrow E=۷/۲\times۱۰^۶\,\frac{N}{C}$$



میدان را در دو راستای x و y تجزیه می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

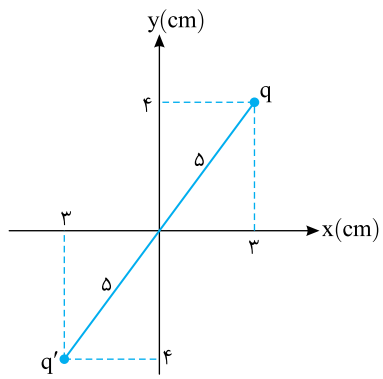
$$\cos\alpha=\frac{E_x}{E}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{E_x}{۷/۲\times۱۰^۶}\Rightarrow E_x=۴/۳۲\times۱۰^{+۶}\,\frac{N}{C}$$

$$\sin\alpha=\frac{E_y}{E}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{E_y}{۷/۲\times۱۰^۶}\Rightarrow E_y=۵/۷۶\times۱۰^{+۶}\,\frac{N}{C}$$

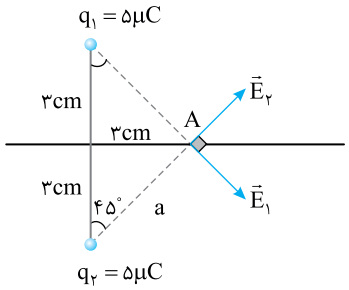
در این صورت میدان برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ خواهد شد:

$$\vec{E}=-۴/۳۲\times۱۰^۶\,\vec{i}-۵/۷۶\times۱۰^۶\,\vec{j}$$

برای صفر شدن میدان در مبدأ باید بار q' هم‌اندازه‌ی بار q و در فاصله‌ی ۵cm در سوی دیگر مبدأ یعنی در ربع سوم باشد.



پاسخ ۷۶ الف) ابتدا فاصله‌ی هر بار تا نقطه‌ی A را به دست می‌آوریم:

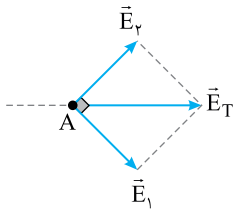


$$a = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}cm$$

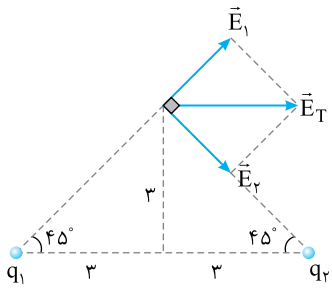
$$E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{a^2} = 9\times10^9 \times \frac{5\times10^{-6}}{18\times10^{-4}} = 2/5\times10^7$$

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(2/5\times10^7)^2 \times 2} = 2/5\sqrt{2}\times10^7 \frac{N}{C}$$

ب) مطابق شکل جهت میدان به سمت راست است:



پاسخ ۷۷ با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$E_1 = k\frac{q_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9\times10^9 \times 10\times10^{-6}}{18\times10^{-4}} = 5\times10^7 \frac{N}{C}$$

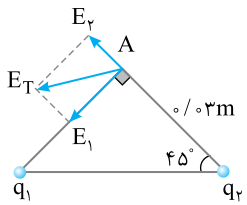
$$E_T = 2E_1 \cos\frac{90^\circ}{2} \Rightarrow E_T = 2\times5\times10^7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\times10^7 \frac{N}{C}$$

پاسخ ۷۸ الف) با توجه به شکل باید بار q_2 مثبت باشد.

ب) میدان بار q_1 را حساب می‌کنیم.

$$E_1 = k\frac{q_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9\times10^9 \times 4\times10^{-6}}{9\times10^{-4}} = 4\times10^7 \frac{N}{C}$$

با توجه به شکل و به رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت:



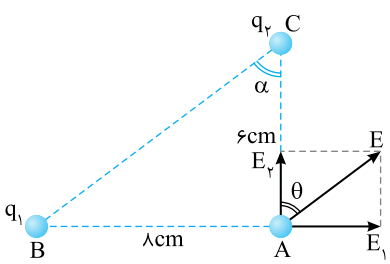
$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \Rightarrow 5\times10^7 = \sqrt{(4\times10^7)^2 + E_2^2}$$

$$\Rightarrow E_2 = 3\times10^7 \frac{N}{C}$$

اکنون اندازه‌ی بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$E_2 = k\frac{q_2}{r^2} \Rightarrow 3\times10^7 = \frac{9\times10^9 \times q_2}{9\times10^{-4}} \Rightarrow q_2 = 3\times10^{-6} C$$

پاسخ ۷۹ الف) بردار E با BC موازی می‌باشد و با توجه به مورب بودن CA زاویه‌ی $E\hat{A}C = B\hat{C}A = \alpha$ می‌باشد. حال بردار E را بر بردارهای قائم تجزیه می‌کنیم. E_1 حاصل از بار q_1 و E_2 حاصل از بار q_2 می‌باشد و میدان حاصل از q_1 به سمت خارج بار است. باید q_1 مثبت باشد، همچنین E_2 به سمت بار q_2 است، از این‌رو باید q_2 منفی باشد.



ب)

$$\begin{cases} E\sin\theta = E_1 \\ E\cos\theta = E_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{E\sin\theta}{E\cos\theta} = \tan\theta$$

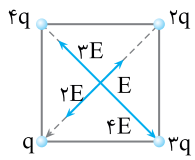
$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{8}{6}$$

$$E_1 = k\frac{q_1}{64\times10^{-4}} = k\frac{|q_1|\times10^4}{64}$$

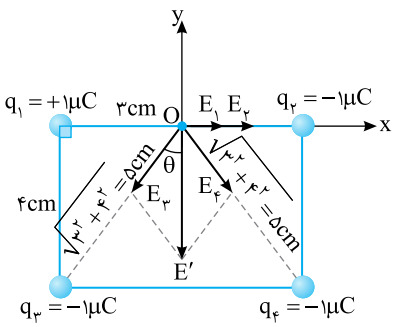
$$E_2 = k\frac{q_2}{36\times10^{-4}} = k\frac{|q_2|\times10^4}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{k\frac{|q_1|\times10^4}{64}}{k\frac{|q_2|\times10^4}{36}} = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{36|q_1|}{64|q_2|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = \frac{64}{27} \xrightarrow[q_2<0]{q_1>0} \frac{q_1}{q_2} = -\frac{64}{27}$$

پاسخ ۸۰ Ⓑ میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در مرکز مربع مطابق شکل مقابل است. می‌توان میدان‌ها را با هم جمع کرد تا میدان کل را به‌دست آورد. ولی اگر دقت کنید خواهید دید برآیند میدان‌های $\vec{E}$ و $2\vec{E}$ برابر $\vec{E}$ به سمت q و برآیند میدان‌های $3\vec{E}$ و $4\vec{E}$ نیز برابر $\vec{E}$ و به سمت $3q$ است، پس جمع چهار میدان بالا برابر جمع دو میدان $\vec{E}$ عمود بر هم است که اندازه‌ی آن برابر $\sqrt{2}E$ می‌شود.



پاسخ ۸۱ Ⓒ ابتدا جهت میدان حاصل از هر بار را مشخص کرده و بزرگی هر کدام را محاسبه می‌کنیم:



اندازه بارهای q_1 و q_2 با هم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی O یکسان است بنابراین میدان‌های حاصل از آن‌ها باهم برابر و هر دو افقی و در راستای i می‌باشد.

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = k\frac{q}{r^2} = 9\times10^9 \times \frac{1\times10^{-6}}{9\times10^{-4}} = 10^7\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_i = (E_1 + E_2)_i = 2\times10^7\,\vec{i}$$

همچنین اندازه‌ی بارهای q_3 و q_4 باهم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه O یکسان است، پس:

$$|\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = k\frac{q}{r^2} = 9\times10^9 \times \frac{1\times10^{-6}}{25\times10^{-4}} = 3/6\times10^6\ \frac{N}{C}$$

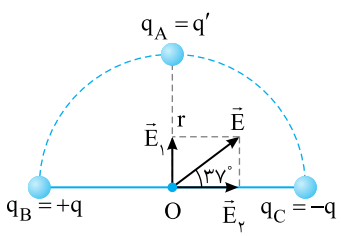
میدان‌های $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ باهم هم‌اندازه می‌باشند و به دلیل تقارن، بردار برآیند آن $\vec{E}'$ قائم بوده در راستای $-j$ می‌باشد.

(مؤلفه‌های افقی $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.) پس برآیند مؤلفه‌های عمودی را حساب می‌کنیم:

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \quad , \quad \vec{E}_{3y} = \vec{E}_{4y} = E_3\cos\theta = 3/6\times10^6 \times \frac{4}{5} = 2/88\times10^6\ \frac{N}{C}$$

$$E' = E_{Ty} = \vec{E}_{3y} + \vec{E}_{4y} = 2\times E_{3y} = 2\times2/88\times10^6 = 5/76\times10^6\ \frac{N}{C} \quad , \quad \vec{E} = 2\times10^7\,\vec{i} - 5/76\times10^6\,\vec{j}$$

پاسخ ۸۲ Ⓒ با تجزیه بردار E روی محورهای قائم و افقی به مؤلفه‌های E_1 و E_2 داریم:



$$\begin{cases} E\cos37^\circ = \vec{E}_2 \\ E\sin37^\circ = \vec{E}_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{E}_1}{\vec{E}_2} = \tan37^\circ \qquad (1)$$

که $\vec{E}_1$ میدان بار q_A و $\vec{E}_2$ میدان برآیند میدان بارهای q_B و q_C در نقطه‌ی O می‌باشد.

$$E_1 = E_A = k\frac{q_A}{r^2} = k\frac{q'}{r^2} \quad , \quad E_2 = E_C + E_B = k\frac{q_C}{r^2} + k\frac{q_B}{r^2} = k\frac{2q}{r^2}$$

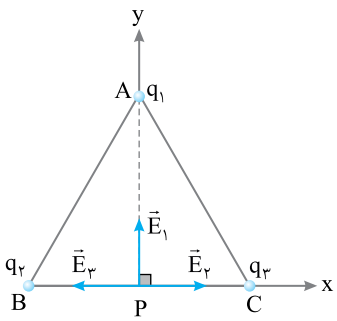
حال با توجه به معادله‌ی (۱) داریم:

$$\frac{|\vec{E}_1|}{|\vec{E}_2|}=\frac{\frac{k|q'|}{r^2}}{\frac{k|2q|}{r^2}}=\tan 37^\circ=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{|q'|}{2q}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{|q'|}{|q|}=\frac{3}{2}$$

بار q' با توجه به جهت میدان آن باید منفی باشد از این‌رو:

$$\frac{q_A}{q_B}=\frac{q_A}{q_B}=-\frac{3}{2}$$

پاسخ ۸۳ (B) AP در مثلث ABC هم نیمساز و هم ارتفاع است:



$$\cos P\hat{A}C=\frac{AP}{AC}\Rightarrow\cos 30^\circ=\frac{AP}{a}\Rightarrow AP=a\cos 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AP=\frac{\sqrt{3}}{2}\,m$$

$$E_1=\frac{kq_1}{r_1^2}=\frac{kq_1}{AP^2}=9\times10^9\times\frac{3\times10^{-6}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\Rightarrow E_1=36\times10^3\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}_x=\vec{E}_{1x}+\vec{E}_{2x}+\vec{E}_{3x}\\ \vec{E}_y=\vec{E}_{1y}+\vec{E}_{2y}+\vec{E}_{3y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=0+E_2-E_3=E_2-E_3\\ E_y=E_1+0+0=E_1\end{cases}$$

از آن‌جا که نقطه‌ی P وسط ضلع BC و $q_2=q_3$ است، $E_2=E_3$ و در نتیجه $E_x=0$ است و داریم:

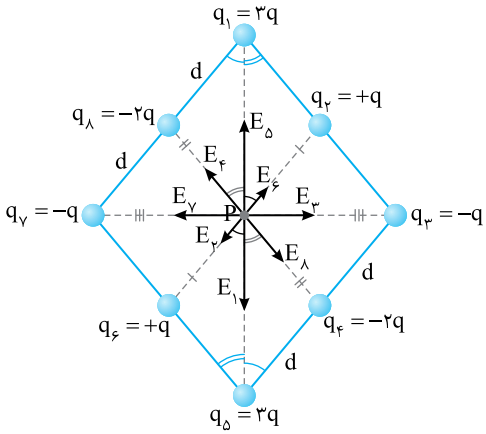
$$E_x=0,E_y=E_1,\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}\Rightarrow\vec{E}=E_1\vec{j}\Rightarrow\vec{E}=36000\vec{j}\,\frac{N}{C}$$

نیروی وارد بر یک بار در یک میدان الکتریکی از رابطه‌ی $\vec{F}=q\vec{E}$ به‌دست می‌آید که اگر بار q منفی باشد، جهت نیرو در خلاف جهت میدان الکتریکی است. بنابراین:

$$\vec{F}=-4\times10^{-6}\times(36000\vec{j})=-0/144\vec{j}$$

یعنی نیرو در جهت منفی محور y و بزرگی آن $144\times10^{-3}\,N$ است.

پاسخ ۸۴ (B) میدان حاصل از هر بار نقطه‌ای را در مرکز P می‌کشیم.



اندازه‌های q_2 و q_6 و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد، پس:

$$E_6=E_2=k\frac{q}{r^2}$$

و چون E_2 و E_6 خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$|\vec{E}_6+\vec{E}_2|=|E_6-E_2|\xrightarrow{E_2=E_4}\vec{E}_2+\vec{E}_6=0$$

اندازه‌های q_8 و q_4 و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد پس:

$$E_8=E_4=k\frac{2q}{r^2}$$

و چون E_8 و E_4 خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$|\vec{E}_8+\vec{E}_4|=|E_8-E_4|=0$$

اندازه‌های q_3 و q_7 و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد، پس:

$$E_3=E_7=k\frac{q}{r^2}$$

و چون E_3 و E_7 خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند.

$$|\vec{E}_3+\vec{E}_7|=|E_3-E_7|=0$$

اندازه‌ی بارهای q_1 و q_5 و فاصله هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشند، پس:

$$E_5=E_1=\frac{k3q}{r^2}$$

و چون E_1 و E_5 خلاف جهت هم و هم‌اندازه می‌باشند.

$$|\vec{E}|=|\vec{E}_5+\vec{E}_1|=|E_5-E_1|=0$$

بنابراین میدان‌ها در نقطه‌ی P هم را خنثی می‌کنند و میدان برآیند در نقطه P صفر است.

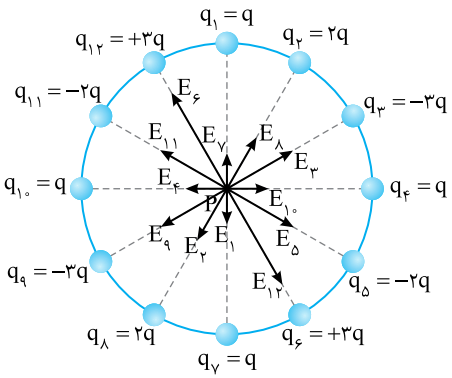
پاسخ ۸۵ میدان‌های q_1 و q_7 در یک راستا و در خلاف جهت هم می‌باشند و چون این دو بار و فاصله‌ی هر کدام تا P با هم برابرند پس اندازه‌ی میدان آن‌ها با هم برابر می‌باشد:

$$E_1 = E_7, E = \vec{E}_1 + \vec{E}_7 = E_1 - E_7 = 0$$

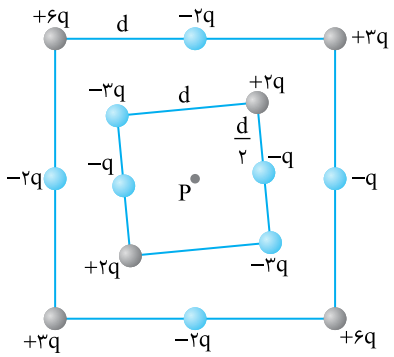
میدان‌های q_2 و q_8 در یک راستا و در خلاف جهت هم می‌باشند و چون اندازه‌ی این دو بار و فاصله‌ی آن‌ها از P با هم برابر می‌باشد پس اندازه‌ی میدان آن‌ها با هم برابر می‌باشد :

$$E_2 = E_8, E = \vec{E}_2 + \vec{E}_8 = E_2 - E_8 = 0$$

بـه همین ترتیـب میدان‌های حاصل از q_3 و q_9، q_4، q_{10}، q_5، q_{11}، q_6، q_{12} با هم خنثی می‌شود و برآیند میدان در نقطه‌های P صفر می‌باشد.

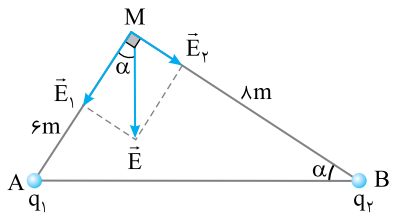


پاسخ ۸۶ با رسـم میدان‌های هر بار مشـخص می‌شـود که ایـن میدان‌ها دوبه‌دو یکدیگر را خنثی کرده و میدان ناخالص (برایند) در نقطه P صفر است.



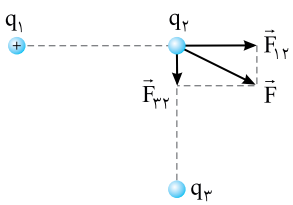
پاسخ ۸۷ الف) با توجه به شکل باید جهت میدان‌های E_1 و E_2 به صورت روبه‌رو باشد. در این صورت برآیند E_1 و E_2 برابر E می‌شود، یعنی بارهای q_1 و q_2 هر دو منفی هستند.

ب) با توجه به شکل:



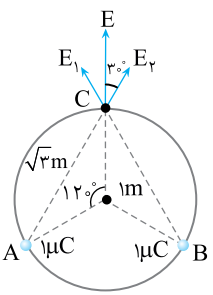
$$\tan\alpha = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{k\frac{|q_2|}{64}}{k\frac{10}{36}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{|q_2|}{10} \times \frac{36}{64} \Rightarrow |q_2| = \frac{40}{3}\,mC$$

پاسخ ۸۸ با توجه به شـکل روبه‌رو q_1 باید q_2 را دفع کند و q_3، q_2 را جذب کند، پس q_1 و q_2 همنام و q_3 و q_2 ناهمنام هسـتند، یعنی q_1 و q_2 مثبت و q_3 منفی است.



پاسخ ۸۹ اندازه‌ی میدان الکتریکی ناشی از هر یک از بارها برابر است با:

$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r^2} = \frac{9\times10^9\times1\times10^{-6}}{(\sqrt{3})^2} = 3\times10^3\,\frac{N}{C}$$



میدان کل برآیند این دو میدان است و با توجه به تقارن برابر است با:

$$E = 2\times E_1\times\cos 30^\circ = 2\times3000\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3}\,\frac{N}{C}$$