

(فصل ۳)

توابع نمایی و لگاریتمی

۲۲۳	درس ۱: تابع نمایی
۲۳۳	درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۲۳۹	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی
۲۴۹	آزمون فصل
۲۵۱	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۴)

مثلثات

۲۷۵	درس ۱: رادیان
۲۸۲	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی از زوایا
۲۹۶	درس ۳: توابع مثلثاتی
۳۰۵	درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۳۱۸	آزمون فصل
۳۲۰	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۵)

حد و پیوستگی

۳۵۲	درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۳۵۷	درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۶۵	درس ۳: قضایای حد
۳۷۳	درس ۴: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ )
۳۸۲	درس ۵: پیوستگی
۳۹۴	آزمون فصل
۳۹۶	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۱)

چپ و معادله

۷	درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۷	درس ۲: معادلات درجه دوم
۳۸	درس ۳: معادلات گویا و گنگ
۴۷	درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۶۰	درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی
۷۵	آزمون فصل
۷۷	پاسخنامه تشریحی

(فصل ۲)

تابع

۱۳۴	درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع
۱۴۱	درس ۲: انواع تابع
۱۵۷	درس ۳: وارون تابع
۱۶۸	درس ۴: اعمال روی توابع
۱۸۲	آزمون فصل
۱۸۴	پاسخنامه تشریحی

# جرم و معادله

درس ۱

## مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

### مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی و نکاتش را سال گذشته یاد گرفتید. برای یادآوری هم که شده در جدول زیر مفاهیم و نکاتش را با هم مرور کنیم (البته برای بعضی ها تازگی داره!):

دنباله حسابی: دنباله ای که در آن تفاضل هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می گویند و آن را با $d$ نمایش می دهند. برای مثال دنباله $1, 5, 9, \dots$ یک دنباله حسابی با جمله اول $1$ و قدرنسبت $4 = 5 - 1$ است.	
جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول $a_1$ و قدرنسبت $d$ برابر است با:	$a_n = a_1 + (n-1)d$
اگر $a, b, c$ سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، آن گاه:	$b = \frac{a+c}{2}$
اگر بین دو عدد $a$ و $b$ واسطه حسابی قرار دهیم قدرنسبت دنباله حاصل برابر است با:	$d = \frac{b-a}{k+1}$
اگر $m \pm n = p \pm q$ آن گاه در دنباله حسابی داریم:	$a_m \pm a_n = a_p \pm a_q$ مثال: $a_7 + a_{10} = a_4 + a_{13}$

#### محاسبه فرمول مجموع جملات یک دنباله حسابی

بحث را با یک مثال شروع کنیم. به دنباله حسابی  $1, 2, 3, \dots$  توجه کنید. فرض کنید قرار باشد مجموع پنجاه جمله اول دنباله را محاسبه کنیم یعنی:

$$S_{50} = 1 + 2 + \dots + 49 + 50$$

یک روش اینکه بشینی یکی یکی اعداد را با هم جمع کنی! اما یک روش قشنگ تر وجود داره! این مجموع را از انتها به ابتدا بنویسید:

$$S_{50} = 50 + 49 + \dots + 2 + 1$$

اگر طرفین این دو تساوی را با هم جمع کنیم، داریم:

$$2S_{50} = \underbrace{(1+50) + (2+49) + \dots + (50+1)}_{\text{تا } 50} \Rightarrow 2S_{50} = 50(51) \Rightarrow S_{50} = \frac{50(51)}{2} = 25(51) = 1275$$

مجموع اعداد طبیعی از  $1$  تا  $n$  برابر  $\frac{n(n+1)}{2}$  است.

فب! پس در حالت کلی می توانیم یک روش برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی ارائه کنیم. این طوری:

فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشند، مجموع این  $n$  جمله برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n \quad (1)$$

حالا این مجموع را از انتها به ابتدا می نویسیم:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \Rightarrow S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1 \quad (2)$$

با جمع تساوی های (1) و (2) خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\text{تا } n} \Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی



به عنوان مثال برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی که ۱۵ جمله دارد و جمله اول و جمله پانزدهم آن به ترتیب ۳ و ۲۵ است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}] = \frac{15}{2}[3 + 25] = \frac{15}{2}[28] = 15 \times 14 = 210$$

اگر فرمول جمله عمومی یعنی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  را در فرمول صفحه قبل به جای  $a_n$  جای گذاری کنیم، روش دیگری برای محاسبه مجموع

بالا حاصل می‌شود:  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی

به عنوان مثال بیاییم مجموع ده جمله اول دنباله حسابی  $1, 2, 5, \dots$  را محاسبه کنیم:

جمله اول این دنباله  $-1$  و قدرنسبت آن  $3 - (-1) = 2 - (-1) = 3$  است. پس با توجه به فرمول بالا، مجموع ده جمله اول برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(-1) + (10-1)3] = \frac{10}{2}[-2 + 27] = 5(25) = 125$$

در یک دنباله حسابی  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول،  $S_8 = 104$  و  $S_{12} = 252$  است.  $S_{20}$  کدام است؟

۱) ۳۵۶      ۲) ۳۷۰      ۳) ۷۴۰      ۴) ۷۱۲

با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  داریم:

$$\begin{cases} S_8 = 104 \Rightarrow \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 104 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 26 \\ S_{12} = 252 \Rightarrow \frac{12}{2}[2a_1 + 11d] = 252 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 42 \end{cases}$$

تفاضل  $\rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$

$$2a_1 + 7(4) = 26 \Rightarrow 2a_1 = -2 \Rightarrow a_1 = -1$$

حالا با استفاده از تساوی  $2a_1 + 7d = 26$  جمله اول را هم محاسبه می‌کنیم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] = 10[2(-1) + 19(4)] = 740$$

پس مجموع ۲۰ جمله اول دنباله برابر است با:

به ازای کدام مقدار  $x$  تساوی  $(1+x^3) + (4+x^3) + (7+x^3) + \dots + (28+x^3) = 225$  برقرار است؟

۱) ۲      ۲) ۳      ۳)  $\sqrt[3]{10}$       ۴)  $\sqrt[3]{10}$

در طرف چپ تساوی اگر  $x^3$  ها را کنار بگذاریم، با مجموع جملات دنباله حسابی  $1, 4, 7, \dots, 28$  روبه‌رو می‌شویم. حالا باید دوتا کار انجام بدیم!

با محاسبه تعداد جملات دنباله  $1, 4, 7, \dots, 28$  تعداد  $x^3$  ها را بیابیم: (دقت کنید که قدرنسبت دنباله برابر ۳ است.)

$$\begin{cases} a_n = 28 \\ a_1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 28 = 1 + (n-1)3 \Rightarrow 27 = 3(n-1) \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

(می‌توانید برای محاسبه تعداد جملات از رابطه  $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$  هم استفاده کنید.)

مجموع جملات دنباله  $1, 4, 7, \dots, 28$  را محاسبه کنیم تا بتوانیم مقدار  $x$  را بیابیم:

$$S_{10} = 1 + 4 + 7 + \dots + 28 = \frac{10}{2}[1 + 28] = 145 \quad (*)$$

حالا به معادله بر می‌گردیم و  $x$  را محاسبه می‌کنیم:

$$(1 + 4 + 7 + \dots + 28) + 10x^3 = 225 \xrightarrow{(*)} 145 + 10x^3 = 225 \Rightarrow 10x^3 = 80 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

### جمله عمومی مجموع جملات دنباله حسابی

گاهی وقت‌ها جمله عمومی مجموع جملات یک دنباله حسابی را داریم و باید بتوانیم از آن، اطلاعات دنباله حسابی را استخراج کنیم. در این قسمت نکات آن را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید می‌خواهیم مجموع  $n$  جمله اول دنباله  $2, 8, 14, \dots$  را محاسبه کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

جمله اول دنباله  $a_1 = 2$  و قدرنسبت آن  $d = 6$  است. پس مجموع  $n$  جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)6] = \frac{n}{2}[4 + 6n - 6] = \frac{n}{2}[6n - 2] \Rightarrow S_n = 3n^2 - n$$

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $d$  به صورت  $S_n = An^2 + Bn$  نیز قابل نمایش است. در این حالت

نکات مقابل را خواهیم داشت:  $d = 2A$  : قدرنسبت دنباله       $a_1 = S_1$  : جمله اول دنباله

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = 3n^2 - 2n$  است. جمله پنجم دنباله کدام است؟

۲۲ (۱)      ۲۶ (۲)      ۲۷ (۳)      ۳۰ (۴)

$$S_n = 3n^2 - 2n : \begin{cases} a_1 = S_1 = 3(1)^2 - 2(1) = 1 \\ d = 2A = 2(3) = 6 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی، جمله پنجم را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow a_5 = a_1 + (5-1)d = 1 + 4(6) = 25$$

یک روش باهال! نگاه کن!

$$\begin{cases} S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{cases} \Rightarrow S_5 - S_4 = a_5 \xrightarrow{S_5=3 \times 5^2 - 2 \times 5, S_4=3 \times 4^2 - 2 \times 4} a_5 = 65 - 40 = 25$$

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشد آن‌گاه جمله  $n$ ام دنباله (جمله عمومی) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = an^2 + n$  است. اگر مجموع جملات شروع از جمله ششم و ختم به جمله دهم

برابر ۳۰۵ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۴ (۱)      ۲ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)

$$S = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

مجموع جملات شروع از جمله ششم و ختم به جمله دهم یعنی:

برای محاسبه این عبارت، از آن‌جا که جمله عمومی مجموع جملات را داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{10} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{10}}_{S_5} \Rightarrow a_6 + a_7 + \dots + a_{10} = S_{10} - S_5$$

$$a_6 + a_7 + \dots + a_{10} = (10 \cdot a + 10) - (5a + 5) = 75a + 5$$

از آن‌جا که  $S_n = an^2 + n$  است، بنابراین:

$$75a + 5 = 305 \Rightarrow 75a = 300 \Rightarrow a = 4$$

و بالأخره با توجه به این‌که حاصل این مجموع برابر ۳۰۵ است داریم:

$$\Rightarrow S_n = 4n^2 + n \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 2(4) = 8$$

## مجموع جملات دنباله هندسی

این‌جا هم اول مفاهیم و نکاتی که سال گذشته خوانده‌اید را مرور می‌کنیم:

دنباله هندسی: دنباله‌ای که در آن تقسیم هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامند و آن را  $q$  (یا  $r$ ) نمایش می‌دهند. برای مثال دنباله  $2, 6, 18, 54, \dots$  یک دنباله هندسی با جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ است.

$a_n = a_1 q^{n-1}$	جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول $a_1$ و قدرنسبت $q$ برابر است با:
$b^2 = ac$	اگر $a, b, c$ سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آن‌گاه:
$q^{k+1} = \frac{b}{a}$	اگر بین دو عدد $a$ و $b$ واسطه هندسی قرار دهیم، قدرنسبت دنباله حاصل به صورت مقابل محاسبه می‌شود:
$a_n \times a_m = a_p \times a_q$	اگر $m + n = p + q$ ، آن‌گاه در دنباله هندسی داریم:

محاسبه فرمول مجموع جملات یک دنباله هندسی

دنباله هندسی  $2, 6, 18, \dots$  را در نظر بگیریم. اگر قرار باشد مجموع ده جمله اول دنباله را محاسبه کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم (چون

$$a_1 = 2 \text{ و } q = 3, \text{ پس جمله دهم دنباله برابر } a_{10} = 2 \times 3^9 \text{ است.})$$

$$S_{10} = 2 + 6 + 18 + \dots + 2 \times 3^8 + 2 \times 3^9 \xrightarrow[\text{طرفین}]{\times q} 3S_{10} = 6 + 18 + \dots + 2 \times 3^9 + 2 \times 3^{10}$$

دو طرف تساوی‌ها را از هم کم می‌کنیم (وقتی کم می‌شن، فقط جمله اول از تساوی اول و جمله آخر از تساوی دوم می‌مونه!):

$$S_{10} - 3S_{10} = 2 - 2 \times 3^{10} \Rightarrow -2S_{10} = 2(1 - 3^{10}) \Rightarrow S_{10} = 3^{10} - 1$$

پس در حالت کلی رابطهٔ مربوط به مجموع  $n$  جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی به صورت زیر محاسبه می‌شود (جملهٔ  $n$ ام  $a_1 q^{n-1}$  است):

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\times q} qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع  $n$  جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$  برابر است با ( $q \neq 1$ ):

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

فرض کنید می‌خواهیم مجموع ۸ جملهٔ اول دنبالهٔ  $5, 10, 20, \dots$  را محاسبه کنیم. این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۵ و قدرنسبت  $\frac{10}{5} = 2$  است. بنابراین طبق فرمول مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، مجموع ۸ جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{5(1-2^8)}{1-2} = \frac{5(1-256)}{-1} = 5(255) = 1275$$

مجموع ۶ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی  $\dots, \Delta(p+1), 2p-1, 3, p$  با جملات مثبت کدام است؟

۱۷۸۰ (۱)      ۱۸۰۰ (۲)      ۱۸۲۰ (۳)      ۱۸۴۰ (۴)

$$b^x = ac$$

می‌دانیم اگر  $a, b, c$  سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه:

$$(2p-1)^2 = (p-3)(\Delta(p+1)) \Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 = \Delta(p^2 - 2p - 3)$$

پس در این جا داریم:

$$\Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 = \Delta p^2 - 10p - 15 \Rightarrow p^2 - 6p - 16 = 0 \Rightarrow (p-8)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 8, -2$$

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس  $p = 8$  قابل قبول است. در نتیجه جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$p = 8: \Delta, 15, 45, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$$

حالا مجموع ۶ جملهٔ اول را می‌یابیم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{5(1-3^6)}{1-3} = \frac{5(-728)}{-2} = 5(364) = 1820$$

در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت  $q$  مجموع ۵ جملهٔ اول ۶۰ واحد از جملهٔ اول بیشتر است. اگر مجموع چهار جملهٔ اول ۳۰ باشد، آن‌گاه  $q$  کدام است؟

۳ (۴)      ۲ (۳)       $\frac{5}{2}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۱)

مجموع ۵ جملهٔ اول، ۶۰ واحد از جملهٔ اول بیشتر است؛ یعنی:

$$S_5 = 60 + a_1 \Rightarrow S_5 - a_1 = 60 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} - a_1 = 60$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - a_1 q^5 - a_1 + a_1 q}{1-q} = 60 \Rightarrow \frac{a_1 q - a_1 q^5}{1-q} = 60 \Rightarrow \frac{a_1 q(1-q^4)}{1-q} = 60 \Rightarrow q \underbrace{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}_{S_4} = 60 \Rightarrow qS_4 = 60$$

$$q(30) = 60 \Rightarrow q = 2$$

مقدار  $S_4$  را هم که داریم (مجموع چهار جملهٔ اول ۳۰ است؛ یعنی  $S_4 = 30$ ) بنابراین:

اگر جملات دنباله را به صورت  $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$  در نظر بگیریم، داریم:

$$S_5 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \Rightarrow S_5 - a_1 = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \quad (*)$$

$$S_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \xrightarrow{\times q} qS_4 = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \quad (**)$$

از طرفی:

$$S_5 - a_1 = qS_4 \Rightarrow 60 = q(30) \Rightarrow q = 2$$

طرف راست تساوی‌های (\*) و (\*\*) با هم برابر است، پس:

$$S_n - a_1 = qS_{n-1}$$

این موضوع را می‌توانید به صورت کلی هم ببینید:

به مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی می‌توان به صورت زیر هم نگاه کرد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$$

**مثال** در یک دنباله هندسی جمله اول  $3^0$  واحد از جمله ششم بیشتر است. اگر مجموع پنج جمله اول دنباله برابر  $1^0$  باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

(۱)  $-\frac{3^0}{3^0}$  (۲)  $\frac{1^0}{11}$  (۳)  $\frac{3^0}{3^0}$  (۴)  $-\frac{1^0}{11}$

**پس** جمله اول  $3^0$  واحد از جمله ششم بیشتر است، پس:

از طرفی مجموع پنج جمله اول برابر  $1^0$  است:

حالا طبق رابطه بالا داریم:

در نهایت با استفاده از تساوی  $a_1 - a_6 = 3^0$  جمله اول را می‌یابیم:

$$a_1 - a_6 = 3^0 \Rightarrow a_1(1 - (-2)^5) = 3^0 \Rightarrow a_1(1 - (-32)) = 3^0 \Rightarrow a_1(33) = 3^0 \Rightarrow a_1 = \frac{3^0}{33} = \frac{1^0}{11}$$

**مثال** الف) مجموع ۸ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

ب) مجموع ۴ جمله دوم دنباله بالا چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{a_1(1-q^8)}{a_1(1-q^4)} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4$$

پس مجموع ۸ جمله اول دنباله  $(1+q^4)$  برابر مجموع چهار جمله اول آن است.

ب) مجموع چهار جمله دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_8 - S_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{\text{مجموع چهار جمله اول}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\text{مجموع چهار جمله دوم}} \Rightarrow S_8 - S_4 = \text{مجموع چهار جمله دوم}$$

پس نسبت مجموع چهار جمله دوم به مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع چهار جمله دوم}}{\text{مجموع چهار جمله اول}} = \frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{S_8}{S_4} - 1 \quad (\text{قسمت الف}) \quad 1 + q^4 - 1 = q^4$$

پس مجموع چهار جمله دوم دنباله،  $q^4$  برابر مجموع چهار جمله اول دنباله است.

در یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  داریم:

● مجموع  $2n$  جمله اول =  $S_{2n} = 1 + q^n$

● مجموع  $n$  جمله دوم =  $\frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$

**مثال** دنباله هندسی  $1, 3, 9, 27, \dots$  ده جمله دارد. مجموع جملات ردیف زوج چند برابر مجموع جملات ردیف فرد است؟

**پس** چون دنباله  $1^0$  جمله دارد پس:

$$\frac{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}{\text{مجموع جملات ردیف فرد}} = \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{10}}{a_1 + a_3 + \dots + a_9} = \frac{a_1q + a_1q^3 + \dots + a_1q^9}{a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8} = \frac{q(a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8)}{a_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^8} = q$$

با توجه به دنباله،  $q = 3$  است. پس مجموع جملات ردیف زوج، ۲ برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

اگر تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج باشد، مجموع جملات ردیف زوج،  $q$  برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

**مثال** یک دنباله هندسی  $1^0$  جمله دارد. اگر مجموع کل جملات چهار برابر مجموع جملات ردیف زوج باشد، قدرنسبت کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)  $\frac{1}{3}$



مجموع کل جملات چهار برابر مجموع جملات ردیف زوج است، پس:  $S_{\text{کل}} = 4S_{\text{زوج}}$  (\*)  
 از طرفی طبق نکته گفته شده داریم:  $S_{\text{زوج}} = qS_{\text{فرد}}$  (\*\*)  
 حالا با توجه به این که  $S_{\text{کل}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}}$  داریم:  

$$\xrightarrow{(*)} 4S_{\text{زوج}} = S_{\text{فرد}} + S_{\text{زوج}} \xrightarrow{(**)} 4qS_{\text{فرد}} = S_{\text{فرد}} + qS_{\text{فرد}}$$
  

$$\Rightarrow 3qS_{\text{فرد}} = S_{\text{فرد}} \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

**یک رابطه مهم:** به مجموع  $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$  توجه کنید. این مجموع، مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $a$  است. پس طبق رابطه  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  این مجموع را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1(1-a^n)}{1-a} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

طرفین وسطین  $\rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$

ساده شده عبارت  $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^4-1}$  را بیابید.

در صورت کسر، از اتحاد کادر بالا و در منخرج هم از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(a^4-1)}{(a^4-1)(a^2+1)} = \frac{1}{a^2+1}$$

اگر یک زمانی رابطه بالا یادتون رفت یا به طور کلی گیر کردین که پی به پی بود! از فود فرمول مهم جملات دنباله هندسی برای حل کمک بگیرید:

حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

صورت کسر، مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $t$  است. منخرج کسر هم مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت  $t^3$  است. در نتیجه:

$$\text{عبارت} = \frac{1(1-t^{12})}{1-t} = \frac{1-t^{12}}{1-t} = \frac{1-t^3}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2$$

با قراردادن  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  حاصل را می‌یابیم:

$$\text{عبارت} = 1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{4 - 2 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای

#### مجموع جملات دنباله حسابی

- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۰ کدام است؟  
 ۱۶۰ (۴)      ۲۴۰ (۳)      ۲۱۰ (۲)      ۱۹۰ (۱)
- روی محیط دایره‌ای ۱۵ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده کدام است؟  
 ۱۳۵ (۴)      ۱۲۰ (۳)      ۹۱ (۲)      ۱۰۵ (۱) (برگرفته از کتاب درسی)
- مجموع ۱۵ جمله اول دنباله حسابی  $1, 2, \dots, -4$  کدام است؟  
 ۲۸۵ (۴)      ۲۷۰ (۳)      ۲۵۵ (۲)      ۲۴۰ (۱)
- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه  $\frac{1}{3}$  کم تر است. مجموع ده جمله اول آن کدام است؟  
 ۳۰ (۴)      ۲۷/۵ (۳)      ۲۵ (۲)      ۲۲/۵ (۱) (مشابه تیربی ۸۲)
- در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$ ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده می‌شود؟ (ریاضی ۸۳)  
 ۱۹۰ (۴)      ۱۸۰ (۳)      ۱۷۰ (۲)      ۱۶۰ (۱)
- مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۲۵ است. به هر یک از جمله‌ها ۶ واحد اضافه کرده و سپس در ۲ ضرب کرده و در پایان ۳ واحد از هر یک کم می‌کنیم. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟  
 ۱۴۰ (۴)      ۱۳۲ (۳)      ۸۴ (۲)      ۵۸ (۱)



۷- در یک دنباله حسابی، جمله  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{p}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله، کدام است؟ (تجربی ۸۹)

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

۸- حاصل  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  کدام است؟

- $n^2$  (۱)  $n^2 - 2n$  (۲)  $n^2 + 2n$  (۳)  $n^2 - n$  (۴)

۹- اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی با دو جمله  $a_1 = 1 + 2p$  و  $a_p = p - 1$  برابر ۶۰ باشد،  $p$  کدام است؟

- ۹ (۱) ۷ (۲) -۹ (۳) -۷ (۴)

۱۰- اعداد  $\frac{5}{p}, y, x, 1$ ، چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند. مجموع یازده جمله اول این دنباله کدام است؟ (ریاضی قارج ۸۶)

- ۵۷ (۱)  $62/5$  (۲)  $67/5$  (۳) ۶۸ (۴)

۱۱- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر است؟ (تجربی قارج ۸۸)

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۱۲- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است. اگر جمله پنجم ۳ واحد از جمله سوم بیشتر باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- $0/25$  (۱)  $-0/25$  (۲)  $0/5$  (۳)  $-0/5$  (۴)

۱۳- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

۱۴- مجموع ۱۵ جمله اول یک دنباله حسابی با مجموع ۲۵ جمله اول آن مساوی است. مجموع ۴۰ جمله اول این دنباله برابر کدام است؟

- صفر (۱)  $S_{20}$  (۲)  $S_{30}$  (۳)  $S_{50}$  (۴)

۱۵- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟ (ریاضی قارج ۸۵)

- $7/5$  (۱) ۸ (۲)  $8/5$  (۳) ۹ (۴)

۱۶- در دنباله حسابی  $\dots, -22, x, -27$  مجموع جملات منفی کدام است؟

- ۱۳۵ (۱)  $-\frac{289}{2}$  (۲) -۱۴۶ (۳)  $-\frac{319}{2}$  (۴)

۱۷- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جمله اول کدام است؟ (تجربی قارج ۸۵)

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

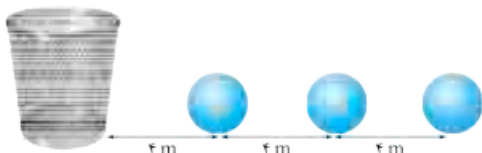
۱۸- با توجه به الگوی مقابل، مجموع نقطه‌ها تا ردیف دهم کدام است؟

- ۵۵ (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۱۱۰ (۴)

۱۹- در دنباله حسابی  $\dots, 11, 8, 5$  حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

۲۰- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۴ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۴ متر است. دهنده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. حداقل چند توپ باید به سبد بیندازد تا بیش از ۴۴۰ متر دویده باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۲۱- در دنباله  $a_n = n^2 - (n+1)^2$ ، مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- ۱ (۱) -۳۹۹ (۲) ۴۰۱ (۳) -۴۰۰ (۴)

۲۲- یک دنباله حسابی ۹۹ جمله دارد. اگر جمله وسط دنباله برابر  $\frac{20}{11}$  باشد، مجموع همه جملات دنباله کدام است؟

- ۱۸۰ (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۱۲ (۳) ۲۳۶ (۴)

۲۳- در یک دنباله حسابی  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 20$  است. مجموع ۱۱ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۵۲ (۱) ۵۵ (۲) ۵۸ (۳) ۶۲ (۴)

۲۴- جواب معادله  $180 = (x+27) + (x+24) + \dots + (x+3) + (x-1)$  کدام است؟

- ۹ (۱)  $9/5$  (۲) ۸ (۳)  $8/5$  (۴)



۲۵- بین دو عدد  $a$  و  $24$ ، پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم. اگر مجموع همه جملات  $126$  باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $3$

۲۶- بین اعداد  $5$  و  $29$  تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. اگر مجموع تمام واسطه‌ها برابر  $119$  باشد، قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $6$

۲۷- در یک دنباله حسابی مجموع همه جملات  $4$  برابر مجموع جملات اول و آخر است. اگر جمله آخر  $21$  واحد از جمله اول بیشتر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $5$

۲۸- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر  $240$  است. اگر مجموع همه جملات دنباله برابر  $520$  باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

- (۱)  $13$  (۲)  $18$  (۳)  $26$  (۴)  $28$

۲۹- در یک دنباله حسابی  $S_{16} - S_9 = 49$  است. مجموع بیست و پنج جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱)  $145$  (۲)  $155$  (۳)  $165$  (۴)  $175$

۳۰- اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشد و  $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ ، آن‌گاه مجموع  $6$  جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱)  $60$  (۲)  $66$  (۳)  $72$  (۴)  $75$

۳۱- اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشد و  $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4$ ، آن‌گاه جمله چهارم چه قدر از جمله دوم بیشتر است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $4$  (۳)  $6$  (۴)  $8$

۳۲- اگر مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی  $2$  واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر و  $5$  واحد از مجموع پنج جمله اول کم‌تر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $5$  (۲)  $4$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۳۳- مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = 3n^2 - n$  است. مجموع جملات با شماره زوج کوچک‌تر از جمله بیستم کدام است؟

- (۱)  $425$  (۲)  $455$  (۳)  $504$  (۴)  $515$

۳۴- مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله

هجدهم، کدام است؟

- (۱)  $9$  (۲)  $\frac{29}{3}$  (۳)  $\frac{49}{3}$  (۴)  $18$

۳۵- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد  $\dots, (10, 9, 8, 7), (6, 5, 4), (3, 2), (1)$ . مجموع جملات

در دسته بیستم کدام است؟

- (۱)  $4010$  (۲)  $4020$  (۳)  $4030$  (۴)  $4040$

۳۶- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد  $\dots, (11, 9, 7), (5, 3), (1)$ . مجموع بیست

جمله اول دسته سی‌ام کدام است؟

- (۱)  $18600$  (۲)  $18700$  (۳)  $17800$  (۴)  $16800$

۳۷- در دو دنباله حسابی به صورت  $\dots, 11, 7, 3, \dots$  و  $\dots, 8, 5, 2, \dots$  مجموع اعداد دورقمی مشترک کدام است؟

- (۱)  $375$  (۲)  $388$  (۳)  $412$  (۴)  $424$

۳۸- مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی که مضرب  $6$  هستند، کدام است؟

- (۱)  $785$  (۲)  $810$  (۳)  $845$  (۴)  $760$

۳۹- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر  $3$  و کوچک‌تر از  $101$  کدام است؟

- (۱)  $816$  (۲)  $852$  (۳)  $867$  (۴)  $884$

۴۰- مجموع اعداد طبیعی دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر  $4$  برابر  $3$  می‌باشند، کدام است؟

- (۱)  $1185$  (۲)  $1220$  (۳)  $1265$  (۴)  $1380$

### مجموع جملات دنباله هندسی

۴۱- مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی  $9, 18, 36, \dots$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{277}{4}$  (۲)  $70$  (۳)  $\frac{279}{4}$  (۴)  $69$

۴۲- مجموع چند جمله دنباله هندسی  $\dots, 24, -12, 6, \dots$  برابر  $1026$  است؟

- (۱)  $9$  (۲)  $8$  (۳)  $6$  (۴)  $12$

۴۳- دنباله هندسی  $\dots, \frac{1}{p}, x, 2, \dots$  با قدرنسبت منفی مفروض است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{41}{32}$  (۲)  $\frac{21}{16}$  (۳)  $\frac{11}{8}$  (۴)  $\frac{23}{16}$

(ریاضی قارج ۱۹ باکلی تغییر)

۴۴- در یک دنباله هندسی به صورت  $\dots, b, a, 9, 4$  با قدرنسبت مثبت، مجموع شش جمله اول کدام است؟

$81 \frac{3}{8}$ (۱)	$81 \frac{7}{8}$ (۲)	$82 \frac{3}{8}$ (۳)	$83 \frac{1}{8}$ (۴)
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

۴۵- به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$  و  $2x$  و  $x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت هستند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

$117 \frac{1}{16}$ (۱)	$125 \frac{1}{16}$ (۲)	$63 \frac{3}{4}$ (۳)	$127 \frac{1}{8}$ (۴)
------------------------	------------------------	----------------------	-----------------------

۴۶- جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت  $a_n = 2^{1-n}$  است. مجموع شش جمله اول دنباله کدام است؟

$63$ (۱)	$63 \frac{63}{32}$ (۲)	$127$ (۳)	$127 \frac{127}{64}$ (۴)
----------	------------------------	-----------	--------------------------

۴۷- بین دو عدد  $324$  و  $4$ ، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این  $5$  عدد مثبت کدام است؟

$482$ (۱)	$484$ (۲)	$486$ (۳)	$488$ (۴)
-----------	-----------	-----------	-----------

۴۸- بین دو عدد  $2$  و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

$30(2 + \sqrt{2})$ (۱)	$48\sqrt{2}$ (۲)	$30(\sqrt{2} + 1)$ (۳)	$36(\sqrt{2} + 1)$ (۴)
------------------------	------------------	------------------------	------------------------

۴۹- در دنباله هندسی با قدرنسبت منفی  $\dots, 6, a, 2$  مجموع سه جمله دوم چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

$3$ (۱)	$-3$ (۲)	$3\sqrt{3}$ (۳)	$-3\sqrt{3}$ (۴)
---------	----------	-----------------	------------------

۵۰- در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول،  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$\frac{1}{16}$ (۱)	$\frac{1}{8}$ (۲)	$\frac{5}{32}$ (۳)	$\frac{1}{4}$ (۴)
--------------------	-------------------	--------------------	-------------------

(ریاضی ۱۵)

۵۱- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول  $136$  و مجموع شش جمله اول آن  $153$  است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟

$\frac{81}{16}$ (۱)	$8$ (۲)	$9$ (۳)	$16$ (۴)
---------------------	---------	---------	----------

(ریاضی ۱۹)

۵۲- در یک دنباله هندسی صعودی غیرصفر مجموع  $8$  جمله اول  $17$  برابر مجموع  $4$  جمله اول است، مجموع معکوس‌های  $8$  جمله اول چند برابر مجموع معکوس‌های  $4$  جمله اول است؟

$\frac{1}{17}$ (۱)	$\frac{17}{16}$ (۲)	$\frac{16}{17}$ (۳)	$2$ (۴)
--------------------	---------------------	---------------------	---------

۵۳- تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن  $3$  برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)	$2$ (۳)	$3$ (۴)
-------------------	-------------------	---------	---------

(ریاضی ۹۴)

۵۴- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول از جمله ششم است. جمله پنجم چند برابر جمله اول است؟

$2$ (۱)	$\frac{5}{3}$ (۲)	$3$ (۳)	$\frac{4}{3}$ (۴)
---------	-------------------	---------	-------------------

۵۵- در یک دنباله هندسی، مجموع  $8$  جمله اول  $48$  و مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم برابر  $240$  است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

$\sqrt[3]{4}$ (۱)	$\sqrt[3]{5}$ (۲)	$2$ (۳)	$\sqrt{5}$ (۴)
-------------------	-------------------	---------	----------------

۵۶- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر  $1$  و مجموع چهار جمله اول آن  $3$  می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

$10/8$ (۱)	$11/2$ (۲)	$12/6$ (۳)	$13/4$ (۴)
------------	------------	------------	------------

(ریاضی ۱۸)

۵۷- در یک دنباله هندسی سوم  $1/44$  واحد از جمله دوم بیشتر است و جمله دوم  $1/8$  واحد از جمله اول کم‌تر است. مجموع چهار جمله اول دنباله کدام است؟

$0/376$ (۱)	$0/488$ (۲)	$0/328$ (۳)	$0/456$ (۴)
-------------	-------------	-------------	-------------

۵۸- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت، مجموع جملات سوم و ششم برابر  $14$  و تفاضل جملات سوم و نهم برابر  $98$  است. مجموع چهار جمله اول کدام است؟

$6$ (۱)	$\frac{20}{3}$ (۲)	$\frac{11}{2}$ (۳)	$\frac{35}{6}$ (۴)
---------	--------------------	--------------------	--------------------

۵۹- جمله ششم یک دنباله هندسی  $81$  و حاصل ضرب پنج جمله اول دنباله،  $243$  است. مجموع پنج جمله اول دنباله کدام است؟

$40 \frac{1}{3}$ (۱)	$40 \frac{2}{3}$ (۲)	$40 \frac{1}{9}$ (۳)	$41 \frac{1}{9}$ (۴)
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

(ریاضی ۱۲)

۶۰- حاصل  $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

$507$ (۱)	$511$ (۲)	$512$ (۳)	$516$ (۴)
-----------	-----------	-----------	-----------

(ریاضی قارج ۹۳)

۶۱- حاصل عبارت  $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۲- اگر در خانه اول شطرنج ۱ گندم، در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل، گندم قرار دهیم، اولین خانه‌ای که مجموع تعداد گندم‌ها تا آن خانه بیشتر از ۴۱۰۰ خواهد بود، کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۶۳- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ کرده سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۴- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مضر بیش از ۹۹ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۵- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها می‌شود، پس از زمین خوردن، به اندازه  $\frac{1}{4}$  ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. اگر این توپ از ارتفاع ۱۰ متری رها شود، در لحظه‌ای که توپ برای ششمین بار به زمین می‌خورد، توپ تقریباً چه مسافتی را پیموده است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۷ (۳) ۲۳ (۴) ۲۷



۶۶- اگر  $a_n = 2^n$  و  $b_n = 3^{1-n}$ ، مجموع ۵ جمله اول دنباله  $a_n \cdot b_n$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{422}{9}$  (۲)  $\frac{211}{9}$  (۳)  $\frac{211}{81}$  (۴)  $\frac{422}{81}$

۶۷- دنباله مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $\dots, \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}$  است. مجموع ده جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- (۱)  $3 \cdot \frac{1}{3}$  (۲)  $3 \cdot \frac{2}{3}$  (۳)  $3 \cdot \frac{1}{3}$  (۴)  $3 \cdot \frac{2}{3}$

۶۸- مجموع ده جمله اول دنباله  $9, 99, 999, \dots$  چندتا یک دارد؟

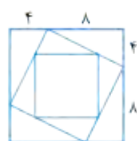
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۹- مجموع ده جمله اول دنباله  $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$  چند برابر  $\frac{1}{1024}$  است؟

- (۱) ۹۱۷۲ (۲) ۹۷۱۲ (۳) ۹۲۱۷ (۴) ۹۲۷۱

۷۰- در شکل مقابل، طول ضلع مربع بزرگ‌تر برابر ۱۲ است. مطابق شکل مربع‌هایی با نسبت‌های ثابت روی اضلاع، در داخل مربع بزرگ‌تر رسم شده است. با رسم حداقل چند مربع، مجموع مساحت‌های مربع‌ها از ۲۹۷ بیشتر می‌شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



۷۱- در یک دنباله حسابی جمله اول ۳ واحد از جمله دوم کم‌تر است. اگر مجموع  $n$  جمله اول  $10$  و مجموع  $2n$  جمله اول  $68$  باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۷۲- حاصل مجموع  $2 - 15x^{15} + 3x^3 + 2x^2 + x$  به ازای  $x = 2$  کدام است؟

- (۱)  $5(2^{17})$  (۲)  $5(2^{16})$  (۳)  $7(2^{17})$  (۴)  $7(2^{16})$

۷۳- در یک دنباله هندسی جمله  $(n - m)$  ام برابر ۲۰ و جمله  $(n + m)$  ام آن برابر ۵ است. اگر بین جمله  $m$  ام دنباله و عدد ۱۶۰، هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، مجموع کل نه عدد حاصل کدام است؟

- (۱)  $280 + 70\sqrt{2}$  (۲)  $320 + 120\sqrt{2}$  (۳)  $290 + 140\sqrt{2}$  (۴)  $310 + 150\sqrt{2}$

۷۴- مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی برابر  $15/75$  و مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر  $7/875$  است. حاصل ضرب این شش جمله کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{1}{4}$



۷- گزینه ۲: از رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}]$$

جمله عمومی دنباله را داریم، پس:

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 \\ a_{15} = \frac{45}{2} - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5] = \frac{15}{2}[\frac{48}{2} - 10]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[24 - 10] = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

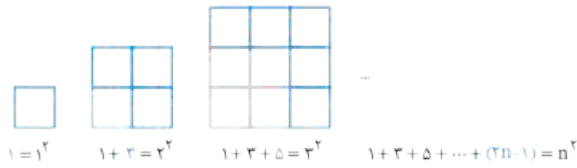
۸- گزینه ۲: مجموع داده شده، مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و جمله آخر  $2n-1$  است. (جمله اول دنباله  $1=1-1$ ، جمله دوم  $3=2-1$ ، ... و در نتیجه جمله  $n$ ام،  $2(n)-1$  است. پس  $n$ تا جمله داریم.)

با توجه به فرمول  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  داریم:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}[1 + 2n-1]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

مطابق الگوی زیر عمل کنیم:



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۹- گزینه ۲: جمله اول و دوم را داریم، پس قدرنسبت را هم داریم:

$$d = a_p - a_1 = (p-1) - (1+2p) = -p-2 \quad (*)$$

مجموع ۸ جمله اول را هم داریم:

$$S_8 = 60 \Rightarrow \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 60$$

$$\Rightarrow 4[2(1+2p) + 7(-p-2)] = 60$$

$$\Rightarrow 4(2+4p-7p-14) = 60 \Rightarrow 4(-3p-12) = 60$$

$$\Rightarrow -3p-12=15 \Rightarrow -3p=27 \Rightarrow p=-9$$

۱۰- گزینه ۲: جمله اول را داریم:  $a_1 = 1$  اما قدرنسبت را نه. آفه به کاره؟ فب درست و حسابی قدرنسبت رو هم بدین دیگه! باید با توجه به جملات معلوم، قدرنسبت را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_p = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a_p - a_1 = rd \Rightarrow \frac{5}{2} - 1 = rd$$

$$\Rightarrow rd = \frac{3}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

جمله اول و قدرنسبت را داریم، پس از فرمول  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  برای محاسبه پانزده جمله اول استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2(1) + 14(\frac{1}{2})] = \frac{15}{2}[2+7] = \frac{15 \times 9}{2} = 67.5$$

۱- گزینه ۲: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  برابر

$$S_p = 1+2+\dots+20 = \frac{20(21)}{2} = 210 \text{ است. بنابراین:}$$

۲- گزینه ۲: نقطه اول به ۱۴ نقطه دیگر وصل می‌شود و ۱۴ تا وتر ایجاد می‌کند. نقطه دوم به ۱۳ نقطه باقی مانده وصل می‌شود و ۱۳ تا وتر ایجاد می‌کند. با ادامه این عمل داریم:

$$14+13+\dots+1 = \frac{14(14+1)}{2} = 105$$

۳- گزینه ۲:

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ d = a_p - a_1 = -1 - (-4) = 3 \end{cases} \Rightarrow -4, -1, 2, \dots$$

قدرنسبت و جمله اول را داریم. پس مجموع پانزده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(-4) + 14(3)]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[-8 + 42] = 15 \times 17 = 255$$

۴- گزینه ۲: «هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه  $\frac{1}{p}$  کم تر است»

$$d = -\frac{1}{p}$$

یعنی:

با توجه به مقادیر  $d = -\frac{1}{p}$  و  $a_1 = 5$  مجموع ده جمله اول دنباله برابر

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

است با:

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(5) + 9(-\frac{1}{p})] = 5(5 - \frac{9}{p}) = 27.5$$

۵- گزینه ۲: مجموع ۲۰ جمله اول (وقتی هنوز دست به پیزی نزدیم!)

$$S_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)d] = 10[2a_1 + (p-1)d]$$

برابر است با:

حالا قدرنسبت را یک واحد زیاد می‌کنیم و مجموع ۲۰ تا جمله اول این دنباله جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$S'_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)(d+1)] = 10[2a_1 + (p-1)d + 10]$$

$$= 10[2a_1 + (p-1)d] + 100 = 10S_p + 100$$

پس با دست زدن به قدرنسبت!  $100$  واحد به مجموع بیست جمله اول اضافه می‌شود.

۶- گزینه ۲: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله برابر ۲۵ است، پس:

$$S_{10} = 25 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 25 \quad (**)$$

وقتی به جملات ۶ واحد اضافه، سپس در ۲ ضرب و در پایان ۳ واحد از هر یک کم کنیم، جملات جدید به صورت  $2(a_1+6)-3, 2(a_2+6)-3, \dots, 2(a_{10}+6)-3$  خواهند بود.

مجموع این جملات برابر است با:

$$S' = 2(a_1+6)-3 + 2(a_2+6)-3 + \dots + 2(a_{10}+6)-3$$

$$\Rightarrow S' = 2a_1 + 9 + 2a_2 + 9 + \dots + 2a_{10} + 9$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + \underbrace{9+9+\dots+9}_{10 \text{ تا}}$$

$$\Rightarrow S' = 2(25) + 10(9) = 50 + 90 = 140$$

۱۵- گزینه ۳: مجموع ۴ جمله اول ۱۵ است، پس  $S_4 = 15$ . مجموع پنج تا جمله بعدی هم ۳۰ است، پس طراح غیرمستقیم مجموع ۹ تا جمله اول را هم داده است. نگاه کن:

$$S_9 = \text{مجموع پنج جمله بعدی} + \text{مجموع چهار جمله اول} = 15 + 30 = 45$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2} [2a_1 + 3d] = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} (*) \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2} [2a_1 + 8d] = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(**) - (*)} \Delta d = 10 - \frac{15}{2} \Rightarrow \Delta d = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 2a_1 + 8\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \Rightarrow 2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$$

با توجه به مقدار  $a_1$  و  $d$ ، جمله یازدهم را محاسبه کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۱۶- گزینه ۳: با توجه به جملات دنباله داریم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_7 = -22 \end{cases} \Rightarrow a_7 - a_1 = 2d$$

$$\Rightarrow -22 - (-27) = 2d \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

برای محاسبه مجموع جملات منفی، اول باید ببینیم چندتا جمله منفی داریم. پس جمله عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ d = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a_n = -27 + (n-1)\frac{5}{2}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای چندتا  $n$ ،  $a_n < 0$  است:

$$-27 + (n-1)\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \frac{5}{2}(n-1) < 27$$

$$\Rightarrow n-1 < \frac{54}{5} \Rightarrow n-1 < 10.8 \Rightarrow n < 11.8$$

پس دنباله، ۱۱ تا جمله منفی دارد! بنابراین مجموع این جملات برابر است

با:

$$S_{11} = \frac{11}{2} [2(-27) + 10\left(\frac{5}{2}\right)] = \frac{11}{2} [-54 + 25] = \frac{11}{2} [-29] = -\frac{319}{2}$$

۱۷- گزینه ۳: مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است:

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150 (*)$$

مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است:

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 (**)$$

علا بین چکار می‌کنیم!

$$(*) - (**): \overbrace{\left(\frac{a_2 - a_1}{d} + \frac{a_4 - a_3}{d} + \dots + \frac{a_{20} - a_{19}}{d}\right)}^{11 \text{ جمله}}$$

$$= 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1.5$$

$$(*) + (**): a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19} + a_{20} = 285$$

$$\Rightarrow S_{20} = 285 \Rightarrow \frac{20}{2} [2a_1 + 19d] = 285$$

$$10(2a_1 + 19d) = 285 \xrightarrow{d=1.5} 2a_1 + 19(1.5) = 28.5$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 28.5 = 28.5 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

۱۱- گزینه ۳:  $a_7 = \frac{1}{2} a_7$ : جمله هفتم نصف جمله سوم است

$$\Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

برای این که ببینیم مجموع چند جمله اول دنباله صفر است، باید  $S_n$  را برابر صفر قرار دهیم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = 0$$

$$\xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2} [-20d + (n-1)d] = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} [(n-21)d] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ (همه جملات صفر می‌شوند که مدنظر نیست.)} \\ n = 21 \end{cases}$$

پس مجموع ۲۱ جمله اول دنباله، صفر است.

۱۲- گزینه ۳: مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است:

$$S_5 = S_3 + 10$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} [2a_1 + 4d] = \frac{3}{2} [2a_1 + 2d] + 10$$

$$\Rightarrow 5a_1 + 10d = 3a_1 + 3d + 10 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 10 (*)$$

$$a_5 - a_3 = 3: \text{ جمله پنجم، ۳ واحد از جمله سوم بیشتر است.}$$

$$\Rightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} 2a_1 + 7\left(\frac{3}{2}\right) = 10 \Rightarrow 2a_1 + 10.5 = 10$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -0.5 \Rightarrow a_1 = -0.25$$

۱۳- گزینه ۳: مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول است:

$$S_{20} = 3S_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{2} [2a_1 + (20-1)d] = 3 \left[ \frac{12}{2} [2a_1 + (12-1)d] \right]$$

$$\Rightarrow 10 [2a_1 + 19d] = 18 [2a_1 + 11d] \Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 16a_1 = -8d \Rightarrow d = -2a_1$$

همچنین جمله سوم دنباله برابر ۶ است:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{d=-2a_1} a_1 + 2(-2a_1) = 6$$

$$\Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{d=-2a_1} d = 4$$

با توجه به مقادیر  $a_1$  و  $d$  جمله دهم دنباله برابر است با:

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۱۴- گزینه ۳: مجموع ۱۵ جمله اول با مجموع ۲۵ جمله اول برابر است، پس:

$$S_{25} = S_{15}$$

با توجه به رابطه  $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$  داریم:

$$\frac{25}{2} [2a_1 + 24d] = \frac{15}{2} [2a_1 + 14d]$$

$$\Rightarrow 5[2a_1 + 24d] = 3[2a_1 + 14d]$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 120d = 6a_1 + 42d \Rightarrow 4a_1 + 78d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 39d = 0 (*)$$

از طرفی مجموع چهل جمله اول برابر است با:

$$S_{40} = \frac{40}{2} [2a_1 + 39d] = 20(0) = 0$$

۱۸- گزینه ۲ در ردیف اول دو نقطه، در ردیف دوم چهار نقطه و ... است. پس دنباله نقاط این ردیفها به صورت مقابل است: ۲, ۴, ۶, ۸, ...

برای محاسبه مجموع نقطهها تا ردیف دهم، باید مجموع ده جمله اول دنباله را حساب کنیم:

$$2, 4, 6, 8, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2} [2(2) + 9(2)] = 10[2+9] = 110$$

از نکته زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در ردیف دهم بیست تا نقطه داریم، بنابراین:

$$S_{10} = 2 + 4 + \dots + 20 = 2(1 + 2 + \dots + 10) = 2\left(\frac{10(11)}{2}\right) = 110$$

۱۹- گزینه ۲

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود، یعنی کمترین مقداری از n را حساب کنید که  $S_n > 500$ :

$$\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] > 500$$

$$\xrightarrow{a_1=5, d=3} \frac{n}{2} [2(5) + (n-1)3] > 500$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} [10 + 3n - 3] > 500 \Rightarrow \frac{n}{2} [3n + 7] > 500$$

$$\xrightarrow{\times 2} 3n^2 + 7n > 1000 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \quad (*)$$

جوابهای معادله  $3n^2 + 7n - 1000 = 0$  برابر است با:

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(3)(-1000)}}{2(3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{12049}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm 109.77}{6}$$

$$= \begin{cases} n_1 = \frac{-7 + 109.77}{6} = \frac{102.77}{6} = 17.13 \\ n_2 = \frac{-7 - 109.77}{6} = \frac{-116.77}{6} = -19.46 \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادله (\*) خارج دو ریشه است پس:

$$3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow \begin{cases} n > 17.13 \\ n < -19.46 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } n \text{ مثبت است}} n > 17.13 \Rightarrow n \geq 18$$

پس حداقل باید ۱۸ جمله اول را جمع کنیم تا مجموع بیشتر از ۵۰۰ شود.

۲۰- گزینه ۲ برای برداشتن توپ اول، ۴ متر میره و ۴ متر میاد، یعنی  $2(4)$ .

برای برداشتن توپ دوم، ۸ متر میره و ۸ متر میاد، یعنی  $2(8)$  و همین‌طور میره و میاد! پس کل مسافتی که دونده برای انداختن توپ nام طی می‌کند به صورت مجموع زیر است:

$$S_n = 2(4) + 2(8) + 2(12) + \dots + 8n$$

$$= 8(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 4n^2 + 4n$$

حالا اگر بفوایم ماشو بگیریم و یک کاری کنیم بیش از ۴۴۰ متر بدوئه !! باید نامعادله  $S_n > 440$  را حل کنیم:

$$4n^2 + 4n > 440 \Rightarrow n^2 + n > 110 \Rightarrow n^2 + n - 110 > 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(n+11) > 0 \Rightarrow n < -11, n > 10$$

پس باید بیشتر از ۱۰ تا توپ داخل سبد بندازه. یعنی حداقل ۱۱ تا توپ باید بندازه.

۲۱- گزینه ۲ اول جمله عمومی را کمی ساده‌تر کنیم؛ با استفاده از اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای این کار را انجام می‌دهیم:

$$a_n = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1$$

با توجه به این که جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $a_n = an + b$  است و این‌جا هم جمله عمومی یعنی  $a_n = -2n - 1$ ، همین فرم را دارد، پس با یک دنباله حسابی سروکار داریم. بنابراین با کمک فرمول

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} [a_1 + a_{19}]$$

$$\xrightarrow{a_n = -2n - 1, a_1 = -3, a_{19} = -39} S_{19} = \frac{19}{2} [(-3) + (-39)]$$

$$= \frac{19}{2} (-42) = 19(-21) = -399$$

۲۲- گزینه ۲ وقتی دنباله ۹۹ جمله دارد، جمله ۵۰ جمله وسط

خواهد بود، پس:  $a_{50} = \frac{20}{11}$ . از طرفی مجموع ۹۹ جمله اول دنباله برابر

$$S_{99} = \frac{99}{2} [a_1 + a_{99}] \quad \text{است با:}$$

چون جمله پنجاهم وسط جملات اول و نود و نهم است، پس:

$$a_1 + a_{99} = 2a_{50} \quad (\text{جمع اندیس‌ها در دو طرف برابر است.})$$

$$\Rightarrow S_{99} = \frac{99}{2} [2a_{50}] = 99a_{50} = 99\left(\frac{20}{11}\right) = 180$$

۲۳- گزینه ۲ مجموع ۱۱ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2} [2a_1 + 10d] \quad (*)$$

حالا از تساوی داده‌شده کمک می‌گیریم:

$$a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20$$

$$\Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 8d = 20$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 20d = 20 \xrightarrow{\div 4} 2a_1 + 10d = 10$$

۲۴- گزینه ۲ دنباله اعداد ۲۷, ..., ۱, ۳, ۷, ... تشکیل یک دنباله

حسابی با جمله اول  $a_1 = -1$ ، جمله آخر  $a_n = 27$  و قدرنسبت  $d = 4$  می‌دهند. بنابراین تعداد جملات را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 27 = -1 + (n-1)4$$

$$\Rightarrow 28 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

می‌توانید تعداد جملات را به صورت زیر هم حساب کنید:

$$\frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{قدرنسبت}} + 1 = \frac{27 - (-1)}{4} + 1$$

برگردیم معادله را حل کنیم. برای حل معادله، طرف چپ را به صورت زیر بازنویسی

$$\underbrace{(x + x + \dots + x)}_{\text{تا } 8} + (-1 + 3 + 7 + \dots + 27) = 180 \quad \text{می‌کنیم:}$$



۲۸- گزینه ۳ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر ۲۴۰ است:

$$(*) \quad 240 = \text{مجموع سه جمله آخر} + \text{مجموع سه جمله اول}$$

$$\begin{cases} \text{مجموع سه جمله اول} = a_1 + a_2 + a_3 \\ \text{مجموع سه جمله آخر} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 240 \quad (**)$$

مجموع اندیس‌های هر پرانتز برابر  $n+1$  است، پس:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 3(a_1 + a_n) = 240 \Rightarrow a_1 + a_n = 80$$

مجموع همه جملات دنباله برابر ۵۲۰ است. پس با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \text{ داریم:}$$

$$520 = \frac{n}{2} (80) \Rightarrow 520 = 40n \Rightarrow n = 13$$

۲۹- گزینه ۳

$$\begin{cases} S_{16} = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + \dots + a_{16} \\ S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} S_{16} - S_9 = a_{10} + a_{11} + \dots + a_{16} = 49$$

از  $a_{10}$  تا  $a_{16}$ ، ۷ تا جمله داریم، بنابراین در طرف چپ تساوی طبق فرمول

$$[\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}] S_n = \frac{n}{2} \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} (a_{10} + a_{16}) = 49 \Rightarrow a_{10} + a_{16} = 14 \Rightarrow 2a_{13} = 14$$

حالا مجموع بیست و پنج جمله اول دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{25} = \frac{25}{2} [a_1 + a_{25}] = \frac{25}{2} (14) = 25 \times 7 = 175$$

۳۰- گزینه ۳

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

با توجه به این که  $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$  (\*) پس:

در نتیجه مجموع ۶ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_6 = \frac{6}{2} [a_1 + a_6] \xrightarrow{a_1=5, a_6=15} S_6 = 3[5+15] = 60$$

۳۱- گزینه ۳ داریم:

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4 \Rightarrow S_n - S_{n-1} - S_{n-1} + S_{n-2} = 4$$

$$\Rightarrow (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = 4 \quad (**)$$

می‌دانیم  $S_n - S_{n-1} = a_n$ ، بنابراین  $S_{n-1} - S_{n-2} = a_{n-1}$  و در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} a_n - a_{n-1} = 4 \Rightarrow d = 4 \quad (***)$$

پس برای این که ببینیم جمله چهارم چه قدر از جمله دوم بیشتر است به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 2d \stackrel{(***)}{=} 2(4) = 8$$

۳۲- گزینه ۳ مجموع چهار جمله اول، ۲ واحد بیشتر از مجموع سه جمله

$$S_4 - S_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 2 \quad (**)$$

اول است، پس:

مجموع چهار جمله اول، ۵ واحد از مجموع پنج جمله اول کم‌تر است، پس:

$$S_5 - S_4 = 5 \Rightarrow S_5 - S_4 = 5 \Rightarrow a_5 = 5 \quad (***)$$

(۲۷+۷+۳+۱) مجموع ۸ جمله اول یک دنباله حسابی با جمله

اول ۱- و جمله آخر ۲۷ است، بنابراین:

$$\Rightarrow 8x + \frac{1}{2}[-1+27] = 180 \Rightarrow 8x + 4(26) = 180$$

$$\Rightarrow 8x + 104 = 180 \Rightarrow 8x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{8} = 9.5$$

۲۵- گزینه ۳ بین دو عدد  $a$  و ۲۴ پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم.

پس تعداد جملات برابر ۷، جمله اول  $a$  و جمله آخر (جمله هفتم)

۲۴ است. چون مجموع همه جملات برابر ۱۲۶ است، بنابراین:

$$S_7 = \frac{7}{2} [\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}] = \frac{7}{2} [a + 24] = 126$$

$$\Rightarrow a + 24 = 36 \Rightarrow a = 12$$

برای محاسبه قدرنسبت هم از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = a = 12 \\ a_7 = a + 6d \Rightarrow 24 = 12 + 6d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12 = 6d \Rightarrow d = 2$$

۲۶- گزینه ۳ بین ۵ و ۲۹ تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم.

پس جمله اول و آخر واسطه را با فرض این که قدرنسبت دنباله حاصل  $d$

است می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:  $5, 5+d, \dots, 29-d, 29$

حالا با کمک رابطه  $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$  مجموع واسطه‌ها را می‌یابیم. فقط

دقت کنید که جمله اول واسطه‌ها  $5+d$  و جمله آخر آن  $29-d$  است:

$$S_n = \frac{n}{2} [5+d+29-d] \Rightarrow 119 = \frac{n}{2} [34]$$

$$\Rightarrow 119 = 17n \Rightarrow n = 7$$

با توجه به این که تعداد واسطه‌ها ۷ تا است، عدد ۲۹ جمله نهم و عدد ۵ جمله

اول است، پس:  $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_9 = a_1 + 8d$

$$\Rightarrow 29 = 5 + 8d \Rightarrow 24 = 8d \Rightarrow d = 3$$

۳۰- گزینه ۳ بین ۵ و ۲۹ تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. مجموع این

واسطه‌ها برابر ۱۱۹ است، بنابراین داریم:

$$S_n = 5 + 119 + 29 = 153$$

مجموع واسطه‌ها ۱۱۹

با داشتن جمله اول و آخر و مجموع جملات، تعداد آن‌ها را می‌یابیم.

$$S_n = \frac{n}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول})$$

$$153 = \frac{n}{2} (5 + 29) = 17n \Rightarrow n = 9$$

با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی، قدرنسبت را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{matrix} a_1 = 5 \\ a_9 = 29 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 29 = 5 + 8d$$

$$\Rightarrow 24 = 8d \Rightarrow d = 3$$

۲۷- گزینه ۳ مجموع همه جملات، ۴ برابر مجموع جملات اول و آخر

است. پس:  $S_n = 4(a_1 + a_n)$

با توجه به تساوی بالا از فرمول  $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$  استفاده کرده و تعداد

جملات را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n}{2} [a_1 + a_n] = 4(a_1 + a_n) \Rightarrow \frac{n}{2} = 4 \Rightarrow n = 8$$

جمله آخر ۲۱ واحد از جمله اول بیشتر است. چون  $n = 8$  است پس جمله

آخر همان جمله هشتم است. در نتیجه:

$$a_8 = 21 + a_1 \Rightarrow a_1 + 7d = 21 + a_1 \Rightarrow 7d = 21 \Rightarrow d = 3$$

۳۶- گزینه ۲: فیلی سؤال یون داریه! باید اول ببینیم تا اون جمله ای که می‌خواهد هندتا عدد داریم:

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته n ام برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

↓            ↓            ↓  
دسته سوم   دسته دوم   دسته اول

تا جمله آخر دسته بیست و نهم  $\frac{29(30)}{2} = 435$  تا عدد می‌بینیم. پس تا جمله اول دسته سی ام ۴۳۶ تا عدد می‌بینیم. بنابراین جمله اول دسته سی ام، جمله ۴۳۶ ام دنباله کل اعداد یعنی ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... است. این دنباله، دنباله اعداد طبیعی فرد است. پس جمله عمومی آن  $a_n = 2n - 1$  است. (می‌توانید بگویید با یک دنباله حسابی با جمله اول یک و قدرنسبت ۲ روبه‌رو هستیم و جمله عمومی آن به صورت  $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$  است.)

جمله ۴۳۶ ام دنباله برابر است با:  
جمله اول دسته سی ام:  $a_{436} = 2(436) - 1 = 871$   
برای محاسبه مجموع بیست جمله اول دسته سی ام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۳۷- گزینه ۲: قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر ک.م.م قدرنسبت دنباله‌هاست. (با نوشتن جملات و یافتن دو جمله مشترک می‌توانید به این نتیجه برسید.) جمله اول این دنباله هم اولین جمله مشترک دورقمی است:

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \Rightarrow d_1 = 4 \\ 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow d_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \Rightarrow a_1 = 11 \\ 12 = \text{ک.م.م}(3, 4) : \text{قدرنسبت دنباله جملات مشترک} \end{cases}$$

پس جمله عمومی دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1)12$$

$$\Rightarrow a_n = 12n - 1$$

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی مشترک باید تعداد جملات را محاسبه کنیم. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$100 \leq 12n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 12n \leq 100$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} \leq n \leq \frac{100}{12} = 8 \dots \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 8$$

پس این دنباله ۸ جمله دارد. در نتیجه مجموع جملات برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2} [2(11) + (7)(12)] = \frac{8}{2} [2(11) + 7(6)]$$

$$= 8[11 + 42] = 8 \times 53 = 424$$

برای محاسبه مجموع ۸ جمله، می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

$$S_8 = \frac{8}{2} [a_1 + a_8]$$

$$\xrightarrow{a_n = 12n - 1} \xrightarrow{a_1 = 11, a_8 = 95} S_8 = 4(11 + 95) = 4(106) = 424$$

۳۸- گزینه ۲: اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶ به صورت زیر هستند:

۱۲، ۱۸، ...  
دنباله این اعداد، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ است. جمله عمومی دنباله هم برابر  $a_n = 6n + 6 = 6(n+1)$  است. برای محاسبه مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶، باید تعداد جملات را حساب کنیم، پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$6n + 6 \leq 99 \Rightarrow 6n \leq 93 \Rightarrow n \leq 15 \dots \Rightarrow n \leq 15$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \begin{cases} a_4 = 2 \\ a_5 = 5 \end{cases} \Rightarrow d = a_5 - a_4 = 5 - 2 = 3$$

۳۳- گزینه ۲: با توجه به رابطه مربوط به مجموع n جمله اول دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را حساب می‌کنیم:

$$S_n = 3n^2 - n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 3(1)^2 - 1 = 2 \\ d = 2A = 2(3) = 6 \end{cases}$$

دنباله جملات با شماره زوج و کوچک‌تر از ۲۰ به صورت زیر است:

$$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{18}$$

پس جمله اول این دنباله برابر  $a_2$  و قدرنسبت آن برابر  $(a_4 - a_2 = 2d)$  است، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{قدرنسبت جدید} = 2d = 2(6) = 12 \\ \text{جمله اول جدید} = a_2 = a_1 + d = 2 + 6 = 8 \end{cases}$$

تعداد جملات زوج کوچک‌تر از جمله بیستم برابر ۹ تا است. پس مجموع این جملات برابر است با:

$$S_9 = \frac{9}{2} [2(8) + 8(12)] = \frac{9}{2} [2(8) + 4(12)] = 9(8 + 48)$$

$$= 9(56) = 504$$

۳۴- گزینه ۲: مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم برابر است با:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

برای محاسبه این مجموع، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{18} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_6}_{S_6} + \underbrace{a_7 + a_8 + \dots + a_{18}}_{\text{خواسته مسئله}}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6$$

$$\text{چون } S_n = \frac{n(n-15)}{6} \text{ پس داریم:}$$

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6}$$

$$= 9 - (-9) = 18$$

۳۵- گزینه ۲: برای این که جملات دسته بیستم را شناسایی کنیم، اول باید بررسی کنیم تا جمله آخر دسته نوزدهم، چندتا عدد وجود دارد!

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته نوزدهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = \frac{19(20)}{2} = 190$$

پس جمله اول دسته بیستم، جمله ۱۹۱ ام دنباله اعداد طبیعی است.

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \Rightarrow a_n = n$$

جمله اول دسته بیستم:  $a_{191} = 191$

پس در دسته بیستم، بیست تا جمله با جمله اول ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ داریم.

پس طبق فرمول  $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$  مجموع آن‌ها را حساب

$$\text{می‌کنیم:} \quad \text{مجموع جملات دسته بیستم} = \frac{20}{2} [2(191) + (19)(1)]$$

$$= 10 [382 + 19] = 4010$$

تازه یک کار دیگر هم میشه کرد! بگیم چون تا جمله آخر دسته نوزدهم

۱۹۰ تا عدد داریم پس تا جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ تا عدد داریم. پس

با توجه به  $a_n = n$ ، جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ است. پس طبق فرمول

$$[\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}] S_n = \frac{n}{2}$$

$$S = \frac{20}{2} [191 + 210] = 4010$$

بنابراین، دنباله ۱۵ تا جمله دارد. در نتیجه با توجه به فرمول  

$$S_n = \frac{n}{p}(a_1 + a_n)$$

$$S_{15} = \frac{15}{p}(a_1 + a_{15}) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{p}(12 + 6(16))$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{p}(108) = 15 \times 54 = 810$$

۳۹- **گزینه ۳** اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ به صورت زیر هستند:  
 ۳, ۹, ۱۵, ...

این دنباله، یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = 3$  و قدرنسبت  $d = 6$  است. پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

چون مجموع اعدادی که کوچکتر از ۱۰۱ هستند را باید حساب کنیم؛ پس ابتدا تعداد جملات کوچکتر از ۱۰۱ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n < 101 \Rightarrow 6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104$$

$$\Rightarrow n < \frac{104}{6} = 17.33 \Rightarrow n = \{1, 2, \dots, 17\}$$

پس دنباله، ۱۷ جمله کوچکتر از ۱۰۱ دارد. مجموع این ۱۷ جمله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{p}[2(3) + 16(6)] = \frac{17}{p}[2(3 + 48)]$$

$$= 17 \times 51 = 867$$

۴۰- **گزینه ۳** اعداد طبیعی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ است به صورت زیر هستند:

$$3, 7, 11, 15, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی: } a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ است، اول باید تعداد جملات را حساب کنیم؛ برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 4n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 4n \leq 100 \Rightarrow \frac{11}{4} \leq n \leq 25$$

$$\Rightarrow 3 \leq n \leq 25$$

$$\text{تعداد جملات} = 25 - 3 + 1 = 23$$

بنابراین مجموع جملات مورد نظر برابر است با:

$$S_{23} = \frac{23}{p}(\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) = \frac{23}{p}(a_p + a_{25})$$

جمله عمومی دنباله،  $a_n = 4n - 1$  است، پس:

$$S_{23} = \frac{23}{p}(11 + 99) = \frac{23}{p}(110) = 23(55) = 1265$$

به طور کلی اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر  $p$  برابر  $t$  است یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن  $p$  است.

۴۱- **گزینه ۳** با یک دنباله هندسی با جمله اول ۳۶ و قدرنسبت

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{36(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{36(1-\frac{1}{32})}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{36(\frac{31}{32})}{\frac{1}{2}} = 36(\frac{31}{16}) = \frac{9 \times 31}{4} = \frac{279}{4}$$

۴۲- **گزینه ۳** دنباله داده شده یک دنباله هندسی با جمله اول ۶ و

قدرنسبت  $-2$  است. پس طبق فرمول  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  مجموع  $n$  جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = \frac{6(1-(-2)^n)}{3} = 2(1-(-2)^n)$$

می‌خواهیم مجموع برابر ۱۰۲۶ شود، بنابراین:

$$S_n = 1026 \Rightarrow 2(1-(-2)^n) = 1026$$

$$\Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

۴۳- **گزینه ۳** برای محاسبه مجموع شش جمله اول به  $a_1$  و  $q$  احتیاج داریم.

$a_1$  که برابر ۲ است. برای محاسبه  $q$  هم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 q = \frac{1}{2} \xrightarrow{a_1=2} 2q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{4}$$

چون قدرنسبت منفی است، پس  $q = -\frac{1}{4}$  را قبول می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1-(-\frac{1}{4})^6)}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{2(\frac{63}{64})}{\frac{5}{4}} = \frac{21}{16}$$

۴۴- **گزینه ۳** قدرنسبت رو داشته باشیم تمام مشکمون هله!

$$a_1 = 4, a_2 = 9 \Rightarrow a_1 q = 9 \Rightarrow 4q = 9 \Rightarrow q = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow q = \pm \frac{3}{2} \xrightarrow{q > 0} q = \frac{3}{2}$$

پس مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}}$$

$$= -8(\frac{-665}{64}) = \frac{665}{8} = 83 \frac{1}{8}$$

۴۵- **گزینه ۳** برای این که سه عدد  $x^2 + 4, 2x, x^2 - 2$  سه جمله

اول یک دنباله هندسی باشند، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, 4, 2, \dots \\ x = -2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, -4, 2, \dots \end{cases}$$

پس جملات دنباله به صورت  $8, 4, 2, \dots$  هستند که این جملات، جملات

متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدرنسبت  $\frac{1}{2}$  است، پس مجموع هفت جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-\frac{1}{128}) = 16(\frac{127}{128}) = \frac{127}{8}$$

۴۶- گزینه ۲: جمله اول دنباله با قراردادن  $n=1$  در جمله عمومی محاسبه می‌شود. برای محاسبه قدرنسبت هم، جمله دوم را حساب می‌کنیم و بعد از تقسیم  $\frac{a_2}{a_1}$ ، مقدار  $q$  را حساب می‌کنیم:

$$a_n = 2^{1-n} = \begin{cases} a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \\ a_2 = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

پس تمام بساطمون برای مناسبه مهموم شش تا جمله اول پوره!

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی  $a(b)^{kn+c}$ ، برابر  $b^k$  است. پس قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی  $2^{1-n}$  برابر  $2^{-1}$  است.

۴۷- گزینه ۲: بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد درج می‌کنیم، پس ۴، جمله اول و ۳۲۴، جمله پنجم می‌شود. طبق فرمول جمله عمومی دنباله هندسی یعنی  $a_n = a_1 q^{n-1}$  داریم:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 324 = 4q^4 \Rightarrow q^4 = 81$$

$$\Rightarrow q = \pm 3 \quad \text{جملات مثبت هستند.}$$

پس مجموع ۵ جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow S_5 = \frac{4(1-3^5)}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = \frac{2(-242)}{-1} = 484$$

۴۸- گزینه ۲: با توجه به این که بین ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش تا عدد قرار می‌دهیم، پس  $a_1 = 2$  و  $a_8 = 16\sqrt{2}$  است، در نتیجه قدرنسبت را اول می‌یابیم:

$$a_8 = a_1 q^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^7 \Rightarrow q^7 = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q^7 = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow q^7 = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

پس مجموع هشت جمله اول برابر است با:

$$S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم.}} S_8 = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۴۹- گزینه ۲: گفتیم نسبت مجموع  $n$  جمله دوم به مجموع  $n$  جمله اول  $q^n$  است، در نتیجه:

$$\frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = q^3 \quad (*)$$

پس باید  $q$  را داشته باشیم. با توجه به جملات دنباله  $a_1 = 2$  و  $a_3 = 6$  داریم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1} = 3 \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{q < 0} q = -\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = (-\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3}$$

۵۰- گزینه ۲: مجموع ۸ جمله اول،  $\frac{5}{4}$  برابر مجموع چهار جمله اول

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \quad (*) \quad \text{است، پس:}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1+q^n \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 1+q^4$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{5}{4} = 1+q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

حالا بررسی می‌کنیم جمله هفتم چند برابر جمله اول است. برای این کار

نسبت  $\frac{a_7}{a_1}$  را باید حساب کنیم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

۵۱- گزینه ۲

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

در نتیجه:

پس جمله اول، ۱۶ برابر جمله پنجم است.

۵۲- گزینه ۲: مجموع ۸ جمله اول ۱۷ برابر مجموع ۴ جمله اول است.

$$\frac{S_8}{S_4} = 1+q^4 = 17 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2 \quad \text{پس:}$$

چون دنباله صعودی است، پس  $q = 2$  قابل قبول است. حالا نسبت مجموع معکوس‌های ۸ جمله اول به مجموع معکوس‌های ۴ جمله اول را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که اگر جملات یک دنباله هندسی معکوس شود، یک دنباله هندسی جدید حاصل می‌شود که قدرنسبت آن معکوس قدرنسبت دنباله اولیه است. بنابراین:

$$\frac{S'_8}{S'_4} = 1+(q')^4 = 1+(\frac{1}{2})^4 = 1+\frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

۵۳- گزینه ۲: در درس‌نامه گفتیم وقتی تعداد جملات زوج است،

نسبت مجموع جملات ردیف زوج ( $S_{\text{زوج}}$ ) به مجموع جملات ردیف فرد ( $S_{\text{فرد}}$ ) برابر  $q$  است. پس با توجه به این که مجموع تمام جملات ۳ برابر

مجموع جملات ردیف فرد است، داریم:

$$\begin{cases} S_{\text{زوج}} = q S_{\text{فرد}} \\ S_{\text{کل}} = 3 S_{\text{فرد}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{S_{\text{کل}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}}} 3 S_{\text{فرد}} = q S_{\text{فرد}} + S_{\text{فرد}}$$

$$\xrightarrow{\div S_{\text{فرد}}} 3 = q + 1 \Rightarrow q = 2$$

۵۴- گزینه ۲: مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول و

ششم است:

$$S_5 = 3(a_6 - a_1) \quad (*)$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$  به صورت

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{است. پس با توجه به تساوی (*) داریم:}$$

$$\xrightarrow{q > 1} \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 3(a_1 q^5 - a_1)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = -3a_1(1-q^5) \Rightarrow \frac{1}{1-q} = -3$$

$$\Rightarrow 1-q = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{4}{3}$$



۵۵- گزینه ۲ مجموع ۸ جمله اول ۴۸ است:

$$S_8 = 48 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 48 \quad (*)$$

مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم، ۲۴۰ است:

$$a_4 + a_5 + \dots + a_{11} = 240 \quad (**)$$

مجموع  $a_4 + a_5 + \dots + a_{11} = 8$  جمله اول یک

دنباله هندسی با جمله اول  $a_4$  و قدرنسبت  $q$  ( $\frac{a_5}{a_4} = q$ ) است. پس با

استفاده از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی در تساوی (\*\*): داریم:

$$\frac{a_4(1-q^8)}{1-q} = 240 \Rightarrow \frac{a_1 q^3 (1-q^8)}{1-q} = 240$$

$$\xrightarrow{(*)} q^3 (48) = 240 \Rightarrow q^3 = 5 \Rightarrow q = \sqrt[3]{5}$$

تعداد اعداد طبیعی از  $a$  تا  $b$  ( $a$  و  $b$  نیز جزو اعداد هستند) برابر  $b - a + 1$  است.

۵۶- گزینه ۲ مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ است:

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1 \quad (*)$$

مجموع چهار جمله اول ۳ است:

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1+q^2)(1-q^2)}{1-q} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1(1-q^2)}{1-q} = 3 \Rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 3 \Rightarrow 1+q = 3$$

$$\Rightarrow q = 2 \xrightarrow{(*)} a_1(1+4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

بنابراین مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_6 = \frac{1}{5} \frac{(1-2^6)}{1-2} = \frac{1}{5} \frac{(-63)}{-1} = \frac{63}{5} = 12 \frac{3}{5} \\ q = 2 \end{cases}$$

۷۵- گزینه ۲ جمله سوم ۱/۴۴ واحد از جمله دوم بیشتر

$$a_3 = 1/44 + a_2 \Rightarrow a_3 - a_2 = 1/44$$

است:

$$\Rightarrow a_1 q^2 - a_1 q = 1/44 \Rightarrow a_1 q(q-1) = 1/44 \quad (**)$$

جمله دوم ۱/۸ واحد از جمله اول کمتر است:

$$a_2 = a_1 - 1/8 \Rightarrow a_2 - a_1 = -1/8$$

$$a_1 q - a_1 = -1/8 \Rightarrow a_1(q-1) = -1/8 \quad (***)$$

با تقسیم (\*) بر (\*\*\*) داریم:

$$\frac{a_1 q(q-1)}{a_1(q-1)} = \frac{1/44}{-1/8} \Rightarrow q = -\frac{144}{180} = -\frac{4}{5} = -0.8$$

$$\xrightarrow{(***)} a_1(-0.8-1) = -1/8 \Rightarrow a_1(-1.8) = -1/8$$

$$\Rightarrow a_1 = 1$$

پس مجموع ۴ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1(1-(-0.8)^4)}{1-(-0.8)} = \frac{1-(0.8)^4}{1.8}$$

$$= \frac{(1-(0.8)^2)(1+(0.8)^2)}{1.8} = \frac{(0.36)(1.64)}{1.8} = 0.328$$

می‌توانید چهار جمله اول را بنویسید و با هم جمع کنید.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -0.8 \end{cases} \Rightarrow \text{چهار جمله اول: } 1, -0.8, 0.64, -0.512$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 0.328$$

۵۸- گزینه ۲ مجموع جملات سوم و ششم برابر ۱۴ است:

$$a_3 + a_6 = 14 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^2 + a_1 q^5 = 14$$

$$\Rightarrow a_1 q^2 (1+q^3) = 14 \quad (*)$$

تفاضل جملات سوم و نهم برابر ۹۸ است:

$$a_3 - a_9 = 98 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^2 - a_1 q^8 = 98$$

$$\Rightarrow a_1 q^2 (q^6 - 1) = 98 \quad (**)$$

با تقسیم (\*\*\*) بر (\*) داریم:

$$\frac{a_1 q^2 (q^6 - 1)}{a_1 q^2 (1 + q^3)} = \frac{98}{14} \Rightarrow \frac{(q^6 - 1)(q^3 + 1)}{(1 + q^3)} = 7$$

$$\Rightarrow q^3 - 1 = 7 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\xrightarrow{(*)} a_1 (2)^2 (1 + 2^3) = 14$$

$$\Rightarrow a_1 (4) (9) = 14 \Rightarrow a_1 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$a_1$  و  $q$  را داریم، پس مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{\frac{7}{18}(1-2^4)}{1-2} = \frac{\frac{7}{18}(-15)}{-1} = \frac{7}{6} (5) = \frac{35}{6}$$

۵۹- گزینه ۲

$$a_6 = 81 \Rightarrow a_1 q^5 = 81 \quad (*)$$

$$a_1 a_2 \dots a_6 = 243 \Rightarrow a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) (a_1 q^3) (a_1 q^4) = 243$$

$$\Rightarrow a_1^5 q^{1+2+3+4} = 243 \Rightarrow a_1^5 q^{10} = 243$$

$$\Rightarrow (a_1 q^2)^5 = 3^5 \Rightarrow a_1 q^2 = 3 \quad (**)$$

با تقسیم (\*) بر (\*\*\*) داریم:

$$\frac{a_1 q^5}{a_1 q^2} = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$\xrightarrow{(***)} a_1 (3)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع پنج جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3} = \frac{\frac{1}{3}(-242)}{-2} = \frac{121}{3} = 40 \frac{1}{3}$$

۶۰- گزینه ۲ عبارت  $(1+x+x^2+\dots+x^8)$  مجموع ۹ جمله اول

یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت  $x$  است، پس:

$$1+x+x^2+\dots+x^8 = \frac{1(1-x^9)}{1-x} = \frac{1-x^9}{1-x}$$

عبارت  $(1-x+x^2-\dots+x^8)$  مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی

با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $(-x)$  است، پس:

$$1-x+x^2-\dots+x^8 = \frac{1(1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1+x^9}{1+x}$$



پس مساحت قسمت رنگی تا پایان مرحله  $n$  برابر است با:  
(مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{2}$  و قدرنسبت  $\frac{1}{2}$ )

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

قرار است بیشتر از ۹۸ درصد مربع را رنگ بزنیم:

$$S_n > \frac{98}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} > \frac{98}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{98}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{50} \Rightarrow 2^n > 50 \Rightarrow n \geq 6$$

پس از ۶ مرحله، حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ می‌شود.

۶۴- گزینه بعد از عبور از لایه اول شدت تابش نصف

می‌شود (مرحله اول) پس  $\frac{1}{2}$  شدت تابش از بین می‌رود و  $\frac{1}{2}$  می‌ماند. بعد از

عبور از لایه دوم نصفه باقی‌مانده باز هم نصف می‌شود  $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ . یعنی  $\frac{1}{4}$

شدت تابش هم در مرحله دوم نابود می‌شود! در مرحله سوم  $\frac{1}{8}$  شدت تابش از

بین می‌رود و ... پس کل شدت تابشی که بعد از عبور از لایه  $n$  (مرحله  $n$ ام)

از بین می‌رود، برابر مجموع مقابل است:  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

برای این که شدت تابش‌ها بیشتر از ۹۹ درصد کاهش پیدا کند باید  $S_n > \frac{99}{100}$

باشد.  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{2}$  و قدرنسبت  $\frac{1}{2}$

$$S_n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > \frac{99}{100} \quad \text{است:}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

پس حداقل ۷ تا لایه باید ساخته شود.

(این سؤال، سال‌های ساله که تو کتابا هست. نمیدونم هم که چه اصراریه این سؤال با کمک فرمول مهمول مهمول هندسی حل بشه! این طوری که قبلی پوخته،

از شدت تابش، بعد از عبور از لایه اول  $\frac{1}{2}$  باقی می‌ماند. بعد از عبور از لایه

دوم  $\frac{1}{4}$  باقی می‌ماند و ... پس بعد از عبور از لایه  $n$ ام،  $\frac{1}{2^n}$  از

شدت تابش باقی می‌ماند. حالا برای این که شدت تابش بیشتر از ۹۹ درصد

کاهش پیدا کند، باید کم‌تر از یک درصدش باقی بماند؛ یعنی:

$$n \geq 7 \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow \text{مقدار باقی‌مانده}$$

۶۵- گزینه به شکل زیر توجه کنید. وقتی توپ از ارتفاع ۱۰ متری

رها می‌شود ۱۰ متر پایین می‌آید. بعد که به زمین می‌خورد  $\frac{1}{4}$  ارتفاع

قبلی‌اش بالا می‌رود یعنی  $\frac{1}{4}$ ، در این مرحله، توپ  $\frac{1}{4}$  بالا می‌رود و  $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1+x^9}{1+x}\right) = \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^9}{1-2} = 511$$

۶۱- گزینه صورت کسر، مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با

جمله اول ۱ و قدرنسبت  $(-t)$  است. مخرج کسر هم مجموع سه جمله اول

یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $(-t^3)$  است. پس با توجه به

فرمول مجموع جملات دنباله هندسی، عبارت را ساده می‌کنیم و حاصل را

حساب می‌کنیم:

$$\frac{t^9 - t^6 + t^3 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{1(-(-t)^9)}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t}$$

$$= \frac{1+t^9}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t} = 1-t+t^2$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \text{عبارت} = 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \frac{1+17+2\sqrt{17}}{4}$$

$$= \frac{4-2-2\sqrt{17}+1+17+2\sqrt{17}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

۶۲- گزینه در خانه اول ۱ دانه گندم  $(2^0)$ ، در خانه دوم تا  $(2^1)$ ،

در خانه سوم تا  $(2^2)$  و ... و در خانه  $n$ ام تا  $2^{n-1}$  تا گندم قرار می‌گیرد. پس

تعداد کل گندم‌ها تا خانه  $n$ ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow S_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$$



مجموع بالا، مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1 \quad \text{قدرنسبت ۲ است:}$$

اگر قرار باشد تعداد گندم‌ها بیشتر از ۴۱۰۰ دانه باشد باید:

$$S_n > 4100 \Rightarrow 2^n - 1 > 4100 \Rightarrow 2^n > 4101$$

با توجه به این که  $2^{11} = 2048$ ،  $2^{12} = 4096$  و  $2^{13} = 8192$  است، پس

کم‌ترین مقدار  $n$  برابر ۱۳ است. این یعنی خانه سیزدهم اولین خانه‌ای است

که مجموع تعداد گندم‌هایش بیشتر از ۴۱۰۰ است.

۶۳- گزینه شکل‌های زیر گویای اطلاعات مسئله هستند:



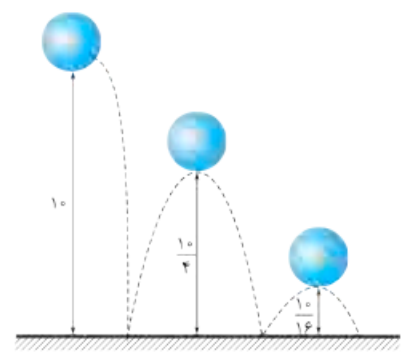
$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{4}$$

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$



پایین می‌آید. یک بار دیگر که به زمین می‌خورد  $(\frac{1}{4})^2$  بالا می‌رود و پایین می‌آید و ... پس مسافت طی شده توسط توپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$S = 1.0 + 2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{1}{16}) + \dots \Rightarrow S = 1.0 + 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots)$   
 لحظه زمین خوردن توپ برای ششمین بار یعنی پایان مرحله پنجم. پس باید مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$S = 1.0 + 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^5}) = 1.0 + 2(\frac{1 - (\frac{1}{4})^5}{1 - \frac{1}{4}})$$

مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{4}$  و قدرنسبت  $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S = 1.0 + 2(\frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}}) = 1.0 + \frac{17 \cdot 5}{256} = 1.0 + 7 = 17$$

۶۶- گزینه  $a_n \cdot b_n = 2^n \cdot (3^{1-n}) = 2^n \times (3 \times 3^{-n})$

$$= 2^n \times \frac{3}{3^n} = 3(\frac{2}{3})^n$$

این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول  $2(\frac{2}{3})^1 = 2$  و قدرنسبت  $(\frac{2}{3})^1 = \frac{2}{3}$  است.

در نتیجه:

$$S_5 = \frac{2(1 - (\frac{2}{3})^5)}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2(1 - \frac{32}{243})}{\frac{1}{3}} = 6(\frac{211}{243})$$

$$= 2(\frac{211}{81}) = \frac{422}{81}$$

۶۷- گزینه با توجه به جملات دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6} \\ S_2 = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{6}} \frac{1}{6} + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

پس با یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = \frac{1}{6}$  و قدرنسبت  $d = \frac{2}{3}$  مواجهیم! پس مجموع ده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{10} = \frac{1}{6} [2(\frac{1}{6}) + 9(\frac{2}{3})] = 5[\frac{1}{3} + \frac{18}{3}]$$

$$= 5(\frac{19}{3}) = \frac{95}{3} = 31\frac{2}{3}$$

دقت کنید که:

$$\begin{array}{r} 95 \quad | \quad 3 \\ -9 \quad | \quad 31 \\ \hline 05 \quad | \quad 2 \\ \quad 3 \quad | \quad 2 \\ \hline \quad 2 \end{array} \Rightarrow \frac{95}{3} = 31\frac{2}{3}$$

۶۸- گزینه جملات این دنباله را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$1.0^1 - 1.1.0^2 - 1.1.0^3 - 1.1.0^4 - \dots$$

مجموع ده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = (1.0^1 - 1) + (1.0^2 - 1) + (1.0^3 - 1) + \dots + (1.0^{10} - 1)$$

$$= (1.0^1 + 1.0^2 + \dots + 1.0^{10}) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

تا ۱۰ دنباله هندسی با جمله اول ۱.۰ و قدرنسبت ۱.۰

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{1.0(1 - 1.0^{10})}{1 - 1.0} - 1.0 = \frac{1.0(1 - 1.0^{10})}{-9} - 1.0$$

$$= \frac{1.0 - 1.0^{11} + 9.0}{-9} = \frac{1.0 - 1.0^{11}}{-9} = \frac{1.0^{11} - 1.0}{9}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{1.0000000000 - 1.0}{9}$$

$$= \frac{9999999999.0}{9} = 1111111111.0$$

۶۹- گزینه دنباله داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1 - (\frac{1}{2}), 1 - (\frac{1}{2})^2, 1 - (\frac{1}{2})^3, \dots$$

در نتیجه:

$$S_{10} = (1 - \frac{1}{2}) + (1 - (\frac{1}{2})^2) + \dots + (1 - (\frac{1}{2})^{10})$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{10} - \underbrace{(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^{10})}_{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}}$$

$$= 10(1) - \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 10 - (1 - \frac{1}{1024})$$

$$= 10 - \frac{1023}{1024} = \frac{10240 - 1023}{1024} = \frac{9217}{1024} = 9217(\frac{1}{1024})$$

۷۰- گزینه مساحت مربع اول برابر  $(12)^2 = 144$  است. از طرفی طول ضلع مربع دوم با توجه به قضیه فیثاغورس برابر است با:

$$\text{طول ضلع مربع دوم} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$$

پس مساحت مربع دوم برابر  $(\sqrt{160})^2 = 160$  است. دنباله مساحت مربع‌ها تشکیل

یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۴۴ و قدرنسبت  $q = \frac{160}{144} = \frac{10}{9}$  می‌دهند.

حالا باید بررسی کنیم مجموع مساحت‌های چند مربع بزرگ‌تر از ۲۹۷ می‌شود. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_n > 297 \Rightarrow \frac{144(1 - (\frac{10}{9})^n)}{1 - \frac{10}{9}} > 297$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 144(1 - (\frac{10}{9})^n)}{4} > 297$$

پس مجموع داده شده برابر است با:

$$S' = S - 2 = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} - 2$$

$$\xrightarrow{x=2} S' = 2 - 16(2)^{16} + 15(2)^{17} - 2$$

$$\Rightarrow S' = 15(2^{17}) - 16(2^{16}) = 2^{16}(15(2) - 16)$$

$$= 14(2^{16}) = 7(2^{17})$$

۷۳- گزینه:  $a_{n-m} = 2^0$ : جمله  $(n-m)$  ام  $2^0$  است.

$a_{n+m} = 5$ : جمله  $(n+m)$  ام  $5$  است.

جمله وسط جمله‌های  $(n-m)$  ام و  $(n+m)$  ام دنباله، برابر جمله  $n$  ام

$$\left( \frac{(n+m) + (n-m)}{2} = n \right)$$

دو عدد داریم:

$$a_n^+ = a_{n+m} a_{n-m} = 5(2^0) \Rightarrow a_n^+ = 10^0 \Rightarrow a_n = \pm 10^0$$

حالا بین  $a_n$  و  $16^0$  باید هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، پس حتماً

$a_n = 10^0$  است. در نتیجه:

$$16^0 = a_1 q^0 \Rightarrow a_1 = 16^0 = 10^0 q^0$$

$$\Rightarrow q^0 = 16 \Rightarrow q = \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} q = \sqrt{2}$$

پس مجموع نه عدد برابر است با:

$$S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{10^0(1-\sqrt{2}^9)}{1-\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا}} S_9 = \frac{10^0(1-\sqrt{2})^9}{1-2} (1+\sqrt{2}) = 10^0(\sqrt{2}-1)^9(\sqrt{2}+1)$$

$$= 10^0(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}^8 + \sqrt{2}^6 + \dots + 1)(\sqrt{2}+1)$$

$$= 10^0(\sqrt{2}^8 + \sqrt{2}^6 + \dots + 1)$$

$$= 10^0(16 + 8\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1)$$

$$= 10^0(31 + 15\sqrt{2}) = 310 + 150\sqrt{2}$$

۷۴- گزینه: مجموع شش جمله اول برابر  $75$  است، پس:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 15/75$$

مجموع معکوس‌های آن‌ها نیز برابر  $875$  است، پس:

$$S' = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_6} = 7/875$$

باید  $A = a_1 a_2 \dots a_6$  را محاسبه کنیم. از طرفی می‌دانیم:

$$a_1 a_6 = a_2 a_5 = a_3 a_4 \quad (*) \Rightarrow A = a_1 a_2 \dots a_6 = (a_1 a_6)^3$$

حالا از  $S'$  و  $S$  کمک می‌گیریم:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = \frac{a_1 a_6}{a_6} + \frac{a_2 a_5}{a_5} + \dots + \frac{a_3 a_4}{a_1}$$

$$(*) \frac{a_1 a_6}{a_6} + \frac{a_2 a_5}{a_5} + \dots + \frac{a_3 a_4}{a_1}$$

$$\Rightarrow S = a_1 a_6 \left( \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_1} \right) \Rightarrow S = a_1 a_6 S'$$

$$\Rightarrow 9 \times 36 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) > 297 \Rightarrow 36 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) > 33$$

$$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n > \frac{11}{12} \Rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n < \frac{1}{12} \Rightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^n > 12 \Rightarrow n \geq 5$$

۷۱- گزینه: جمله اول، ۳ واحد از جمله دوم کم‌تر است، پس:

$$a_1 = a_2 - 3 \Rightarrow a_2 - a_1 = 3 \Rightarrow d = 3$$

هم‌چنین با توجه به رابطه  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$  و اطلاعات مسئله

$$داریم:  $S_n = 10^0$ : مجموع جمله اول  $10^0$  است.$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)3] = 10^0 \quad (**)$$

$S_{2n} = 68$ : مجموع ۲ جمله اول  $68$  است.

$$\Rightarrow \frac{2n}{2}[2a_1 + (2n-1)3] = 68 \quad (***)$$

با تقسیم دو رابطه بالا بر هم داریم:

$$\frac{68}{10^0} = \frac{\frac{2n}{2}[2a_1 + (2n-1)3]}{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)3]} \Rightarrow \frac{34}{5} = \frac{2[2a_1 + 6n - 3]}{[2a_1 + 3n - 3]} \quad (***)$$

$$68a_1 + 10 \cdot 2n - 10 \cdot 2 = 2 \cdot 0 a_1 + 6 \cdot 0 n - 3 \cdot 0$$

$$\Rightarrow 48a_1 = 72 - 42n \Rightarrow 8a_1 = 12 - 7n$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7n}{8} \xrightarrow{(*)} \frac{n}{2} \left[ \frac{12 - 7n}{4} + 3n - 3 \right] = 10^0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \left[ \frac{12 - 7n + 12n - 12}{4} \right] = 10^0 \Rightarrow \frac{n}{2} \left( \frac{5n}{4} \right) = 10^0$$

$$\Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7(4)}{8} = -2$$

۷۲- گزینه: اول کاری به اون ۲- نداشته باشیم:

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 15x^{15}$$

$$= x + (x^2 + x^2) + (x^3 + 2x^3) + \dots + (x^{15} + 14x^{15})$$

$$\Rightarrow S = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15}) + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15})$$

برای محاسبه مقدار عبارت بالا، یک  $15^0$  اضافه و کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow S = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15}) + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15})$$

$a_1 = x, q = x$ : دنباله هندسی

$$+ 15 \cdot 15^0 - 15 \cdot 15^0$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{15} + 15x^{16}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(x + 2x^2 + \dots + 15x^{15}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(S) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S - x(S) = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S(1-x) = \frac{x(1-x^{15}) - 15x^{16}(1-x)}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x - x^{16} - 15x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow 15/75 = a_1 a_r (Y/875)$$

$$\Rightarrow a_1 a_r = \frac{15/75}{Y/875} = r \Rightarrow A = (a_1 a_r)^r = (r)^r = 8$$

