فصل دوم: الگو و دنباله

۱ — ۲

کافی است دنبالهٔ تعداد نقاط را تشکیل دهیم، اگر با شیب (قدرنسبت) ثابتی افزایش یافته باشد الگو خطی است:

$\underbrace{۱\;,\;۵}_{+۴}\;,\;\underbrace{۹}_{+۴}\;,\;\underbrace{۱۳}_{+۴}\;,\;...$: **گزینه (۲)**

۲ — ۲

الگویی خطی با قدرنسبت ۳ است. $\Rightarrow \{\underbrace{۱\;,\;۴}_{+۳}\;,\;\underbrace{۷}_{+۳}\;,\;...\}$: **تعداد مربع‌ها**

جملهٔ عمومی: $t_n = an+b \xrightarrow{a=\text{قدرنسبت}} t_n = ۳n+b \xrightarrow{t_۱=۱ \text{ باید}} b=-۲ \Rightarrow t_n = ۳n-۲$

پس تعداد مربع‌ها در شکل ۱۰ام یعنی $t_{۱۰}$ به ازای $n=۱۰$ بوجود می‌آید: $t_{۱۰} = ۳\times۱۰-۲ = ۲۸$

۳ — ۴

در این‌گونه مسائل که مقدار جمله داده شده و شماره جمله را می‌خواهیم، کافی است جملهٔ عمومی (n ام) را برابر عدد داده شده قرار دهیم و n را به‌دست آوریم:

(از سؤال قبل) $t_n = ۳n-۲ = ۷۳ \Rightarrow ۳n = ۷۵ \Rightarrow n = ۲۵$

۴ — ۴

چون جملهٔ هفتم را خواسته و رسیدن به آن زمان بد نیست، نیازی به پیدا کردن جملهٔ عمومی نیست و با ادامه دادن جملات دنباله به آن می‌رسیم!!!

جمله هفتم دنباله ۷۹ است. $\Leftarrow \{۱\;,\;۴\;,\;۱۱\;,\;۲۲\;,\;۳۷\;,\;۵۶\;,\;۷۹\;,\;...\}$

$$\begin{array}{cccccc} +۳ & +۷ & +۱۱ & +۱۵ & +۱۹ & +۲۳ \\ & +۴ & +۴ & & & \end{array}$$

۵ — ۲

در این سؤال برخلاف سؤال قبل، باید حتماً جملهٔ عمومی را به‌دست آوریم:

$\underbrace{۵\;,\;۸}_{+۳}\;,\;\underbrace{۱۳}_{+۵}\;,\;\underbrace{۲۰}_{+۷}\;,\;... \Rightarrow$ دنباله تفاضلات $\{۳,۵,۷,...\} \Rightarrow ۲=$ قدرنسبت $\xrightarrow{\div ۲}$ $n^۲$ ضریب $=۱$

با مشخص شدن ضریب $n^۲$ برای پیدا کردن قسمت $bn+c$ در دنبالهٔ $t_n = ۱n^۲+bn+c$ دو روش کلی وجود دارد.

روش اول: نوشتن جملات دنباله بر حسب $an^۲$ که در اینجا $a=۱$ است به اضافهٔ $bn+c$ که خطی است و پیدا کردن $bn+c$:

$\underset{۱+۴}{۵}\;,\;\underset{۴+۴}{۸}\;,\;\underset{۹+۴}{۱۳}\;,\;... \Rightarrow$ می‌بینید که قسمت $bn+c$، دنباله ثابت ۴ است. $\Rightarrow t_n = n^۲+۴ \Rightarrow n^۲+۴ = ۶۲۹ \Rightarrow n = ۲۵$

روش دوم: حل دستگاه دو معادله و دو مجهول b و c که در پاسخ سؤال بعد از این روش استفاده کرده‌ایم.

۶ — ۱

در این سؤال مانند سؤال قبل باید حتماً جملهٔ عمومی را مشخص کنیم، چون رسیدن به جملهٔ بیستم کار زمان‌بری است!!! $\underbrace{۵\;,\;۱۲}_{+۷}\;,\;\underbrace{۲۲}_{+۱۰}\;,\;\underbrace{۳۵}_{+۱۳}\;,\;۵۱\;,\;...$

دنبالهٔ داده شده خطی نیست اما دنبالهٔ تفاضلات آن یعنی $۷,۱۰,۱۳,...$ خطی با قدرنسبت ۳ است پس دنبالهٔ اصلی درجه دوم است و ضریب $n^۲$ در آن $\frac{۳}{۲}$ است. (طبق نکات درسنامه):

$$t_n = \frac{۳}{۲}n^۲+bn+c$$

برای پیدا کردن دو مجهول b و c می‌توانیم یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل دهیم:

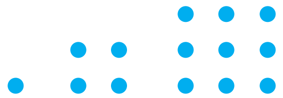
$$\begin{cases} t_۱ = ۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲}+b+c = ۵ \\ t_۲ = ۱۲ \Rightarrow ۶+۲b+c = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \frac{۹}{۲}+b = ۷ \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۵}{۲} \\ c = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{۳}{۲}n^۲+\frac{۵}{۲}n+۱ \xrightarrow{n=۲۰} t_{۲۰} = \frac{۳}{۲}\times۴۰۰+\frac{۵}{۲}\times۲۰+۱ = ۶۰۰+۵۰+۱ = ۶۵۱$$

۷ ۲

روش اول این است که تعداد نقاط را بشماریم و یک دنباله تشکیل دهیم و مسئله را به سؤالی مانند یکی دو سؤال قبل تبدیل کنیم: $\{5\underbrace{,}_{+7}12\underbrace{,}_{+9}21\underbrace{,}_{+11}\dots\}$

برای تمرین بیشتر بد نیست که مانند دو سؤال قبل این سؤال را نیز به همان روش‌ها حل کنید!! و اما روش دوم که سریع‌تر است، پیدا کردن الگویی با توجه به شکل است. در مرکز شکل یک الگوی مربعی با شروع از ۱ دیده می‌شود که جمله عمومی آن n^2 است. در اطراف این مربع در هر شکل ۴ برابر شماره شکل، نقطه وجود دارد!!



نگرفتی چی شد؟؟ خب اینجوری بگم شکل سوم رو ببین، ۴ تا ۳ نقطه اطراف مربع مرکزی وجود دارد پس در شکل n ام، $4n$ نقطه در اطراف داریم یعنی تعداد کل نقاط در شکل n ام برابر است با:

$$t_n=n^2+4n \Rightarrow n^2+4n=140 \xrightarrow{\text{امتحان کردن گزینه‌ها}} n=10$$

۸ ۳

دنبالهٔ الگوی داده شده یک دنبالهٔ مثلثی با شروع از ۱ است. طبق نکات درسنامه می‌دانیم که جملهٔ عمومی دنباله $\{1\underbrace{,}_{+2}3\underbrace{,}_{+3}6\underbrace{,}_{+4}10,\dots\}$ به صورت $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ است پس:

$$t_{14}=\frac{14\times 15}{2}=105$$

۹ ۳

دنبالهٔ داده شده یک دنبالهٔ مثلثی با شروع از ۳ است که برای جملهٔ عمومی آن باید ۱ واحد به n در فرمول اصلی اضافه کنیم، یعنی:

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[\text{اگر شروع از ۳ باشد}]{n \Rightarrow n+1} a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow a_{20}=\frac{21\times 22}{2}=231$$

تذکر البته اگر این فرمول‌ها را حفظ نبودید مشکلی نیست؛ می‌توانید مانند حل بقیه الگوهای درجه دوم (سؤالات ۵ و ۶)، جمله عمومی را به‌دست آورید.

۱۰ ۲

روش اول: الگوهای داده شده مجموع یک الگوی مربعی با شروع از ۱ و دو الگوی مثلثی در کناره‌ها با شروع از صفر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{جملهٔ عمومی الگوی مربعی با شروع از یک}=n^2 \\ \text{جملهٔ عمومی الگوی مثلثی با شروع از صفر}=\frac{n(n-1)}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{دو تا مثلثی}]{\text{یک مربعی}} t_n=n^2+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2+n^2-n=2n^2-n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{10}=200-10=190$$

فقط قسمت محاسبات را حذف کن و محاسبات بالا را جایگزین کن

روش دوم: حل این سؤال را می‌توانید در پاسخ سؤال ۴ آزمون جامع (۱) همین فصل ببینید! (برخلاف سؤال قبل $n \Rightarrow n-1$)

۱۱ ۱

طبق نکات درسنامه، مجموع دو جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ مثلثی با شروع از یک، برابر مربع شماره جملهٔ بزرگ‌تر است؛ یعنی در اینجا: $16^2=256$

۱۲ ۴

با کمی دقت می‌توان فهمید تعداد کاشی‌های سفید برابر همان شمارهٔ شکل است، یعنی $a_n = n$ و تعداد کاشی‌های تیره، دنباله‌ای خطی با قدرنسبت ۲ و جمله اول ۶ است یعنی: $b_n = ۲n + ۴$

تعداد کاشی‌های تیره برابر ۶۴ است پس $۲n + ۴ = ۶۴$ و در نتیجه $n = ۳۰$ است، پس تعداد کاشی‌های سفید ۳۰ می‌باشد.

۱۳ ۱

با توجه به الگو تعداد کل مربع‌ها در شکل nام برابر $n^۲$ است و تعداد مربع‌های تیره در شکل nام برابر شمارهٔ شکل یعنی n است پس تعداد مربع‌های سفید در شکل nام برابر است با: $t_n = n^۲ - n \Rightarrow t_{۱۵} = ۲۲۵ - ۱۵ = ۲۱۰$

۱۴ ۱

توجه داشته باشید در الگوهای دو رنگی اگر سؤال دشوار بود، توصیه می‌کنیم جدولی مانند جدول زیر درست کنید:

با توجه به الگوی داده شده می‌توان جدول مقابل را تکمیل کرد:

می‌بینیم که در شکل nام تعداد کل دایره‌ها $n^۲$ است. اگر n زوج باشد، که نصف آن‌ها توخالی و نصف دیگر توپراند یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ ولی اگر n فرد باشد که نمیشه نصف کرد!!! پس تعداد توپرها یکی بیشتر از توخالی‌ها شده است.

شماره شکل	۱ ۲ ۳ ۴ ۵...n
تعداد کل دایره‌ها	۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵...$n^۲$
تعداد دایره‌های توپر	۰ ۲ ۴ ۸ ۱۲...$\frac{n^۲}{۲}$ (زوج n) $\frac{n^۲-۱}{۲}$ (فرد n)
تعداد دایره‌های تو خالی	۱ ۲ ۵ ۸ ۱۳...$\frac{n^۲}{۲}$ (زوج n) $\frac{n^۲-۱}{۲}$ (فرد n)

در شکل یازدهم، $۱۱^۲ = ۱۲۱$ دایره داریم، اگر یکی رو کنار بزاریم که زوج شوند از ۱۲۰ تا ۶۰ تا توخالی و ۶۰ تا توپر می‌شود. حالا اون یکی دایره رو هم به توپرها اضافه می‌کنیم یعنی ۶۱ دایرهٔ توپر در شکل یازدهم وجود دارد.

۱۵ ۴

اگر یک مرحلهٔ دیگر شکل‌ها را ادامه دهیم بهتر متوجه می‌شویم که تعداد دایره‌های توپر (به قول طراح سؤال صفرهای توپر!) در یک شکل شمارهٔ فرد و شمارهٔ زوج بعد آن مساوی است و در شکل‌های شمارهٔ فرد نیز از الگوی زیر پیروی می‌کند:

شمارهٔ شکل‌ها	۱	۳	۵	...
تعداد دایره‌های توپر	۱	۱+۵	۱+۵+۹	...

پس تعداد دایره‌های توپر شکل دهم برابر تعداد دایره‌های توپر شکل نهم است و برابر با:

شمارهٔ شکل	۱	۳	۵	۷	۹
تعداد	۱	۶	۱۵	۲۸	۴۵

+۵ +۹ +۱۳

دنباله تعداد دایره‌های توپر در شکل‌های شمارهٔ فرد یا $۱+۵+۹+۱۳+۱۷$

+۴ +۴

و به همین ترتیب تعداد دایره‌های توپر در شکل یازدهم برابر است با: $۱+۵+۹+۱۳+۱۷+۲۱$ پس تفاضل تعداد دایره‌های توپر در شکل دهم و یازدهم برابر ۲۱ است.

نتیجه: به طور کلی در این الگو اختلاف تعداد دایره‌های توپر در شکل nام و $(n+۱)$ام (n زوج) برابر است با: $۲n+۱$

یه سؤال: اختلاف تعداد دایره‌های توپر در شکل یازدهم و دوازدهم چندتاست؟

جواب: *اگه گفتی صفر! درسته. وگرنه مجدداً پاسخ بالا رو بخون.*

۱۶ ۴

تعداد دایره‌های توخالی در یک شکل شمارهٔ زوج و در شکل شمارهٔ فرد بعد آن برابر است یعنی تعداد دایره‌های توخالی شکل سیزدهم برابر تعداد دایره‌های توخالی شکل دوازدهم است و برای اشکال شماره زوج الگوی زیر را داریم:

شمارهٔ شکل	۲	۴	۶	...
تعداد دایره‌های توخالی	۳	۳+۷	۳+۷+۱۱	...

شکل ۱۲ ام $\Rightarrow ۳+۷+۱۱+۱۵+۱۹+۲۳ = ۷۸$

در واقع جمع ۶ جملهٔ دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۴ است.

البته می‌توان برای این سؤال و دو سؤال قبل جملهٔ عمومی را بر حسب n نوشت، اما کاری زمانبر و غیر ضروری در جلسهٔ کنکور محسوب می‌شود!!!

۱۷ | ۳

امیدوارم به صورت پیچیده به این سؤال کنکور ۹۴ نگاه نکرده باشید و الگوی آن را به صورت زیر کشف کرده باشید:

با کمی دقت می‌توان فهمید که مجموع دو جمله اول و آخر دسته nام برابر $۲n^۲$است!!! یعنی برای دسته سی‌ام، $۱۸۰۰ = ۲\times۳۰^۲$ می‌شود.

توضیحات بیشتر: دقت کنید در هر دسته، جمله وسط (گاهی وسطی نامرئی است!!!) برابر است با شمارهٔ جمله به توان ۲ یعنی $n^۲$ مثلاً در شکل سوم، ۹ در وسط است و از طرفی مجموع ابتدا و انتها دو برابر جملهٔ وسط یعنی $۲n^۲$ است مثلاً در دستهٔ سوم: $۷+۱۱=۱۸=۲\times۹=۲\times۳^۲$

۱۸ | ۱

طبق معمول باید دنبال یک الگو باشیم:

روش اول: **جملات آخر هر دسته:** $\underbrace{۱ , ۵}_{+۴} , \underbrace{۵ , ۱۱}_{+۶} , \underbrace{۱۱ , ۱۹}_{+۸} ,...$

دنبالهٔ بالا یک دنبالهٔ درجه دوم است که با توجه به درسنامهٔ ۲ همین فصل، ضریب $n^۲$ در آن $۱=۲\div۲$ است و قسمت $bn+c$ (درجه ۱) آن هم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$an^۲+bn+c \Rightarrow t_n = n^۲+n-۱ \Rightarrow t_{۲۰}=۴۱۹$$

روش دوم: جملهٔ آخر برابر جملهٔ وسط ($n^۲$) به اضافهٔ $(n-۱)$ است، یعنی به اضافهٔ یکی کمتر از شماره دسته.

جملهٔ اول: $۱+۰$
جملهٔ دوم: $۴+۱$
جملهٔ سوم: $۹+۲$
جملهٔ چهارم: $۱۶+۳$

۱۹ | ۴

روش اول: $a_n=۲a_{n-۱}+۱$، یعنی هر جمله از دو برابر جملهٔ قبلی خود، یک واحد بیشتر باشد و از آنجا که جملهٔ اول $a_۱=۱$ است پس می‌توانیم بقیهٔ جملات را به‌دست آوریم:

$$\{\underbrace{۱ , ۳}_{(\times۲)+۱},۷,۱۵,۳۱,۶۳,۱۲۷,\underbrace{۲۵۵}_{\text{جمله هشتم}} ,...\}$$

روش دوم: با کمی دقت به جملات دنباله می‌توان بر اساس الگوی موجود گفت: که جملهٔ nام برابر $۲^n-۱$ است:

$$a_n=۲^n-۱ \Rightarrow a_۸=۲^۸-۱=۲۵۶-۱=۲۵۵$$

۲۰ | ۲

$F_{n+۲}=F_{n+۱}+F_n$ یعنی هر جمله برابر مجموع دو جمله قبل از خود است:

$$F_۱=F_۲=۱ \Rightarrow \{۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,...\} \Rightarrow F_۷=۱۳$$

۲۱ | ۲

$a_{n+۱}=a_n+(n+۱)$ یعنی هر جمله برابر مجموع جمله قبلی و شماره همان جمله است:

$$n=۱ \Rightarrow a_۲=a_۱+۲ \Rightarrow a_۲=۱+۲=۳$$

$$n=۲ \Rightarrow a_۳=a_۲+۳ \Rightarrow a_۳=\underbrace{۱+۲}_{a_۲}+۳=۶$$

$$n=۳ \Rightarrow a_۴=a_۳+۴ \Rightarrow a_۴=\underbrace{۱+۲+۳}_{a_۳}+۴=۱۰$$

$\vdots$

می‌توان فهمید که این دنباله‌ها همان دنبالهٔ مثلثی با شروع از یک به صورت $۱,۳,۶,۱۰,...$ است که جملهٔ عمومی آن به صورت $a_n=۱+۲+۳+...+n=\dfrac{n(n+۱)}{۲}$ است پس جملهٔ سی‌ام آن $a_{۳۰}=\dfrac{۳۰\times۳۱}{۲}=۴۶۵$ توجه داشته باشید که ممکن است همین سؤال به صورت $a_n=a_{n-۱}+n$ مطرح شود که باز هم، همان معنی بالا را می‌دهد.

۲۲ | ۱

روش اول: استفاده از گزینه‌ها!!! مثلاً اگر $n=۱$ در گزینه‌ها قرار بدهیم باید حاصل $a_۱=-۱$ شود پس گزینهٔ (۱) درست است و بقیهٔ گزینه‌ها نادرست می‌باشند.

بله! به همین راحتی! فقط حواستان باشد اگر دو گزینه درست درآمد، باید فقط برای آن دو گزینه عدد دیگری امتحان کنید.

روش دوم: پیدا کردن الگو: جملات فرد منفی و جملات زوج مثبت‌اند، پس جملهٔ عمومی، حتماً یک $(-۱)^n$ دارد. دقت کنید اگر جملات شمارهٔ فرد، مثبت و جملات شمارهٔ زوج، منفی باشند، معمولاً از $(-۱)^{n+۱}$ یا $(-۱)^{n-۱}$ استفاده می‌کنیم.

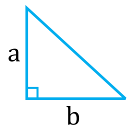
صورت کسرها (جدا از علامت آن‌ها) به صورت $۱,۳,۵,۷,...$ یک الگوی خطی اعداد فرد است یعنی $۲n-۱$ و مخرج کسرها $۱,۲,۴,۸,...$ یک الگوی توانی به صورت $۲^{n-۱}$ پس $a_n=(-۱)^n\dfrac{۲n-۱}{۲^{n-۱}}$ و گزینهٔ (۱) درست است.

۲۳ **۳**

جمله $(۲n-۱)$ام دنباله به صورت $n^۲+۱$ است، یعنی $a_{۲n-۱}=n^۲+۱$ و می‌خواهیم $a_۵$ را به‌دست آوریم؛ پس کافی است به دنبال nای بگردیم که اندیس را $(۲n-۱)$ کند!!! یعنی $۲n-۱=۵$ قرار داده و $n=۳$ را در دنبالهٔ داده شده جایگذاری کنیم: $a_{۲n-۱}=n^۲+۱ \xrightarrow{n=۳} a_۵=۹+۱=۱۰$

۲۴ **۴**

طبق قضیهٔ فیثاغورس می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه به صورت مقابل طول وتر برابر با $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است. پس برای این سؤال:



$$\text{(۱) طول وتر مثلث}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲},\ s_۱=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱$$

$$\text{(۲) طول وتر مثلث}=\sqrt{\left(\sqrt{۲}\right)^۲+۱}=\sqrt{۳},\ s_۲=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times۱$$

$$\text{(۳) طول وتر مثلث}=\sqrt{\left(\sqrt{۳}\right)^۲+۱}=\sqrt{۴},\ s_۳=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}\times۱$$

$$\vdots$$

با توجه به مطالب بالا الگوی مقابل برداشت می‌شود:

$$\text{ام } n \text{ طول وتر مثلث}=\sqrt{n+۱}$$

$$\text{ام } n \text{ مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{n}\times۱=\frac{\sqrt{n}}{۲}\Rightarrow \text{مساحت مثلث نهم}=\frac{\sqrt{۹}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\text{ام } n \text{ محیط مثلث}=\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}+۱$$

۲۵ **۴**

دنبالهٔ حسابی، یک دنبالهٔ (الگوی) درجه ۱ خطی است. گزینهٔ (۱) دنباله‌ای نمایی (هندسی) و گزینهٔ (۲) رادیکالی و گزینهٔ (۳) کسری‌اند پس حسابی محسوب نمی‌شوند. و اما گزینهٔ (۴) که در ظاهر درجه دوم است پس از ساده‌سازی، درجه ۱ (خطی) می‌شود و حسابی است:

گزینه (۴): $a_n=(n+۱)^۲-n^۲=\cancel{n^۲}+۲n+۱-\cancel{n^۲}\Rightarrow a_n=۲n+۱\Rightarrow\begin{cases}d=۲ & \text{قدر نسبت}\\ a_۱=۳ & \text{جمله اول}\end{cases}$

۲۶ **۲**

خب برای حل این سؤال زیبا، یک روش اصلی و یک روش بازگشتی درنظر گرفته‌ایم. با دقت هر دو روش رو یاد بگیرید. مشخص است که باید ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\{-۱,۱,۳,۵,\dots\}$ را به‌دست آوریم و برای پیدا کردن جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی هم روش فرمولی و هم روش ذهنی (سرعتی) وجود دارد:

روش فرمولی: $a_n=a+(n-۱)d\xrightarrow[d=+۲]{a=-۱}a_n=-۱+(n-۱)\times۲=۲n-۳$

روش ذهنی: $b=-۳\Rightarrow a_n=۲n-۳$ $\xrightarrow[\text{باید } a_۱=-۱ \text{ شود}]{\text{اگر } n=۱ \text{ بگذاریم}}$ $a_n=۲n+b$ ⇐ ضریب n همان قدرنسبت ۲ است

به هر حال $a_n=۲n-۳$ شد و اما $a_{n+۱}$؛ یعنی جمله $(n+۱)$ام که باید در جملهٔ عمومی a_n، به جای n، $n+۱$ قرار دهیم یعنی:

$$\begin{cases}a_n=۲n-۳\\ a_{n+۱}=۲(n+۱)-۳=۲n-۱\end{cases}\xrightarrow[\text{خواستهٔ سوال}]{\text{مجموع آنها}}b_n=a_n+a_{n+۱}=۲n-۳+۲n-۱=۴n-۴\Rightarrow$$

b_n حسابی با قدرنسبت ۴ و جملهٔ اول صفر است.

یه جور دیگه هم میشه این سؤال رو حل کرد: الگوهای بازگشتی که به زبان فارسی ترجمه می‌کردیم رو یادتونه که، دقیقاً قبل همین دنبالهٔ حسابی چند سؤال از اونا حل کردیم:

$b_n=a_n+a_{n+۱}\Rightarrow a_n=\{-۱,۱,۳,۵,\dots\}\Rightarrow b_n=\{۰,۴,۸,\dots\}\Rightarrow$!!b_n دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴ و جملهٔ اول صفر است

بله، به همین راحتی...

ساده‌تر و ذهنی‌تر هم بخوایم بگیم اینه که در a_n ضریب n برابر ۲ است، یعنی $۲n$ داریم و در $a_{n+۱}$ هم ضریب n، همان ۲ است یعنی $۲n$ داریم پس در $b_n=a_n+a_{n+۱}$ ضریب n، برابر ۴ است و $۴n$ داریم!!! یعنی قدرنسبت b_n، ۴ است!!!

۲۷ **۳**

طبق درسنامه به طور کلی برای مسائلی که شمارهٔ جمله $(n=?)$ را می‌خواهد دو روش وجود دارد:

روش اول: محاسبهٔ جملهٔ عمومی: کافی است جملهٔ عمومی را برابر مقدار داده شده قرار دهیم تا n را بیابیم.

$$۲,۵,۸,\ldots \xrightarrow[d=۳]{a=۲} \underbrace{a_n=۳n-۱}_{\text{جمله عمومی به روش ذهنی (سرعتی)}} \Rightarrow ۳n-۱=۵۶ \Rightarrow ۳n=۵۷ \Rightarrow n=۱۹ \Rightarrow a_{۱۹}=۵۶$$

گزینهٔ (۳) درست است.

روش دوم: فرمول ویژه تعداد جملات (شماره جمله)

$$n=\frac{\overset{\text{آخری}}{a_n}-\overset{\text{اولی}}{a_۱}}{\underset{\text{قدرنسبت}}{d}}+۱=\frac{۵۶-۲}{۳}+۱=\frac{۵۴}{۳}+۱=۱۸+۱=۱۹$$

۲۸ **۱**

جمله nام دنبالهٔ حسابی $a_۱=a+(n-۱)d$ و در نتیجه جملهٔ دهم آن $a_{۱۰}=a_۱+۹d$ است یعنی ضریب قدرنسبت یکی کمتر از شمارهٔ جمله است!

میدونم بلدین محض احتیاط و تأکید گفتم!!

پس کافی است $a_۱$ و d را بیابیم، در این مسائل رادیکالی معمولاً گویا کردن و ساده کردن جملات لازم می‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}+۱\ ,\ \frac{۶}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow \text{جملات دنباله}\ \{۱+\sqrt{۲},\underbrace{۳+۲\sqrt{۲}}_{+(۲+\sqrt{۲})},\underbrace{۵+۳\sqrt{۲}}_{+(۲+\sqrt{۲})},\ldots\}$$

$$\Rightarrow a_{۱۰}=a+۹d=(۱+\sqrt{۲})+۹(۲+\sqrt{۲})=۱۹+۱۰\sqrt{۲}$$

اینجوریم میشه که یک الگو پیدا کنیم. دقت کنید، در دنبالهٔ $\{۱+\sqrt{۲},۳+۲\sqrt{۲},۵+۳\sqrt{۲},\ldots\}$ ضریب $\sqrt{۲}$ همان شمارهٔ جمله است (n) و اعدادی که به آن اضافه شده اعداد فرد $(۲n-۱)$ هستند یعنی گزینهٔ (۱) درست است.

$$a_n=(۲n-۱)+n\sqrt{۲} \Rightarrow a_{۱۰}=۱۹+۱۰\sqrt{۲}$$

۲۹ **۴**

خب در واقع این سؤال ترکیبی از دو مدل سؤال قبل بود، یکی شمارهٔ جمله را داده و مقدار جمله را می‌خواهد و دیگری مقدار جمله را داده و شمارهٔ جمله را می‌خواهد.

$$۲,\frac{۸}{۳},\frac{۱۰}{۳},\ldots \Rightarrow d=\frac{۸}{۳}-۲=\frac{۲}{۳}\ \text{یا}\ d=\frac{۱۰}{۳}-\frac{۸}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

سؤال پرسیده جملهٔ چندم دنبالهٔ ۴/۵ برابر $a_۴$ است:

جمله چهارم: $a_۴=a+۳d=۲+۳\times\frac{۲}{۳}=۴ \Rightarrow ۴/۵a_۴=\frac{۹}{۲}\times۴=۱۸$

پس $a_n=۱۸$ و n (شمارهٔ جمله) را می‌خواهیم:

روش اول: **جملهٔ عمومی:** $a_n=a+(n-۱)d$ یا سرعتی $a_n=\frac{۲}{۳}n+\frac{۴}{۳}=۱۸ \Rightarrow n=۲۵$

دقت کنید در روش سرعتی قدرنسبت $\frac{۲}{۳}$ را ضریب n گذاشتیم و ذهنی گفتیم جملهٔ دوم، $\frac{۸}{۳}$ است پس اگر $n=۲$ قرار دهیم باید $\frac{۸}{۳}$ بشه یعنی یه $\frac{۴}{۳}$ دیگه هم لازم بود به $\frac{۲}{۳}n$ اضافه کنیم! (می‌تونستی $\frac{۴}{۳}$ رو از $a_۱$ یا $a_۲$ یا .... هم به‌دست بیاریم)

روش دوم: فرمول تعداد جملات $n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱=\frac{۱۸-۲}{\frac{۲}{۳}}+۱=\frac{۱۶}{\frac{۲}{۳}}+۱=۲۴+۱=۲۵$

۳۰ **۳**

لازم است جملهٔ عمومی دنباله (a_n) را به‌دست آورده و $a_n<۰$ (منفی) قرار دهیم؛ قدرنسبت $d=-۳$ و جملهٔ اول ۶۵ است پس $a_n=-۳n+۶۸$ جملهٔ عمومی است:

$$a_n<۰ \Rightarrow -۳n+۶۸<۰ \Rightarrow -۳n<-۶۸ \xrightarrow[\text{جهت عوض می شود}]{\div(-۳)} n>\frac{-۶۸}{-۳} \Rightarrow n>۲۲/۶۷$$

دقت کنید $n>۲۲/۶۷$ ، n شمارهٔ جمله، عددی طبیعی است یعنی $n\geq۲۳$ شمارهٔ جملاتی هستند که مقدار این جملات منفی می‌شود پس اولین جملهٔ منفی این دنباله، جملهٔ ۲۳ام آن است. دقت کنید اگر سؤال پرسیده بود دنباله چند جمله مثبت دارد $a_n>۰$ قرار داده و $n\langle ۲۲/۶۷$ یعنی $۱\leq n\leq ۲۲$ به‌دست می‌آمد، یعنی ۲۲ جملهٔ این دنباله مثبت‌اند و از جملهٔ بیست و سوم تا آخر همگی منفی خواهند بود.

۳۱ ۲

یه جوراِیی مانند سؤال قبل حل نامعادله است، گفته جملاتی که اعداد سه رقمی‌اند؛ یعنی باید $۱۰۰ \le a_n \le ۹۹۹$ پس جملهٔ عمومی را به‌دست آورده و در نامساوی بالا قرار می‌دهیم و محدودهٔ n را می‌یابیم:

$$۳,۷,۱۱,\dots \xrightarrow[d=۴]{a_۱=۳} a_n=۴n-۱ \Rightarrow ۱۰۰\le ۴n-۱\le ۹۹۹ \xrightarrow{+۱} ۱۰۱\le ۴n\le ۱۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۲۵/۲۵\le n\le ۲۵۰ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} ۲۶\le n\le ۲۵۰ \Rightarrow \text{تعداد}=۲۵۰-۲۶+۱ \Rightarrow \text{تعداد جملات مورد نظر}=۲۵$$

دقت کنید با توجه به $۲۶\le n\le ۲۵۰$ اولین جملهٔ سه رقمی این دنباله، جمله ۲۶ام آن است و آخرین جملهٔ سه رقمی جمله ۲۵۰ام آن.

۳۲ ۲

روش اول: تشکیل و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول و ... (داستان ادامه دارد)

روش دوم: *فرمول بازی!!! البته از نوع خوب و مفیدش که در درسنامه هم گفتیم:*

$$\begin{cases} a_۳=۱۵ \\ a_{۱۰}=-۶ \end{cases} \Rightarrow d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{a_{۱۰}-a_۳}{۱۰-۳}=\frac{-۶-۱۵}{۱۰-۳}=\frac{-۲۱}{۷}=-۳$$

پس قدرنسبت $d=-۳$ به‌دست آمد و اما $a_{۱۵}$ مدنظر سؤال است. می‌دانیم $a_{۱۵}=a_۱+۱۴d$ اما $a_۱$ را نداریم و لازم نیست از $a_۳$ یا $a_{۱۰}$، $a_۱$ به‌دست آوریم چون در درسنامه هم گفتیم که علاوه بر فرمول $a_n=a_۱+(n-۱)d$، فرمول کلی‌تر $a_n=a_m+(n-m)d$ هم وجود دارد:

پس به جای $a_۱$ از $a_۳$ یا $a_{۱۰}$ کمک می‌گیریم که مقدار آن‌ها را داریم.

$$\begin{cases} a_{۱۵}=a_{۱۰}+۵d=-۶+۵(-۳)=-۶-۱۵=-۲۱ \\ \text{یا} \\ a_{۱۵}=a_۳+۱۲d=۱۵+۱۲\times(-۳)=۱۵-۳۶=-۲۱ \end{cases} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

۳۳ ۳

می‌دانیم دنباله‌ای که از یک الگوی خطی پیروی می‌کند همان دنبالهٔ حسابی است، مانند سؤال قبل:

$$\begin{cases} a_۴=-۵ \\ a_{۱۲}=۲۷ \end{cases} \Rightarrow d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{a_{۱۲}-a_۴}{۱۲-۴}=\frac{۲۷-(-۵)}{۸}=\frac{۳۲}{۸}=۴$$

برای این‌که مشخص کنیم ۹۹ جملهٔ چندم دنباله است باید یا جملهٔ عمومی را برابر ۹۹ قرار داده و n را بیابیم ($a_n=۹۹$)، یا این‌که از فرمول $n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱$ استفاده کنیم در اینجا می‌خواهیم جملهٔ عمومی را بدون داشتن $a_۱$ به‌دست بیاوریم!!!!

مگه $d=۴$ ضریب n نیست، پس $a_n=۴n+?$، خب $a_۴=-۵$ پس اگر $n=۴$ قرار دهیم باید حاصل ۵- شود پس $a_n=۴n-۲۱$ است:

$۴n-۲۱=۹۹ \Rightarrow ۴n=۹۹+۲۱=۱۲۰ \Rightarrow n=۳۰ \Rightarrow a_{۳۰}=۹۹$ گزینهٔ (۳) درست است.

۳۴ ۳

می‌دانیم $a_n-a_m=(n-m)d$ پس بر اساس اطلاعات سؤال داریم:

$$a_{۱۰}=a_۳-۴۲ \Rightarrow a_{۱۰}-a_۳=-۴۲ \xrightarrow{a_{۱۰}-a_۳=۷d} ۷d=-۴۲ \Rightarrow d=-۶$$

میشه از فرمول مقابل هم استفاده کرد که در اصل فرقی ندارد:

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{a_{۱۰}-a_۳}{۱۰-۳}=\frac{-۴۲}{۷}=-۶$$

۳۵ ۴

$$\begin{cases} a_۵=۵ \\ a_۸=a_{۱۵}+۱۴ \Rightarrow a_{۱۵}-a_۸=-۱۴ \Rightarrow ۷d=-۱۴ \Rightarrow d=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{۲۰}=a_۵+(۲۰-۵)d=a_۵+۱۵d \xrightarrow[d=-۲]{a_۵=۵} a_{۲۰}=۵-۳۰=-۲۵$$

۳۶ ۲

چون در دنبالهٔ $a_۳,a_۷,a_{۱۱},\dots$ جملات ۴ تا ۴ تا جلو می‌روند پس قدرنسبت آن ۴ برابر قدرنسبت دنبالهٔ اصلی است:

$۲,\frac{۷}{۴},\dots \Rightarrow d=\frac{۷}{۴}-۲=\frac{-۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴}$ جدید $d=\frac{۱}{۴}\times ۴=-۱$ گزینهٔ (۲) درست است.

۳۷ ۳

طبق فرمول قدرنسبت این دنباله (-۱) است، چون:

$$t_{m+۱}=t_m+d=n-۱ \qquad d=\frac{t_m-t_n}{m-n}=\frac{n-m}{m-n}=-۱$$

۳۸ ۳

مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم:

$$\begin{cases} a_1=-a_5 \Rightarrow a_1+a_5=0 \\ a_6+a_{10}=-30 \end{cases} \xrightarrow{a_n=a+(n-1)d} \begin{cases} a+a+4d=0 \\ a+5d+a+9d=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4d=0 \\ 2a+14d=-30 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \begin{cases} a+2d=0 \\ a+7d=-15 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d=-3, a=6 \Rightarrow \text{جملهٔ عمومی } a_n=-3n+9=-54 \Rightarrow n=21$$

می‌توانستیم به جای محاسبهٔ جملهٔ عمومی، از فرمول مقابل نیز استفاده کنیم:

$$\text{شمارهٔ جمله } n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{-54-6}{-3}+1=20+1=21$$

۳۹ ۲

مانند سؤال قبل و طبق نکتهٔ درسنامه باید مسئله را به زبان ریاضی تبدیل کرده و با حل یک دستگاه d, a را بیابیم: (منظور از a همان a_1 است.)

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=15 \\ a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=30 \end{cases} \xrightarrow[a_n=a+(n-1)d]{\text{بر حسب } d, a} \begin{cases} a+a+d+a+2d+a+3d=15 \Rightarrow 4a+6d=15 \\ a+4d+a+5d+a+6d+a+7d+a+8d=30 \Rightarrow 5a+30d=30 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\div 5} a+6d=6$$

$$\begin{cases} 4a+6d=15 \\ a+6d=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=3, d=\frac{1}{2} \Rightarrow a_{11}=a+10d=3+5=8$$

دقت کنید در درسنامه‌های بعدی خواهید خواند که مجموع n جملهٔ متوالی (تعداد فرد) از دنبالهٔ حسابی برابر است با: (جملهٔ وسط × تعداد) پس:

$$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=5a_7=5(a+6d)=30 \Rightarrow a+6d=6 \Rightarrow \dots$$

۴۰ ۲

روش اول: می‌دانیم $4+12=2\times 8$ پس طبق رابطهٔ اندیسی که در درسنامه توضیح داده شد:

$$a_4+a_{12}=2a_8$$

$$a_8=\frac{a_4+a_{12}}{2}=\frac{20}{2}=10$$

روش دوم: حل تشریحی به صورت زیر:

$$\begin{cases} a_4+a_{12}=20 \Rightarrow a+3d+a+11d=20 \Rightarrow 2a+14d=20 \xrightarrow{\div 2} a+7d=10 \Rightarrow a_8=10 \\ a_8=a+7d=? \end{cases}$$

میبینید که روش دوم آن نیز وقت گیر نبود و به سادگی قابل حل است.

۴۱ ۳

روش اندیسی $3+14+19=36=3\times 12 \Rightarrow t_3+t_{14}+t_{19}=3t_{12}=48 \Rightarrow t_{12}=16$

روش تشریحی: $t_3+t_{14}+t_{19}=a+2d+a+13d+a+18d=3a+33d=3(a+11d)=48 \xrightarrow{\div 3} a+11d=16 \Rightarrow a_{12}=16$

۴۲ ۲

طبق روابط اندیسی و مشابه دو سؤال قبل داریم:

$$\begin{cases} a_2+a_8=12 \Rightarrow 2a_5=12 \Rightarrow a_5=6 \\ a_3+a_5+a_7=3a_5=3\times 6=18 \end{cases}$$

۴۳ ۳

$$\begin{cases} {t_{15}}^2-{t_5}^2=350 \xrightarrow{\text{مزدوج}} \underbrace{(t_{15}-t_5)}_{10d}\underbrace{(t_{15}+t_5)}_{2t_{10}=2\times 7=14}=350 \Rightarrow 140d=350 \Rightarrow d=\frac{5}{2} \\ t_{10}=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{20}=a_{10}+(20-10)d=7+10\times\frac{5}{2}=7+25=32$$

۴۴ ۳

$$\underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}_{5a_3}=\frac{1}{3}\underbrace{(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})}_{5a_8} \Rightarrow \cancel{5}a_3=\frac{1}{3}\times\cancel{5}a_8$$

$$\Rightarrow a_8=3a_3 \Rightarrow a+7d=3(a+2d) \Rightarrow 3a+6d=a+7d \Rightarrow 2a=d$$

خواستهٔ سؤال: $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a+d}{a}\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{d=2a}\frac{a+2a}{a}=\frac{3a}{a}=3 \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

بچه‌ها دقت کنید این‌که گفتیم $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3$! چون تعداد جملات فرد بود میشه از رابطهٔ (جملهٔ وسط × تعداد) استفاده کرد، به هر حال اجباری در این رابطه نیست می‌توان با توجه به $a_n=a+(n-1)d$ همه را بر حسب d, a نوشت و سؤال را حل کرد فقط کمی طولانی‌تر میشه!

۴۵ ۴

روش اول: این سؤال مهم مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی ریاضی دهم است که در آزمون جامع (۱) سؤال ۱۷ نیز عیناً تکرار شده است. گفته شده مجموع ۵ جمله اول، ما فرض می‌کنیم ۵ جملهٔ متوالی! بهتر است طبق نکات درسنامه آن را به صورت $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d$ بنویسیم که:

$$\begin{cases} \text{مجموع پنج جمله} = ۵x = ۶۰ \Rightarrow x = ۱۲ \ \text{جمله وسط} \\ \text{مجموع دو جملهٔ بزرگ‌تر} = ۳\times(\text{مجموع سه جملهٔ کوچکتر}) \Rightarrow x+d+x+۲d = ۳(x-۲d+x-d+x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x+۳d = ۹x-۹d \Rightarrow ۱۲d = ۷x \xrightarrow{x=۱۲} d = \frac{۷\times۱۲}{۱۲} = ۷$$

روش دوم: توجه داشته باشید می‌توانستیم جملات این دنباله را به صورت عادی $a, a+d, a+۲d, a+۳d, a+۴d$ فرض کنیم که مجموع آن‌ها برابر $۵a+۱۰d = ۶۰$ است یعنی با تقسیم کردن طرفین بر ۵، داریم: $a+۲d = ۱۲$ و از طرفی مجموع دو جملهٔ بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جملهٔ کوچکتر است یعنی:

$$a+۳d+a+۴d = ۳(a+a+d+a+۲d) \Rightarrow ۲a+۷d = ۹a+۹d \Rightarrow ۷a+۲d = ۰$$

این شما و اینم دو روش بالا که هر کدوم رو دوست داشتید مسلط شوید!!!

$$\text{حل دستگاه} \begin{cases} a+۲d = ۱۲ \\ ۷a+۲d = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -۲, d = ۷$$

۴۶ ۳

با توجه به نکات درسنامه در این تیپ مسائل که صحبت از جمع و ضرب جملات متوالی شده است بهتر است از فرم زیر استفاده شود:

سه جملهٔ متوالی حسابی: $x-d, x, x+d$

$$\begin{cases} \text{حاصل جمع سه جمله} = ۳x = ۱۵ \Rightarrow x = ۵ \ \text{جملهٔ وسط} \\ \text{حاصل ضرب آنها} = x(x-d)(x+d) = x(x^۲-d^۲) = ۱۰۵ \end{cases} \xrightarrow{x=۵} ۵(۲۵-d^۲) = ۱۰۵ \Rightarrow ۲۵-d^۲ = ۲۱ \Rightarrow d^۲ = ۴ \Rightarrow d = \pm۲$$

خب پس $d = \pm۲$ و جملهٔ وسط ۵ است، در دو حالت افزایشی و کاهشی می‌توان سه جمله را نوشت که در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله ۷ است:

$\{۳, ۵, ۷\}$ یا $\{۷, ۵, ۳\}$

۴۷ ۲

طبق نکات درسنامه در این حالت زاویهٔ متوسط ۶۰° است پس با قدرنسبت $d = ۲۰^\circ$ بزرگ‌ترین زاویه $۶۰^\circ + ۲۰^\circ = ۸۰^\circ$ و کوچک‌ترین زاویه $۶۰^\circ - ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$ است:

$$\underbrace{۴۰^\circ \ , \ ۶۰^\circ}_{-۲۰} \ \underbrace{\ , \ ۸۰^\circ}_{+۲۰}$$

۴۸ ۲

می‌دانیم یک n ضلعی محدب را می‌توان به $(n-۲)$ مثلث مجزا تفکیک کرد و مجموع کل زاویه‌های آن را به صورت $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ محاسبه کرد. طبق درسنامه (۹) مجموع زوایای یک پنج ضلعی محدب $۳\times۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$ است. از طرفی اگر قرار باشد این ۵ زاویه تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، آن‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$(x-۲d), (x-d), x, (x+d), (x+۲d) \xrightarrow{\text{مجموع ۵ جمله}} ۵\times \underset{\text{وسطی}}{\underset{\downarrow}{x}} = ۵۴۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۸^\circ \ \text{زاویهٔ متوسط}$$

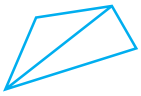
اما سؤال زاویهٔ متوسط را نخواسته و مشابه تمرین ۶ پایان فصل ۱ کتاب درسی ریاضی دهم، گفته، $\frac{۱}{۳}$ مجموع سه زاویهٔ بزرگ‌تر مساوی مجموع دو زاویهٔ کوچکتر است که با حل این معادله، d به‌دست می‌آید.

$$\frac{۱}{۳}\underbrace{(x+x+d+x+۲d)}_{\text{مجموع سه زاویه بزرگ‌تر}} = \underbrace{x-۲d+x-d}_{\text{مجموع دو زاویه کوچکتر}} \Rightarrow \frac{۱}{۳}(۳x+۳d) = ۲x-۳d \Rightarrow x+d = ۲x-۳d$$

$$\Rightarrow x = ۴d \xrightarrow{x=۱۰۸^\circ} ۴d = ۱۰۸^\circ \Rightarrow d_{\text{قدرنسبت}} = ۲۷^\circ \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین زاویه} = x+۲d = ۱۰۸^\circ + ۲\times۲۷^\circ = ۱۶۲^\circ$$

گزینهٔ (۲) درست است.

۴۹ ۳



طبق درسنامه، مجموع کل زاویه‌های یک ۴ ضلعی محدب برابر $۲\times۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$ و میانگین زاویه‌ها $x=\frac{۳۶۰^\circ}{۴}=۹۰^\circ$ است.

می‌دانیم چهار جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d را می‌توان به صورت $x+\frac{۳d}{۲}$ ، $x+\frac{d}{۲}$ ، $x-\frac{d}{۲}$ ، $x-\frac{۳d}{۲}$ نوشت که بزرگ‌ترین آن‌ها $(d>۰)$ برابر $x+\frac{۳d}{۲}$ است، پس:

$$x+\frac{۳d}{۲}=۱۵۰^\circ \xrightarrow{x=۹۰^\circ} \frac{۳d}{۲}=۱۵۰^\circ-۹۰^\circ=۶۰^\circ \Rightarrow d=۶۰^\circ\times\frac{۲}{۳}=۴۰^\circ$$

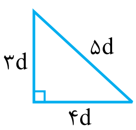
تذکر اگر صحبت از حاصل ضرب جملات بود حتماً روش اول پیشنهاد می‌شد، اما در اینجا ضرورت زیادی به روش اول نیست.

۵۰ ۳

طبق نکات درسنامه، اگر طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند طول وتر مثلث $۵d$ است: $d=۳ \Rightarrow \text{وتر}=۵d=۵\times۳=۱۵$

۵۱ ۴

طبق نکات درسنامه این مثلث را به صورت مقابل به خاطر سپرده‌اید:



$$\begin{cases}\text{محیط}=۳d+۴d+۵d=۱۲d\\ \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\times۳d\times۴d=۶d^{۲}\end{cases}\Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}}=\frac{۶d^{۲}}{۱۲d}=۵\Rightarrow d=۱۰\Rightarrow \text{ضلع متوسط}=۴d=۴۰$$

۵۲ ۲

طبق نکته‌ای که قبل از این سؤال گفته شده بود، دنبالهٔ اعداد طبیعی که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ است، یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=۷$ و جمله اول $a=۲$ است، پس جمله بیستم برابر است با: $a_{۲۰}=a+۱۹d=۲+۱۹\times۷=۲+۱۳۳=۱۳۵$ گزینهٔ (۲) درست است.

۵۳ ۲

هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و هم بر ۳، یعنی هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ یعنی مضرب ۶ باشد. (باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۶ برابر صفر باشد.) پس قدرنسبت آن ۶ است. چون گفته شده اعداد طبیعی سه رقمی پس جملهٔ اول را اولین عدد سه رقمی مضرب ۶ می‌گیریم که با امتحان کردن به ۱۰۲ می‌رسیم (هم زوج و هم مضرب ۳ هم سه رقمی!) و آخرین جملهٔ آن، بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۶ است یعنی ۹۹۶!

پس باید تعداد جملات دنباله $\underbrace{۱۰۲ , ۱۰۸}_{+۶} ,\dots, ۹۹۶$ را به‌دست آوریم طبق فرمول تعداد جملات داریم: $n=\frac{۹۹۶-۱۰۲}{۶}+۱=۱۴۹+۱=۱۵۰$

۵۴ ۴

طبق نکات درسنامه، در دنبالهٔ حسابی، دو برابر جملهٔ وسط برابر است با مجموع جملات ابتدایی و انتهایی:

$$۲(۳p+۴)=۲p+۳+۵p-۱\Rightarrow ۶p+۸=۷p+۲\Rightarrow p=۶$$

در دنباله $p=۶$ با جایگذاری $\Rightarrow ۱۵,۲۲,۲۹\Rightarrow$ قدرنسبت $d=۲۲-۱۵=۷$

۵۵ ۲

ابتدا برای سادگی محاسبات، کسری که مخرج آن رادیکالی است را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{۱-۳}=-۱-\sqrt{۳}$$

$$-۱-\sqrt{۳},۱+\sqrt{۳}\Rightarrow \text{واسطهٔ حسابی دو عدد}=\frac{\text{جمع دو عدد}}{۲}=\frac{-۱-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

مشخص است که دو جمله قرینه هم‌اند پس مجموع آن‌ها صفر است پس واسطهٔ حسابی آن‌ها نیز صفر خواهد بود.

۵۶ ۲

برای این سؤال دو روش ارائه شده که حتماً هر دو روش را مطالعه کنید.

روش اول: طبق نکته $2b=a+c$ در دنبالهٔ حسابی ابتدا x، سپس قدرنسبت و در نهایت y را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$2b=a+c \Rightarrow 2x=23-11=12 \Rightarrow x=6 \Rightarrow \{\underbrace{23\,,\,6}_{-17}\,,\underbrace{\,}_{-17}\,-11\,,\underbrace{\,}_{-17}\,y\,,\ldots\}$$

$$d=-17 \Rightarrow y=-11-17=-28$$

روش دوم: طبق این که ۲۳ جملهٔ اول و ۱۱- جملهٔ سوم است و دو جمله معلوم است مستقیماً قدرنسبت و سپس y را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=\frac{-11-23}{3-1}=\frac{-34}{2}=-17 \Rightarrow y=-11-17=-28$$

من روش دوم رو می‌پسندم! شما چطور؟!! اگر روش دوم رو یاد نگیری سؤال بعدی رو گیر میکنیا.

۵۷ ۲

باز هم ابتدا گویا کردن!

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

پس جملهٔ اول $a_1=2+\sqrt{3}$ و جملهٔ چهارم $a_4=5+7\sqrt{3}$ است و قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=\frac{(5+7\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})}{4-1}=\frac{3+6\sqrt{3}}{3}=1+2\sqrt{3}$$

خب حالا قدرنسبت را به جملهٔ اول دنباله اضافه می‌کنیم تا a به‌دست آید و سپس به a اضافه می‌کنیم تا b به‌دست آید یا این‌که از جملهٔ چهارم ($5+7\sqrt{3}$) به اندازهٔ قدرنسبت کم می‌کنیم تا b به‌دست آید:

$$b=(5+7\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})=4+5\sqrt{3}$$

۵۸ ۲

روش اول: استفاده از فرمول $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$ چون $a_7=22, a_1=-8$ است:

$$d=\frac{a_7-a_1}{7-1}=\frac{22-(-8)}{7-1}=\frac{30}{6}=5 \xrightarrow{\text{گزینهٔ (۲)}} \text{جملات دنباله}: -8,-3,2,7,12,17,22$$

روش دوم: استفاده از فرمول $d=\frac{b-a}{k+1}$ که اگر خاطرتان باشد طبق درسنامه b, a جملات ابتدا و انتها و k تعداد واسطه‌های بین a و b بودند:

$$d=\frac{22-(-8)}{5+1}=\frac{30}{6}=5$$

تذکر خیلی مهم دقت کنید اگر سومین واسطه یا چهارمین جمله مدنظر سؤال بود اصلاً نیازی به d نداشتیم چون در واقع جمله وسطی را خواسته و می‌دانیم:

$$\text{وسطی}=\frac{\text{اولی}+\text{آخری}}{2}=\frac{-8+22}{2}=7$$ *بله به همین راحتی!!!*

۵۹ ۲

همانطور که تا الان یاد گرفته‌اید در این سؤالات که مخرج رادیکال دارد باید در اولین مرحله، آن کسر را گویا کنیم: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

خب پس تا الان دو عدد $\sqrt{2}-1$ و $22\sqrt{2}+6$ را داریم و می‌خواهیم بین آن‌ها k واسطهٔ حسابی طوری درج کنیم که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=3\sqrt{2}+1$ بدهند.

فرمول تعداد جملات $n=\frac{b-a}{d}+1$ را که بلدیم همانطور که در درسنامه گفتیم اگر از آن ۲ واحد کم کنیم تعداد واسطه‌ها (k) به‌دست می‌آید یعنی:

$$k=\frac{b-a}{d}-1=\frac{(22\sqrt{2}+6)-(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}+1}-1=\frac{21\sqrt{2}+7}{3\sqrt{2}+1}-1=\frac{7\cancel{(3\sqrt{2}+1)}}{\cancel{(3\sqrt{2}+1)}}-1=7-1=6$$

یه لحظه وایستا اینجارو بخون و بعدش برو سؤال بعدی:

بین ۱- و ۶+ چند واسطهٔ حسابی با قدرنسبت ۱+ می‌توان درج کرد؟

$$k=\frac{6-(-1)}{1}-1=6$$

بین $\sqrt{2}, 22\sqrt{2}$ چند واسطهٔ حسابی با قدرنسبت $3\sqrt{2}$ می‌توان درج کرد؟

$$k=\frac{22\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}-1=6$$

دیدی چی شد؟ یعنی اگر فقط قسمت رادیکالی یا فقط قسمت صحیح b, a و قدرنسبت را در نظر بگیریم، برای محاسبهٔ k کافیه!!! بریم در افق محو بشیم!!!

۶۰ **۲**

قرار بود خودت درست حل کنی! اگر تونستی واقعاً احسنت بر تو، اگر هم نتونستی اشکال نداره، مارک دارش کن و الان یاد بگیرش تا در دوره‌های بعدی درست حل کنی!

$d=\frac{a_{۱۱}-a_۳}{۱۱-۳}=\frac{۴۳-۱۱}{۸}=۴\Rightarrow a_۴=a_۳+d=۱۱+۴=۱۵$ قدرنسبت دنباله داده شده

حال باید در دنباله $\{-۳,x,y,۱۵,\ldots,۴۵\}$ جملهٔ چهارم همان ۱۵ باشد یعنی $d=\frac{a_۴-a_۱}{۴-۱}=\frac{۱۸}{۳}=۶$ پس قدرنسبت $d=۶$ است.

در نهایت تعداد واسطه‌های آن (k) را می‌خواهیم:

$$k=\frac{b-a}{d}+۱=\frac{۴۵-(-۳)}{۶}-۱=۸-۱=۷$$

۶۱ **۳**

با ادامه دادن جملات دو دنباله اولین جملهٔ مشترک ۱۷ و ک.م.م دو قدرنسبت نیز برابر ۱۵ است:

$$\begin{cases}۲,۷,۱۲,\underline{۱۷},\ldots\Rightarrow d_۱=۵\\ ۸,۱۱,۱۴,\underline{۱۷},\ldots\Rightarrow d_۲=۳\end{cases}\Rightarrow d=۱۵\ \text{ک.م.م}$$

$\{\underbrace{۱۷,۳۳}_{+۱۵},\ldots\}$ جملات مشترک $\Rightarrow a_n=۱۵n+۲$ جملهٔ عمومی مشترک‌ها

برای محاسبه جملات مشترک سه رقمی باید a_n را بین ۱۰۰ و ۹۹۹ قرار دهیم و محدودهٔ n را بیابیم:

$$۱۰۰\le ۱۵n+۲\le ۹۹۹\xrightarrow{-۲}۹۸\le ۱۵n\le ۹۹۷\xrightarrow{\div ۱۵}۶/۵۳\le n\le ۶۶/۴۷$$

$$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۷\le n\le ۶۶\Rightarrow \text{تعداد جملات}=۶۶-۷+۱=۶۰$$

دقت کنید که اگر پرسیده شده بود اولین جملهٔ مشترک سه رقمی، چندمین جملهٔ مشترک است از $a_n\ge ۱۰۰$ نتیجه می‌گرفتیم $n\ge ۷$ و هفتمین جملهٔ مشترک اولین جملهٔ مشترک سه رقمی بود!

۶۲ **۴**

$$\begin{cases}۷,۱۱,۱۵,۱۹,\ldots\\ -۳,۳,۹,۱۵,\ldots\end{cases}$$

اولین جملهٔ مشترک با ادامه دادن دو دنباله، عدد ۱۵ است و قدرنسبت دنبالهٔ جدید (مشترک‌ها) برابر ک.م.م ۴ و ۶ یعنی ۱۲ است. پس $d=۱۲,a=۱۵$ و جمله عمومی مشترک‌ها $t_n=۱۲n+۳$ است.

۵۰جملهٔ اول دنباله (۱) به $a_{۵۰}=a+۴۹d=۷+۴۹\times۴=۲۰۳$ ختم می‌شود و ۵۰ جمله اول دنباله (۲) به $b_{۵۰}=a+۴۹d=-۳+۴۹\times۶=۲۹۱$ ختم می‌شود.

پس باید جملات مشترک کمتر از ۲۰۳ باشند. (کافی بود فقط پنجاهمین جملهٔ دنباله با قدرنسبت کوچک‌تر یعنی دنبالهٔ (۱) را حساب کنیم):

$$t_n\le ۲۰۳\Rightarrow ۱۲n+۳\le ۲۰۳\Rightarrow ۱۲n\le ۲۰۰\Rightarrow n\le ۱۶/۶۷\Rightarrow n\le ۱۶\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}\text{۱۶ جملهٔ مشترک}$$

۶۳ **۴**

امیدوارم سوتی نداره باشی و مجموع جملات فرد را منهای زوج نکرده باشی!!! اگه اینجوری کردی، درس عبرت بگیر و بیشتر دقت کن!

$$S_{\text{فرد}}-S_{\text{زوج}}=\frac{n}{۲}d\xrightarrow{\text{این فرمول در درسنامه اثبات شد}}۱۰۰-۱۴۵=\frac{۳۰}{۲}d\Rightarrow -۴۵=۱۵d\Rightarrow d=-۳$$

۶۴ **۲**

$$\begin{cases}S_{\text{زوج}}=۱۲۰\\ S_{\text{کل}}=\frac{۸}{۵}S_{\text{فرد}}\Rightarrow S_{\text{زوج}}+S_{\text{فرد}}=\frac{۸}{۵}S_{\text{فرد}}\Rightarrow S_{\text{زوج}}=\frac{۳}{۵}S_{\text{فرد}}\end{cases}\Rightarrow S_{\text{فرد}}=\frac{۵}{۳}S_{\text{زوج}}=\frac{۵}{۳}\times۱۲۰=۲۰۰$$

خب الان دیگه $S_{\text{زوج}}=۱۲۰$ و $S_{\text{فرد}}=۲۰۰$ رو داریم:

$$S_{\text{فرد}}-S_{\text{زوج}}=\frac{n}{۲}d\Rightarrow ۱۲۰-۲۰۰=\frac{۳۲}{۲}d\Rightarrow -۸۰=۱۶\times d\Rightarrow d=\frac{-۸۰}{۱۶}=-۵$$

۶۵ **۲**

طبق نکات درسنامه می‌دانیم ۲ برابر کردن همهٔ جملات قدرنسبت را ۲ برابر می‌کند یعنی $2d$، اما این‌که از همه جملات دنباله ۳ واحد کم کنیم تأثیری روی قدرنسبت دنباله ندارد، پس قدرنسبت دنبالهٔ جدید $2d$ است.

روش ریاضی‌دان‌ها!!! در دنبالهٔ اصلی $d = a_2 - a_1$ است و در دنبالهٔ جدید:

$$\text{قدرنسبت} = \underbrace{(2a_2-3)}_{\text{جمله دوم}} - \underbrace{(2a_1-3)}_{\text{جمله اول}} = 2a_2 - \cancel{3} - 2a_1 + \cancel{3} = 2(\underbrace{a_2-a_1}_{d}) = 2d$$

۶۶ **۳**

در دنبالهٔ $a_3, a_7, a_{11}, \dots$ نسبت به دنبالهٔ اصلی $a_1, a_2, a_3, \dots$، قدرنسبت ۴ برابر می‌شود، یعنی $4d$. چرا؟! خب اگه دلیل می‌خوای پایین رو بخون ...

می‌دانیم که $a_m - a_n = (m-n)d$ پس محاسبات مقابل رو ببین:

$$\begin{cases} d = a_2 - a_1 \\ \text{جدید}\ d' = a_7 - a_3 = (7-3)d = 4d \xrightarrow{\text{گلابی!!!}} \text{گزینهٔ (۳)} \end{cases}$$

۶۷ **۱**

اگر نکتهٔ (۴) درسنامه رو فهمیده باشی و حفظ هم کرده باشی که جواب همان ۳ واحد میشه یعنی گزینهٔ (۱)، اما اگر هنوز در درکش گیر داری اثبات مقابل رو ببین:

$$a_{20} = a_1 + 19d \xrightarrow{a_1+3} \text{جدید}\ a_{20} = a_1 + 3 + 19d = (\underbrace{a_1+19d}_{\text{قدیم}\ a_{20}}) + 3$$

هنوز که داری چپ چپ نگاه می‌کنی!!! یه جور دیگه بگم، هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی d واحد اضافه می‌شود. خب حالا اگر به جملهٔ اول ۳ واحد اضافه کنیم با قدرنسبت ثابت (d)، به همهٔ جملات بعدی همان ۳ واحد اضافه می‌شود مثلاً :

$$\begin{cases} \overbrace{5\ ,\ 10}^{+5}\ ,\ \overbrace{\ \ 15}^{+5}\ ,\ 20\ ,\ \dots \\ \downarrow +3 \\ \underbrace{8\ ,\ 13}_{+5}\ ,\ \underbrace{\ \ 18}_{+5}\ ,\ 23\ ,\ \dots \end{cases}$$

۶۸ **۳**

ضرورتی نداره فرمول $(n-1)k$ واحد اضافه شدن رو حفظ باشی!! یعنی $19 \times 3 = 57$

چون به راحتی به صورت مقابل می‌توان نوشت:

$$\text{قدیم}\ a_{20} = a + 19d \xrightarrow{d+3} \text{جدید}\ a_{20} = a + 19(d+3) = \underbrace{a+19d}_{\text{قدیم}\ a_{20}} + 57$$

۶۹ **۲**

روش هوایی! یعنی بدون کاغذ و خودکار، روی هوا!!!

اگر به جملهٔ اول ۴۲ واحد اضافه کنیم، خب به جملهٔ پانزدهم هم ۴۲ واحد اضافه می‌شود، حال باید از قدرنسبت چند واحد کم کنیم که این ۴۲ واحد اضافه را خنثی کند، $a_{15} = a + 14d$ پس باید از قدرنسبت ۳ واحد کم کنیم چون: $14 \times 3 = 42$ *(چند بار تمرین کن تا روی هوا حلش کنی!!)*

روش زمینی! منظورم همان کاغذ و خودکار بود!

$$\text{قدیم}\ a_{15} = a + 14d \xrightarrow[d-k]{a+42} \text{جدید}\ a_{15} = a + 42 + 14(d-k) = \underbrace{a+14d}_{\text{قدیم}\ a_{15}} + 42 - 14k$$

چون جمله a_{15} ثابت مانده پس باید $42 - 14k = 0$ باشد یعنی: $k = \frac{42}{14} = 3$

۷۰ **۲**

چون اختلاف دو جملهٔ متوالی $a_{n+1} - a_n = -3$ مقدار ثابتی است؛ پس این دنباله، حسابی با قدرنسبت $= -$ و جملهٔ اول $a_1 = 71$ است و جملهٔ عمومی آن $a_n = -3n + 74$ است. برای محاسبه تعداد جملات مثبت دنباله کافی است $a_n > 0$ قرار داده و محدودهٔ n را بیابیم:

$$-3n + 74 > 0 \Rightarrow 3n < 74 \Rightarrow n < \frac{74}{3} \Rightarrow n < 24/67 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 1 \le n \le 24$$

پس ۲۴ جملهٔ اول آن مثبت‌اند و از جملهٔ بیست و پنجم به بعد منفی می‌شوند.

۷۱ **۱**

اختلاف دو جملهٔ متوالی مقدار ثابتی است، پس این دنبالهٔ حسابی است و قدرنسبت آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n - a_{n+1} = 3 \Rightarrow d = a_{n+1} - a_n = -3 \Rightarrow d = -3$$

و اما سراغ دیگر اطلاعات سؤال می‌رویم، گفته شد جملهٔ سوم و هفتم قرینهٔ یکدیگرند! این بیان فارسی را به صورت زیر به بیان ریاضی می‌نویسیم تا ببینیم در ادامه چه می‌شود!!

$$a_3 = -a_7 \Rightarrow a_3 + a_7 = 0 \xrightarrow{\text{حسابی}} a + 2d + a + 6d = 0 \Rightarrow 2a + 8d = 0 \Rightarrow a = -4d \xrightarrow{d=-3} a = 12$$

خب اتفاق خوبی رقم خورد، قدرنسبت d را داشتیم، جملهٔ اول a نیز به‌دست آمد، دیگر مسئله حل شده است، جمله پانزدهم برابر است با:

$$a_{15} = a + 14d = 12 + 14 \times (-3) = 12 - 42 = -30$$

۷۲ **۴**

جملهٔ اول $a_1 = 4$ و قدرنسبت دنباله (۵-) دقیقه یا همان $\frac{-1}{12}$ ساعت است:

$$a_n = a + (n-1)d = 4 + (n-1) \times \frac{-1}{12} \xrightarrow{a_n = 2} 4 + (n-1) \times (-\frac{1}{12}) = 2 \Rightarrow \frac{1}{12}(n-1) = 2 \Rightarrow n - 1 = 24 \Rightarrow n = 25$$

۷۳ **۳**

طبق تعریف دنبالهٔ هندسی، جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی تابع نمایی با توانی درجه یک است، یعنی n در توان باشد و فقط گزینهٔ (۳) درست است:

$$a_n = \frac{5}{2^{3n+1}} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

دقت کنید گزینهٔ (۱) دنبالهٔ درجهٔ دوم، گزینهٔ (۲) حسابی و گزینهٔ (۴) نیز نمایی است اما توان آن خطی نیست.

۷۴ **۳**

توجه داشته باشید اگر $a_n = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ یعنی به فرم $a_n = a_1 r^{n-1}$ بود از ظاهر جمله عمومی می‌گفتیم $a_1 = 3$, $r = -\frac{1}{2}$ است اما در اینجا $a_n = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n-1}$ و ضریب n در توان ۲ است نه ۱!!! برای مشخص کردن جملهٔ اول کافی است $n = 1$ قرار دهیم:

$$\text{جملهٔ اول}: n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱) و (۲) غلط}$$

و اما برای قدرنسبت دو روش داریم، یکی این‌که جملهٔ دوم را نیز به‌دست آوریم. و سپس بر جملهٔ اول تقسیم کنیم:

$$\text{جملهٔ دوم}: n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8} \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{-3}{8}}{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$$

و روش دیگر این است:

نکته قدرنسبت دنباله هندسی همان پایه ظاهری به توان ضریب n است!!

$$\text{قدر نسبت} = \text{پایه واقعی} = (\text{پایه ظاهری})^{\text{ضریب } n} \longrightarrow a_n = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n-1} \Rightarrow r = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

خب حالا که اینو یاد گرفتی، بگو در سؤال ۷۳ که گزینهٔ (۳) دنبالهٔ هندسی بود یعنی $a_n = \frac{5}{2^{3n+1}}$ جملهٔ اول و قدرنسبت چند است؟!! آفرین: $r = \frac{1}{8}, a_1 = \frac{5}{16}$

۷۵ **۴**

به روش ساده‌سازی و محاسبات این سؤال دقت کن، از این به بعد زیاد کاربرد داره!!

با توجه به جمله عمومی دنبالهٔ هندسی که $a_n = ar^{n-1}$ است پس جملهٔ دوازدهم، $a_{12} = a_1 r^{11}$ است که $r = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$ می‌باشد:

$$a_{12} = 12 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{11} = 2^2 \times 3 \times \frac{-1}{2^{11}} = \frac{-3}{2^9} = -\frac{3}{512}$$

۷۶ **۲**

در واقع این سؤال مروری بر دنبالهٔ حسابی نیز دارد. ابتدا جملهٔ یازدهم حسابی را به‌دست می‌آوریم و سپس مقدار آن را برابر جملهٔ عمومی هندسی قرار می‌دهیم تا شمارهٔ جمله (n) به‌دست آید.

$$۱۳,۹,۵,\ldots \xrightarrow[=-]{۱۳} a_{۱۱} = a + ۱۰d = ۱۳ - ۴۰ = \quad ۲۷$$

$$\frac{۱}{۹}, -\frac{۱}{۳}, \ldots \xrightarrow[r=-۳]{a=\frac{۱}{۹}} a_n = ar^{n-۱} = \frac{۱}{۹} \times (-۳)^{n-۱} = -۲۷ \Rightarrow (-۳)^{n-۱} = -۲۷ \times ۹$$

$$\Rightarrow (-۳)^{n-۱} = -۳^۳ \times ۳^۲ = (-۳)^۵ \Rightarrow n - ۱ = ۵ \Rightarrow n = ۶$$

۷۷ **۲**

چون گفته غیر کاهشی حتماً $r < ۰$ (نوسانی $\pm$، نه کاهشی و نه افزایشی) بوده است. ممکن است بگویید غیر کاهشی می‌تواند به معنی افزایش باشد اما وقتی $a_۷ = ۷, a_۳ = ۱۱۲$ است چگونه می‌تواند افزایشی باشد؟!! در درسنامه (۱۹) هم تحت عنوان ژلوفن به این مطلب تأکید شده بود. بگذریم! به سراغ محاسبه $a_{۱۰}, r$ می‌رویم:

$$— \quad r^{۷\ \ ۳} = r^۴ \Rightarrow r^۴ = \frac{۷}{۱۱۲} = \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\text{خاصیت ریشهٔ زوج}} r = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{غیرافزایشی}} r = -\frac{۱}{۲}$$

خب برای محاسبهٔ $a_{۱۰}$ از $a_{۱۰} = a_۱ r^۹$ استفاده نمی‌کنیم چون $a_۱$ را نداریم (باید از $a_۳$ یا $a_۷$، مقدار $a_۱$ را به‌دست آوریم که وقت تلف کردن است!!!) بلکه کافی است از رابطهٔ مقابل استفاده کنیم:

$$a_n = a_m r^{n-m} \Rightarrow a_{۱۰} = a_۳ \times r^۷ = ۷ \times \left(\frac{-۱}{۲}\right)^۷ = \frac{-۷}{۱۲۸}$$

۷۸ **۴**

این تیپ سؤال یک تیپ معروف و مهم در دنباله هندسی است که باید با تشکیل دستگاه و فاکتورگیری و سپس تقسیم کردن، قدرنسبت و سپس جملهٔ اول را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ = ۷۲ \\ a_۳ + a_۴ = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{برحسب } r,a} \begin{cases} a + ar = ۷۲ \\ ar^۲ + ar^۳ = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \begin{cases} a(۱+r) = ۷۲ \ ❶ \\ ar^۲(۱+r) = ۸ \ ❷ \end{cases} \Rightarrow \text{تقسیم ❷ بر ❶}$$

$$\Rightarrow \frac{ar^۲(۱+r)}{a(۱+r)} = \frac{۸}{۷۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow r = \pm\frac{۱}{۳} \xrightarrow[r<۰]{\text{غیر کاهشی}} r = -\frac{۱}{۳}$$

$$a(۱+r) = ۷۲ \xrightarrow{r=-\frac{۱}{۳}} a\left(۱ + \frac{-۱}{۳}\right) = ۷۲ \Rightarrow a \times \frac{۲}{۳} = ۷۲ \Rightarrow a = ۳۶ \times ۳ = ۱۰۸ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۰۸ \\ r = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: ۱۰۸, -۳۶, ۱۲, -۴, \ldots$$

بزرگ‌ترین جمله $a_۱ = ۱۰۸$ و کوچک‌ترین جمله $a_۲ = -۳۶$ است.

نکته اگر $-۱ < r < ۰$ باشد $\min, \max$ دنباله همان جملات اول و دوم هستند. (ترتیب آن‌ها بستگی به علامت $a_۱$ دارد.)

۷۹ **۱**

باز هم دو دسته اطلاعات و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول و پیدا کردن r, a!!

$$\begin{cases} \frac{t_۵}{t_۷} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{t_۷}{t_۵} = ۳ \xrightarrow{\text{طبق نکتهٔ درسنامه}} r^{۷-۵} = r^۲ = ۳ \Rightarrow r = \pm\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} r = +\sqrt{۳} \\ t_۱ . t_۴ . t_۶ = ۲۴ \Rightarrow a . ar^۳ . ar^۵ = ۲۴ \Rightarrow a^۳ r^۸ = ۲۴ \xrightarrow{r^۲=۳} a^۳ \times ۸۱ = ۲۴ \end{cases}$$

دقت کنید $r^۸ = (r^۲)^۴$ است، یعنی $۳^۴ = ۸۱$ یا این‌که $r^۸ = (\sqrt{۳})^۸ = \left(۳^{\frac{۱}{۲}}\right)^۸ = ۳^۴$!!

سپس جملهٔ سوم $t_۳ = ۲$ و گزینهٔ (۱) درست است.

$$\Rightarrow a^۳ = \frac{۲۴}{۸۱} = \frac{۸}{۲۷} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{جملهٔ سوم } t_۳ = ar^۲ = \frac{۲}{۳} \times ۳ = ۲$$

۸۰ ۴

این بار هم دو دسته اطلاعات، اما مانند سؤال ۷۷ دو جمله معلوم است که این دو جمله مساوی هم‌اند، ببینید چه اتفاقی می‌افتد، می‌دانیم:

$\frac{a_{10}}{a_4}=r^6 \xrightarrow{a_{10}=a_4} r^6=1 \Rightarrow r=\pm 1 \Rightarrow$ اگر $r=1$ باشد که دنباله ثابت است و غیر قابل قبول، پس $r=-1$ است.

$r=-1$ یعنی جملات یکی در میان $a, -a$ هستند، از آنجا که گفته شده $a_4=2$ است پس جملات شماره زوج، $+2$ و جملات شماره فرد، -2 بوده‌اند:

$-2, 2, -2, 2, -2, \ldots \xrightarrow{\text{با کمی دقت می‌فهمیم}}$
- مجموع تعدادی زوج از جملات $=0$
- مجموع تعدادی فرد از جملات $=-2 \Rightarrow$ مجموع ۱۷ جمله اول $=-2$
- (با شروع از جمله اول)

خب حالا شما بگین اگر $a_3=a_7=2$ بود چی؟ بله با فرض غیرثابت بودن دنباله، $r=-1$ و مجموع جملات ۲ می‌شه -۲ !! $\{2, -2, 2, -2, \ldots\}$

۸۱ ۲

همین که بگوید جملات، همگی مثبت یا همگی منفی‌اند (هم‌علامت‌اند)، یعنی $r>0$ بوده است!!!

چون همانطور که می‌دانید اگر $r<0$ باشد مثبت و منفی بودن جملات یکی در میان تغییر می‌کند.

$$a_7=2a_5 \Rightarrow \frac{a_7}{a_5}=2 \Rightarrow r^{7-5}=r^2=2 \Rightarrow r=\pm\sqrt{2} \xrightarrow{r>0} r=\sqrt{2}$$

چند برابر یعنی تقسیم (نسبت) و همچنین دقت کنید m جملهٔ kام به جملهٔ (mk)ام ختم می‌شود مثلاً سه جمله پنجم، به جمله ۱۵ام ختم می‌شود.

$$\frac{\text{مجموع سه جمله پنجم}}{\text{مجموع سه جمله دوم}}=\frac{a_{15}+a_{14}+a_{13}}{a_6+a_5+a_4}=\frac{ar^{14}+ar^{13}+ar^{12}}{ar^5+ar^4+ar^3}=\frac{\cancel{a}r^{12}\cancel{(r^2+r+1)}}{\cancel{a}r^3\cancel{(r^2+r+1)}}=r^9$$

خب پس $r=\sqrt{2}$ را داریم و حاصل r^9 را می‌خواهیم:

$$r^9=(\sqrt{2})^9=(\sqrt{2})^8\times\sqrt{2}=2^4\times\sqrt{2}=16\sqrt{2}$$

۸۲ ۱

$$a_n+2a_{n+1}=0 \Rightarrow 2a_{n+1}=-a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} r=\frac{-1}{2}$$

$$a_{12}=a_1r^{11}=4\times\left(\frac{-1}{2}\right)^{11}=2^2\times\frac{-1}{2^{11}}=\frac{-1}{2^9}=-\frac{1}{512}$$

۸۳ ۴

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} \frac{a_{n+1}}{a_n}=3 \Rightarrow r=3 \\ a_4=54 \Rightarrow ar^3=54 \xrightarrow{r=3} a\times 27=54 \Rightarrow a=2 \end{cases} \Rightarrow a_n=ar^{n-1}=2\times 3^{n-1}$$

۸۴ ۳

- پس از پایان سال اول $=p+0/2p=1/2p \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} r=1/2$
- پس از پایان سال دوم $=1/2\times 1/2p=(1/2)^2 p$
- پس از پایان سال nام $=p\times(1/2)^n$

ممکن است با خود بگویید که چرا مانند جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی، برای پایان سال nام، توان $(n+1)$ نشد!؟ چون با توجه به الگوی بالا متوجه شدیم که پایان سال اول، جملهٔ دوّم دنباله و پایان سال دوّم، جملهٔ سوّم دنباله و ... پایان سال nام، جملهٔ $(n+1)$ام دنباله می‌باشد، یعنی

$\underset{\text{اولیه}}{p}$ و $\underset{\text{پایان سال اول}}{p\times(1/2)}$ و $\underset{\text{پایان سال دوم}}{p\times(1/2)^2}$, ...

۸۵ ۲

هر روز $\frac{۱}{۵}$ یا ۲۰٪ کاهش آب یعنی میزان آب باقی‌مانده در ظرف هر روز نسبت به روز قبل $\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}-۱$ برابر، (یا $۰/۸=\frac{۲۰}{۱۰۰}-۱$) شده است یعنی قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $\frac{۴}{۵}$ است.

دقت کنید در این سؤال نیز مانند سؤال قبل پس از پایان روز اول یعنی جمله اول میزان آب ظرف $a\times\frac{۴}{۵}$ و در پایان روز پنجم $a\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^۵$ است!!

$$\text{میزان آب باقیمانده پس از ۵ روز}=\underset{\text{اولیه}}{a}\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^۵=a\times\frac{۲^{۱۰}}{۵^۵}=\frac{۱۰۲۴}{۳۱۲۵}a\simeq\frac{۱}{۳}a$$

یعنی میزان آب باقی‌مانده در ظرف پس از ۵ روز حدود $\frac{۱}{۳}$ میزان آب اولیهٔ موجود در ظرف است.

۸۶ ۳

$$\frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{زوج}}}=\frac{S_{\text{فرد}}+S_{\text{زوج}}}{S_{\text{زوج}}}=۱+\frac{S_{\text{فرد}}}{S_{\text{زوج}}}=۱+\frac{۱}{r}=۱+\frac{۱}{۵}=\frac{۶}{۵}$$

۸۷ ۳

$$\frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{فرد}}}=۳\Rightarrow ۱+r=۳\Rightarrow r=۲$$

ببینید این سؤال یک سؤال دشوار با درصد پاسخگویی پایین در کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۹۴ بوده است، چون این نکته را بلد نیستید ولی می‌بینید که اگر نکتهٔ مربوطه را بلد باشید سؤال خیلی ساده است و در کمتر از چند ثانیه حل می‌شود.

۸۸ ۱

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_۱r^{n-۱}}{b_۱r^{n-۱}}\xrightarrow{a_۱=۲b_۱}\frac{a_n}{b_n}=\frac{۲b_۱r^{n-۱}}{b_۱r^{n-۱}}=۲$$

مشخص است که اگر با قدرنسبت ثابت جمله اول دو برابر شود، جمله عمومی نیز ۲ برابر می‌شود.

۸۹ ۳

بر اساس نکته ۵ درسنامه، نیاز به حفظ کردن فرمول خاصی نیست می‌دانیم که:

$$a_۷=ar^۶\xrightarrow{\text{قدرنسبت جدید}=۲r}\text{جدید}\ a_۷=a\times(۲r)^۶=۶۴\underbrace{ar^{n-۱}}=۶۴\underbrace{a_۷}$$

این سؤال را نیز میتوان به صورت ذهنی (هوایی!!) حل کرده فقط یادتان باشد $a_۷=ar^۶$

۹۰ ۴

طبق نکته (۱) و (۲) درسنامه، فقط گزینهٔ (۴) درست است. چون $۱,۲,۴,\dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $r=۲$ یعنی همان قدرنسبت دنباله $a_۱,a_۲,a_۳,\dots$ است.

۹۱ ۳

طبق نتیجه نکته ۶ درسنامه، گزینه (۳) درست است.

۹۲ ۴

چون گزینه ۲^m است پس ابتدا $۰/۱۲۵,۰/۲۵$ را به صورت توانی از ۲ می‌نویسیم:

$$۰/۱۲۵=\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^۳}$$

$$-۰/۲۵=\frac{-۲۵}{۱۰۰}=\frac{-۱}{۴}=\frac{-۱}{۲^۲}$$

$$\text{قدرنسبت دنباله}\ r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{\frac{-۱}{۴}}{\frac{۱}{۸}}=-۲\xrightarrow{\text{پس}}r=-۲,a=\frac{۱}{۸}$$

$$\text{حاصل ضرب ۱۴ جملهٔ اول}=a_۱.a_۲\dots a_{۱۴}=a.ar.ar^۲\dots ar^{۱۳}=a^{۱۴}r^{۱+۲+\dots+۱۳}$$

می‌دانیم $۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+1)}{۲}$ پس $۱+۲+\dots+۱۳=\frac{۱۳\times۱۴}{۲}=۹۱$ در نتیجه داریم:

$$\text{حاصل ضرب ۱۴ جملهٔ اول}=a^{۱۴}r^{۹۱}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{۱۴}\times(-۲)^{۹۱}=\left(\frac{۱}{۲^۳}\right)^{۱۴}\times(-۲)^{۹۱}=\frac{-۲^{۹۱}}{۲^{۴۲}}=-۲^{۴۹}$$

۹۳ **۲**

اولاً حاصل ضرب ۵ جملهٔ متوالی برابر جملهٔ وسط آن به توان ۵ است و ثانیاً دنبالهٔ هندسی غیر کاهشی یعنی قدرنسبت منفی $(r<0)$. (درسنامه ۱۸)

$$\text{حاصل ضرب پنج جملهٔ دوم} = a_6.a_7.a_8.a_9.a_{10} = (a_8)^5 = 243 \Rightarrow a_8 = 3$$

اگر مایل باشید روش تشریحی رابطهٔ بالا را بنویسیم و سپس سراغ ادامهٔ حل مسئله برویم:

$$a_6.a_7.a_8.a_9.a_{10} = ar^5 \times ar^6 \times ar^7 \times ar^8 \times ar^9 = a^5r^{35} = \left(ar^7\right)^5 = (a_8)^5$$

خب حالا $a_8 = 3$ را به‌دست آوردیم و $a_4 = 48$ را خود سؤال داده و a_{15} را خواسته است، طبق نکات درسنامهٔ (۱۹) خواهیم داشت:

$$\frac{a_8}{a_4} = r^{8-4} = r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{3}{48} = \frac{1}{16} \xrightarrow{\text{خاصیت ریشه زوج } \pm} r = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow[r<0]{\text{غیر کاهشی}} r = \frac{-1}{2}$$

من گفتم غیرکاهشی در اینجا یعنی نوسانی $\pm$ و $r<0$!! اگر شما میگین غیرکاهشی یعنی افزایشی! خب به این دقت نکردین که $a_4 = 48$ و $a_8 = 3$ که نمیتونه افزایشی باشه!! پس حالا که کاهشی هم نیست حتماً یکی در میان + و − بوده است که البته a_4, a_8 هر دو مثبت بوده‌اند.

مقدار جملهٔ پانزدهم را می‌خواهیم، امیدوارم نگید $a_{15} = a_1r^{14}$، چون a_1 را نداریم و اگر بخواهیم از a_4 یا a_8 آن را به‌دست آوریم وقت تلف کردن است، چون می‌توانیم از رابطهٔ $a_n = a_mr^{n-m}$ استفاده کنیم یعنی $a_{15} = a_4r^{11}$ یا $a_{15} = a_8r^7$!

$$a_{15} = a_8r^7 \xrightarrow[r=-\frac{1}{2}]{a_8=3} a_{15} = 3\times\left(\frac{-1}{2}\right)^7 = \frac{-3}{128}$$

۹۴ **۲**

چون در مورد ضرب سه جملهٔ متوالی هندسی هم صحبت شده است پس آن‌ها را به صورت $\frac{x}{r}, x, xr$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حاصل ضرب سه جملهٔ متوالی} = \frac{x}{r}\times x\times xr \xrightarrow{\text{وسطی به توان تعداد}} x^3 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \\ \text{مجموع سه جملهٔ متوالی} = \frac{x}{r}+x+xr \xrightarrow{\text{فاکتور}} x\left(\frac{1}{r}+1+r\right) = 6\times\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6r^2+6r+6 = 19r \Rightarrow 6r^2-13r+6 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲}} \Delta = 169-144 = 25 \Rightarrow r = \frac{13\pm5}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{افزایشی}} \frac{x}{r}, x, xr \xrightarrow[r=\frac{3}{2}]{x=6} 4,6,9 \\ \text{یا} \\ r = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{کاهشی}} 9,6,4 \end{cases}$$

در هر دو حالت تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله برابر $9-4=5$ است.

۹۵ **۱**

$$\begin{cases} \text{حاصل ضرب ۹ جملهٔ اول} = (a_5)^9 = 8 \Rightarrow a_5 = 8^{\frac{1}{9}} \\ a_2\cdot a_4\cdot a_6\cdot a_8 = \underbrace{(a_5)^4}_{\text{وسطی}} = \left(8^{\frac{1}{9}}\right)^4 = \left(2^3\right)^{\frac{4}{9}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

۹۶ **۲**

می‌دانیم وقتی a, b, c سه جمله متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند که $b^2 = ac$ باشد. پس:

$$a, \sqrt{5}+1, 4, \ldots \Rightarrow 4a = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 \Rightarrow a = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4}$$

حال واسطهٔ هندسی بین دو عدد $a, 1$ برابر است با $\sqrt{a\times1}$ یعنی:

$$\text{واسطه هندسی} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

۹۷ ۳

اگر فرض کنیم که میخواهیم مقدار x را به اعداد $-1,1,15$ اضافه کنیم، داریم:

$$x-1, x+1, x+15 \xrightarrow[b^2=ac]{\text{شرط دنبالهٔ هندسی}} \underbrace{(x+1)^2}_{\text{اتحاد مربع}} = \underbrace{(x-1)(x+15)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow \cancel{x^2}+2x+1=\cancel{x^2}+14x-15$$

$$\Rightarrow 12x=16 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{4}{3}-1, \frac{4}{3}+1, \frac{4}{3}+15 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{7}{3}}_{\times 7}, \underbrace{\frac{7}{3}, \frac{49}{3}}_{\times 7} \Rightarrow r=\frac{a_2}{a_1}=7$$

۹۸ ۴

در این سؤال اگر احیاناً شما از رابطهٔ $(2p+1)^2 = p\times 3p$ استفاده کرده باشید، باید برای محاسبه p و سپس r به سختی محاسبات، برخورده باشید!!! اما اصلاً نیازی به این کار نبوده است چون:

$$\underbrace{\underbrace{p, 2p+1}_{\times r}, \underbrace{2p+1, 3p}_{\times r}}_{\times r^2} \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{3p}{p}=r^2 \Rightarrow r^2=3 \Rightarrow r=\pm\sqrt{3} \xrightarrow[r>0]{\text{افزایشی}} r=+\sqrt{3}$$

۹۹ ۲

روش اول: می‌توان بین $2, z, \frac{1}{2}$ رابطهٔ $z^2 = 2\times\frac{1}{2}=1$ را نوشت و از آنجا $z=\pm 1$ را به‌دست آورد، چون دنباله غیرکاهشی است، پس $z=-1$ درست است.

$x, y, 2, -1, \frac{1}{2}, \dots$ پس قدرنسبت دنباله $r=-\frac{1}{2}$ است و $y=-4$ کوچک‌ترین جمله و $x=8$ بزرگ‌ترین جملهٔ این دنباله هستند و اختلاف آن‌ها ۱۲ است.

روش دوم: می‌توانیم قدرنسبت دنباله را به طور مستقیم به‌دست آوریم کافی است از این زاویه به دنباله $x, y, 2, z, \frac{1}{2}, \dots$ نگاه کنیم که ۲ جمله سوم و $\frac{1}{2}$ جمله پنجم است پس:

$$\frac{a_5}{a_3}=r^2 \Rightarrow r^2=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow r=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow[r<0]{\text{غیر کاهشی}} r=\frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} z=2\times r=2\times\frac{-1}{2}=-1 \\ y=2\div r=2\times -2=-4 \\ x=y\div r=-4\times -2=+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{دنباله}: 8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

جملات از لحاظ اندازه در حال کوچک شدن هستند پس $\min=-4, \max=8$ است. و اختلاف آن‌ها برابر $\max-\min=8-(-4)=12$ است.

۱۰۰ ۳

وقتی بین $\frac{1}{4}, 8$ چهار واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم یعنی $a_1 = -$ $=$ a_6 است. پس: $\frac{a_6}{a_1}=r^{6-1}=r^5 \Rightarrow r^5=\frac{8}{\frac{1}{4}}=32 \Rightarrow r=2$

دقت کنید $\frac{1}{4}$ را جملهٔ اول و ۸ را جملهٔ ششم (آخر) گرفتیم چون سؤال گفته دنبالهٔ هندسی افزایشی!!! وگرنه ۸ جمله اول و $\frac{1}{4}$ آخر بود. مطلب دیگری که نیاز به دقت دارد این است که خواسته نهایی سؤال دومین واسطه است. یعنی جملهٔ سوم دنباله:

$$\text{دومین واسطه} = a_3 = ar^2 = \frac{1}{4}\times 2^2 = 1$$

$$\text{دنباله مورد بحث}: \frac{1}{4}, \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}, 1}^{\times 2}, \overbrace{1, 2}^{\times 2}, 4}_{\text{۴ واسطهٔ هندسی}}, 8$$

۱۰۱ ۲

جملهٔ اول ۲۵۶ و جملهٔ آخر $\sqrt{2}$ و قدرنسبت $r=\frac{\sqrt{2}}{4}$ را از این دنباله کاهشی داریم. کافی است جملهٔ عمومی را برابر جملهٔ آخر $(\sqrt{2})$ قرار دهیم تا تعداد کل جملات (شمارهٔ جمله آخر یا n) مشخص شود و می‌دانیم که تعداد واسطه‌ها، ۲ واحد کمتر از تعداد جملات است:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 256\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^8\times\left(2^{\frac{-3}{2}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$۲^{۸}\times ۲^{\frac{-۳(n-۱)}{۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow ۲^{\frac{-۳(n-۱)}{۲}}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۸}}=۲^{\frac{۱}{۲}-۸}=۲^{\frac{-۱۵}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{-۳}{۲}(n-۱)=-\frac{۱۵}{۲}\xrightarrow{\text{ساده}} n-۱=۵\Rightarrow n=۶\Rightarrow \text{تعداد واسطه‌ها } k=۶-۲=۴$$

روش دوم: همانطور که برای k واسطه حسابی فرمول‌های $d=\frac{b-a}{k+۱}$ ، $k=\frac{b-a}{d}-۱$ وجود داشت، برای k واسطه هندسی بین b, a هم می‌توان فرمول $r^{k+۱}=\frac{b}{a}$ را اثبات کرد. *(ویژه علاقه‌مندان به فرمول بازی!!!)*

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{k+۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲۵۶}\Rightarrow\left(۲^{\frac{-۳}{۲}}\right)^{k+۱}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۸}}\Rightarrow ۲^{\frac{-۳}{۲}(k+۱)}=۲^{\frac{-۱۵}{۲}}\Rightarrow\frac{-۳}{۲}(k+۱)=\frac{-۱۵}{۲}\Rightarrow k+۱=\frac{-۱۵}{۲}\times\frac{-۲}{۳}=۵\Rightarrow k=۴$$

۱۰۲ ۲

ابتدا یک یادآوری از روابط بین ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوم داشته باشیم:

نکته اگر β, α ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ باشند، آنگاه:

$s=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ حاصل جمع ریشه‌ها ، $p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ حاصل ضرب ریشه‌ها

با فرض اینکه β, α ریشه‌های معادله باشند:

$$\text{حل سؤال}\Rightarrow\begin{cases}\text{واسطهٔ حسابی}=\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{s}{۲}=\frac{\frac{-b}{a}}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳\Rightarrow (x=-\frac{b}{۲a}\ \text{طول راس})\ \text{همان محور تقارن سهمی!!!}\\ \text{واسطهٔ هندسی}=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{p}=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{۴}=۲\end{cases}$$

پس واسطهٔ هندسی ریشه‌ها ۲ و واسطهٔ حسابی ریشه‌ها ۳- است که اختلاف آن‌ها ۵ واحد است.

۱۰۳ ۲

$$\frac{۱}{b+c},\frac{۱}{۲b},\frac{۱}{a+b}\xrightarrow{\text{شرط حسابی بودن}}۲\times\frac{۱}{۲b}=\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{a+b}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{۱}{b}=\frac{a+۲b+c}{b^{۲}+ab+ac+bc}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}b^{۲}+\cancel{ab}+ac+\cancel{bc}=\cancel{ab}+۲b^{۲}+\cancel{bc}\Rightarrow b^{۲}=ac\Rightarrow a, b, c\ \text{هندسی‌اند}$$

۱۰۴ ۴

طبق نکته (۱) درسنامه اگر x, y, z دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشند، k^{x}, k^{y}, k^{z} دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت k^{d} هستند. حال که x, y, z، دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ هستند پس:

گزینه (۳): $۲^{x}, ۲^{y}, ۲^{z}$، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۸ $=۲^۳$ است. پس این گزینه نادرست است.

گزینه (۴): $\frac{۱}{۲^{x}},\frac{۱}{۲^{y}},\frac{۱}{۲^{z}}$ در واقع همان $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x},\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y},\left(\frac{۱}{۲}\right)^{z}$ است که هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$ است و این گزینه درست می‌باشد.

$$\text{اثبات}: \left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{z}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲y}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+y}\Rightarrow ۲y=x+z\Rightarrow r=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y}}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y-x}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{d}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$$

توجه کنید که وقتی x, y, z حسابی‌اند، دنباله‌های گزینهٔ (۱) و (۲) اصلاً هندسی نیستند! حسابی هم نیستند!

۱۰۵ ۲

طبق نکتهٔ (۲) درسنامه در این سؤال a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r = k^d = ۸$ می‌دهند. و اما در اینجا به صورت تشریحی این سؤال را بررسی می‌کنیم:

$$\text{Log}_۲^a , \text{Log}_۲^b , \text{Log}_۲^c \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲\text{Log}_۲^b = \text{Log}_۲^a + \text{Log}_۲^c \Rightarrow \text{Log}_۲^{b^۲} = \text{Log}_۲^{ac} \Rightarrow b^۲ = ac$$

$$d = \text{Log}_۲^b - \text{Log}_۲^a = \text{Log}_۲^{\frac{b}{a}} = ۳ \Rightarrow \frac{b}{a} = ۲^۳ = ۸ \Rightarrow r_{\text{هندسی}} = \frac{b}{a} = ۸$$

۱۰۶ ۴

دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است، یعنی همهٔ جملات آن برابرند پس باید:

$$\begin{cases} a+b = ۳b+۱ \\ ۳b+۱ = ۲a-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-۲b = ۱ \\ ۳b-۲a = -۳ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} \cancel{۲a} - ۴b = ۲ \\ ۳b - \cancel{۲a} = -۳ \end{cases} \Rightarrow -b = -۱ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

حال $a = ۳, b = ۱$ را در دنباله جایگذاری می‌کنیم: $۴, ۴, ۴, \ldots$ یعنی همه جملات ۴ هستند پس مجموع ۱۰ جمله اول برابر $۱۰ \times ۴ = ۴۰$ است و گزینهٔ (۴) درست است.

۱۰۷ ۳

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی داده شده $r = \frac{a}{b}$ است پس باید معادله‌ای بر حسب $\frac{a}{b}$ درست کنیم یعنی c را حذف کنیم.

$$\begin{cases} a, b, c \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲b = a+c \Rightarrow c = ۲b-a \\ b, a, c \xrightarrow{\text{هندسی}} a^۲ = bc \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b \times (۲b-a) \Rightarrow a^۲ = ۲b^۲ - ab \xrightarrow{\div b^۲} \frac{a^۲}{b^۲} = ۲ - \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = r \Rightarrow r^۲ = ۲ - r \Rightarrow r^۲ + r - ۲ = ۰ \Rightarrow (r-۱)(r+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r = ۱ \xrightarrow{\text{دنباله ثابت}} \text{غیر قابل قبول} \\ \text{یا} \\ r = -۲ \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۰۸ ۳

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b $\left(\frac{a+b}{۲}\right)$، دو برابر واسطهٔ هندسی آن‌ها $\left(\sqrt{ab}\right)$ است:

$$\frac{a+b}{۲} = ۲\sqrt{ab} \Rightarrow a+b = ۴\sqrt{ab} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲ + ۲ab + b^۲ = ۱۶ab \Rightarrow a^۲ - ۱۴ab + b^۲ = ۰$$

چون نسبت $\frac{a}{b}$ را می‌خواهیم پس باید دو طرف رابطهٔ $a^۲ - ۱۴ab + b^۲ = ۰$ را بر $b^۲$ تقسیم کنیم:

$$\frac{a^۲}{b^۲} - ۱۴\frac{a}{b} + ۱ = ۰ \xrightarrow{\frac{a}{b} = x} x^۲ - ۱۴x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{روش } \Delta} x = \frac{۱۴ \pm \sqrt{۱۹۲}}{۲} = \frac{۱۴ \pm \sqrt{۶۴ \times ۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۴ \pm ۸\sqrt{۳}}{۲} = ۷ \pm ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۷ \pm ۴\sqrt{۳}$$

اگر $a > b$ باشد کسر $\frac{a}{b}$ از یک بزرگ‌تر است و $\frac{a}{b} = ۷ + ۴\sqrt{۳}$ اما اگر $a < b$ باشد و کسر $\frac{a}{b}$ از یک کوچکتر بوده $\frac{a}{b} = ۷ - ۴\sqrt{۳}$. در اینجا $a > b$ و $\frac{a}{b} = ۷ + ۴\sqrt{۳}$.

۱۰۹ ۳

طبق نکتهٔ درسنامه به روش تستی داریم:

$$r = \frac{۱۲-۵}{۵-۲} = \frac{۷}{۳}$$

۱۱۰ **۳**

روش اول: طبق نکتهٔ تستی گفته شده در درسنامه $r=\frac{۹-۷}{۷-۳}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ است، اما خواستهٔ سؤال چیز دیگری است! گفته جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی صفر است؟

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی یعنی یک جمله تقسیم بر جملهٔ قبلی در اینجا جملات سوم و هفتم و دنبالهٔ حسابی، دو جمله متوالی، دنبالهٔ هندسی هستند پس:

$$r=\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a+۶d}{a+۲d}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲a+۱۲d=a+۲d\Rightarrow a+۱۰d=۰\Rightarrow a_{۱۱}=۰$$

یعنی جملهٔ یازدهم حسابی صفر است در واقع $a=-۱۰d$ رابطه‌ای است که ممکن است از آن سؤالات دیگری نیز طرح شود.

روش دوم: می‌توانیم رابطه‌ای بر حسب d, a به‌دست آوریم:

$$a_۳,a_۷,a_۹\xrightarrow{\text{حسابی}}a+۲d,a+۶d,a+۸d\xrightarrow[b^۲=ac]{\text{هندسی}}(a+۶d)^۲=(a+۲d)(a+۸d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a^۲}+۱۲ad+۳۶d^۲=\cancel{a^۲}+۱۰ad+۱۶d^۲\xrightarrow{\text{ساده}}۲ad+۲۰d^۲=۰\Rightarrow ۲d(a+۱۰d)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=۰\Rightarrow \text{دنباله ثابت می شود و غیرقابل قبول است}\\ a+۱۰d=۰\Rightarrow a_{۱۱}=۰\end{cases}$$

۱۱۱ **۲**

در واقع جملات پنجم، سوم و هفتم دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، پس قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با: $r=\frac{۷-۳}{۳-۵}=\frac{۴}{-۲}=-۲$

خب الان قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $r=-۲$ معلوم شد، جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی $a_۴=\frac{۱}{۸}$ داده شده و جملهٔ پانزدهم مجهول است، پس:

$$a_{۱۵}=a_۴r^{۱۵-۴}=a_۴\times r^{۱۱}=\frac{۱}{۸}\times(-۲)^{۱۱}=\frac{۱}{۲^۳}\times -۲^{۱۱}=-۲^۸=-۲۵۶$$

۱۱۲ **۴**

واسه اینه که میگم فقط به یک فرمول تستی دل خوش نکن!!! و روش اصلی رو هم یاد بگیر. توجه کنید که خواستهٔ سؤال $\frac{a_۸}{a_۲}=r^۶$ است.

$$a_۲,۲a_۵,a_۸\xrightarrow{\text{هندسی}}ar,۲ar^۴,ar^۷\xrightarrow[۲b=a+c]{\text{متوالی حسابی}}۲\left(۲ar^۴\right)=ar+ar^۷$$

$$\Rightarrow ۴ar^۴=ar\left(۱+r^۶\right)\longrightarrow ۴r^۳=۱+r^۶\Rightarrow r^۶-۴r^۳+۱=۰$$

یک معادلهٔ درجه ششم که با تغییر متغیر $t=r^۳$ به درجهٔ دوم روبرو تبدیل می‌شود: $t^۲-۴t+۱=۰\Rightarrow \Delta=۱۶-۴=۱۲\Rightarrow t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$

یادتان هست که در این سؤال $t=r^۳$ بود پس $r^۳=۲\pm\sqrt{۳}$ است و اصلاً نیازی هم نیست از آن مقدار r را به‌دست آوریم، با فرض افزایشی بودن دنباله، یعنی $r>۱$ $(r=۲+\sqrt{۳})$ مقدار $\frac{a_۸}{a_۲}=r^۶$ است، پس:

$$\frac{a_۸}{a_۲}=r^۶=\left(r^۳\right)^۲=\left(۲+\sqrt{۳}\right)^۲=۴+۴\sqrt{۳}+۳=۷+۴\sqrt{۳}$$

دقت کنید برای حالت $r^۳=۲-\sqrt{۳}$، $۰<r<۱$ و دنباله کاهشی است پس $a_۲>a_۸$ و بزرگ‌ترین جمله $a_۲$ و کوچک‌ترین جمله $a_۸$ است، یعنی:

می‌بینید که باز هم جواب مسئله همان $۷+۴\sqrt{۳}$ خواهد بود! $\frac{\max}{\min}=\frac{a_۲}{a_۸}=r^{-۶}=\frac{۱}{r^۶}=\frac{۱}{(r^۳)^۲}=\left(\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\right)^۲=\left(۲+\sqrt{۳}\right)^۲=۷+۴\sqrt{۳}$

آفرین سؤال این فصل، عجب سؤالی بود!!!

حق داری اگه نتونسته باشی درست حلش کنی، ناامید نباش این واسه اونایی بوده که فقط ۱۰۰٪ می‌خواستن! امیدوارم تست‌های مهم رو مارک‌دار کرده باشی و در اولین مرور آن‌ها رو مجدداً حل کنی و در مرورهای بعدی هم علاوه بر آزمون‌های جامع باز مارک‌دارها را مجدداً چندین مرتبه تمرین کنی تا به تسلط کافی در آن‌ها برسی.

پاسخنامهٔ آزمون جامع ۱ (تخته شیرجه)

۱ ۲

روش اول: الگوی خطی به صورت $t_n = an+b$ است. در این سؤال $t_۱۰ = ۴۱, t_۴ = ۱۷$ است، پس:

$$\begin{cases} n=۴ \Rightarrow ۴a+b=۱۷ \\ n=۱۰ \Rightarrow ۱۰a+b=۴۱ \end{cases} \Rightarrow ۶a=۲۴ \Rightarrow a=۴, b=۱ \Rightarrow t_n = ۴n+۱$$

پس جملهٔ nام (جمله عمومی) به صورت $t_n = ۴n+۱$ است. جملهٔ چندم برابر ۷۷ است، یعنی $t_n = ۷۷$ داده شده و n شمارهٔ جملهٔ مجهول است:

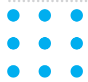
$$t_n = ۴n+۱ = ۷۷ \Rightarrow ۴n = ۷۶ \Rightarrow n = ۱۹ \Rightarrow t_{۱۹} = ۷۷$$

روش دوم: نکات تستی برگرفته از دنبالهٔ حسابی (الگوی خطی):

$$\text{قدر نسبت دنباله } d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{۴۱-۱۷}{۱۰-۴} = \frac{۲۴}{۶} = \underbrace{۴ \xrightarrow{t_۴=۱۷} t_n}_{d \text{ ضریب } n} = ۴n+۱ \xrightarrow{t_n=۷۷} n = ۱۹$$

۲ ۳

سریع‌ترین روش: در شکل nام، یک مربع کامل شامل $n^۲$ نقطه در وسط هر شکل است:



شکل ۳

به تعداد ۴ تا n نقطه در ۴ ضلع مربع قرار گرفته است: $۴n$ نقطه

$$\text{تعداد کل مربع‌ها در شکل } n\text{ام } t_n = n^۲ + ۴n \Rightarrow t_۷ = ۴۹ + ۲۸ = ۷۷$$

دقت کنید روش‌های دیگری نیز برای حل این سؤال وجود دارد از جمله نوشتن دنبالهٔ اعداد $\{۵,۱۲,۲۱,...\}$ و پیدا کردن دنبالهٔ درجه دوم مربوط به آن!!!

۳ ۲

$$\begin{cases} t_۱ = ۱ \\ t_۲ = ۱+۲ = ۳ \\ t_۳ = ۱+۲+۳ = ۵ \\ \vdots \\ t_n = ۱+۲+۳+...+n = \dfrac{\overset{\text{تعداد}}{n}\ \overset{\text{آخری}}{(n}+\overset{\text{اولی}}{۱)}}{۲} = ۱۰۵ \Rightarrow \underbrace{n(n+۱)}_{۱۴\times۱۵} = ۲۱۰ \Rightarrow n = ۱۴ \end{cases}$$

اینجوری هم میشه که فدای ناکرده سر جلسه آنقدر بیکار باشی که دنباله را بنویسی و ادامه بدی تا به ۱۰۵ برسی:

$$\{۱ \underbrace{,}_{+۲} ۳ \underbrace{,}_{+۳} ۶ \underbrace{,}_{+۴} ۱۰ \underbrace{,}_{+۵} ۱۵ ,...\}$$

به دنبالهٔ مربوط به این سؤال دنبالهٔ مثلثی با شروع از ۱ گفته می‌شود که درجه دوم بوده و جمله عمومی آن به صورت $t_n = ۱+۲+۳+...+n$ یا $t_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ یا همان $t_n = \frac{۱}{۲}(n^۲+n)$ است، دقت کنید اگر شروع از صفر باشد $a_n = \frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

۴ ۱

$$\text{(۱) شکل}: t_۱ = ۱^۲ + ۰ \qquad \text{(۲) شکل}: t_۲ = ۲^۲ + ۲\times۱ \qquad \text{(۳) شکل}: t_۳ = ۳^۲ + ۲\times۳ \qquad \text{(۴) شکل}: t_۴ = ۴^۲ + ۲\times۶$$

روش اول: الگوی نشان داده شده شامل یک الگوی مربعی با شروع از ۱ یعنی $n^۲$ و دوتا الگوی مثلثی با شروع از صفر است یعنی $۲\times\frac{n(n-۱)}{۲}$ پس:

$$t_n = n^۲ + ۲\times\frac{n(n-۱)}{۲} = ۲n^۲ - n$$

روش دوم: دنبالهٔ اعداد تعداد نقاط را بنویسیم:

$$\{۱ \underbrace{,}_{+۵} ۶ \underbrace{,}_{+۹} ۱۵ \underbrace{,}_{+۱۳} ...\}$$

دنبالهٔ داده شده درجه دوم است، چون دنبالهٔ تفاضلات آن خطی (حسابی) با قدرنسبت ۴ است پس نصف آن یعنی ۲، ضریب $n^۲$ است: $۲n^۲$

$$\{\underset{(۲\times۱-۱)}{۱}, \underset{(۲\times۴-۲)}{۶}, \underset{(۲\times۹-۳)}{۱۵}, ...\} \Rightarrow \text{با توجه به الگوی نشان داده شده } t_n = ۲n^۲ - n \Rightarrow t_{۱۰} = ۱۹۰$$

۵ ۲

کمی دقت کنید، در الگوهای دورنگی هر شکل تعداد کاشی‌های سفید برابر همان شکل است و تعداد کاشی‌های تیره دنبالهٔ خطی $\{۶,۸,...\}$ را تشکیل می‌دهند، یعنی $t_n=۲n+۴$ تعداد کاشی‌های تیره وقتی ۱۰۰ کاشی سفید داریم، یعنی شکل ۱۰۰ام که به تعداد $t_{۱۰۰}=۲۰۴$ کاشی تیره دارد.

۶ ۳

به نظر می‌رسد اگر روی آخرین جملهٔ هر دسته تمرکز کنیم بهتره!!! جمله آخر دسته سوم برابر $۶=۳+۲+۱$ است و جملهٔ آخر دستهٔ چهارم برابر $۱۰=۴+۳+۲+۱$ است. یعنی جمله آخر دسته nام برابر است با: $۱+۲+۳+۴+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

پس جمله آخر دسته بیست و نهم برابر است با: $\frac{۲۹\times۳۰}{۲}=۴۳۵$ و جملهٔ اول دسته سی‌ام ۴۳۵ است.

۷ ۴

دنبالهٔ داده شده نه حسابی است و نه هندسی، بلکه یک دنبالهٔ غیر خطی درجه دوم است، چون دنبالهٔ تفاضلات (اختلافات) آن خطی با قدرنسبت ۲ است پس نصف آن یعنی ۱ ضریب $n^۲$ می‌باشد:

$$\{\underbrace{۵,۸}_{+۳},\underbrace{۱۳}_{+۵},\underbrace{۲۰}_{+۷},\underbrace{۲۹}_{+۹},...\}\quad (+۲,+۲,+۲)\xrightarrow{۱n^۲+?}\{\underset{۱+۴}{۵},\underset{۴+۴}{۸},\underset{۹+۴}{۱۳},۲۰,...\}\Rightarrow t_n=n^۲+۴\Rightarrow t_{۲۰}=۴۰۴$$

۸ ۳

یه جورایی این سؤال واقعاً دشوارترین سؤال این بخش از کتاب درسی ریاضی دهم به شمار می‌رود، که اگه نتونستی حلش کنی اصلاً ناامید نشو ولی خوب یاد بگیرش!

و اما حلش: دنبالهٔ داده شده مانند سؤال قبل، نه حسابی است و نه هندسی، بلکه غیر خطی درجه دوم است. چون دنبالهٔ تفاضلات آن خطی با قدرنسبت ۳ است پس ضریب $n^۲$ برابر $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$\{\underbrace{۵,۱۲}_{+۷},\underbrace{۲۲}_{+۱۰},\underbrace{۳۵}_{+۱۳},...\}\Rightarrow\{\underset{\frac{۳}{۲}\times۱+\frac{۷}{۲}}{۵},\underset{\frac{۳}{۲}\times۴+۶}{۱۲},\underset{\frac{۳}{۲}\times۹+\frac{۱۷}{۲}}{۲۲},۳۵,...\}\Rightarrow t_n=\frac{۳}{۲}n^۲+(\frac{۵}{۲}n+۱)$$

دقت کنید دنبالهٔ درجه دوم $t_n=an^۲+bn+c$ از یک بخش $an^۲$ تشکیل شده است، که a نصف قدرنسبت دنبالهٔ تفاضلات آن است و یک بخش درجه ۱ که b قدرنسبت آن بخش درجه ۱ است. در اینجا دنبالهٔ درجه ۱ $\left\{\frac{۷}{۲},۶,\frac{۱۷}{۲},...\right\}$ دارای قدرنسبت $d=۵.۵$ به جمله عمومی $\frac{۵}{۲}n+۱$ است.

به هر حال جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه ۲ موردنظر به صورت $t_n=\frac{۳}{۲}n^۲+\frac{۵}{۲}n+۱$ یا $t_n=\frac{۱}{۲}\left(۳n^۲+۵n+۲\right)$ است که جملهٔ بیستم آن برابر است با:

$t_{۲۰}=۶۰۰+۵۰+۱=۶۵۱$

۹ ۲

فرمول ویژه واسطه‌ها این جور چیزا را بندازیم دور، اصلاً نیازی نیست فقط ببینید اینو:

$$\underset{a_۱}{۱۸},\underbrace{?,?}_{+d},\underbrace{?}_{+d},\underset{a_۵}{۶۲}\Rightarrow ۱۸+۴d=۶۲\Rightarrow d=۱۱$$

حال با جایگذاری $d=۱۱$ (قدرنسبت) هر سه واسطه معلوم می‌شوند:

$$\underbrace{۱۸,۲۹}_{+۱۱},۴۰,۵۱,۶۲\Rightarrow \text{مجموع این ۵ عدد}=۲۰۰$$

روش دوم: مجموع چند جملهٔ متوالی (یا متقارن و متساوی‌الفاصله) از یک دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$S_n=\frac{\text{تعداد}\times(\text{جملهٔ آخر}+\text{جملهٔ اول})}{۲}$$

پس بدون پیدا کردن واسطه‌ها و قدرنسبت می‌توان گفت:

$$\text{مجموع ۵ جملهٔ حسابی}\ S_۵=\frac{۵\times(۱۸+۶۲)}{۲}=\frac{۵\times۸۰}{۲}=۵\times۴۰=۲۰۰$$

به عبارت دیگر مجموع آن‌ها برابر است با: (جمله وسط × تعداد) که در اینجا جملهٔ وسط یعنی، مجموع دو جملهٔ ابتدایی و انتهایی، تقسیم بر ۲ که همان ۴۰ می‌شود.

۱۰ **۲**

روش اول: استفاده از فرمول: می‌دانیم از فرمول $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ می‌توان گفت $n = \frac{a_n - a_۱}{d} + ۱$ و از طرفی تعداد واسطه‌ها همیشه ۲ تا از تعداد جملات کمتر است (ابتدایی و انتهایی حذف می‌شوند.) پس اگر از فرمول بالا ۲ واحد کم کنیم داریم:

$$\text{تعداد واسطه‌های دنبالهٔ حسابی} = \frac{a \quad\quad a}{\quad} - ۱ = \frac{۸۰ \quad ۲۰}{\quad} - ۱ = ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

روش دوم: روش معمولی و تشریحی است که بنویسیم: $\underbrace{۲۰ \,,\, ۲۵}_{+۵} , \underbrace{\,,\, ۳۰}_{+۵} , \ldots , ۸۰$ و تشخیص دهیم عدد ۸۰ جملهٔ چندم این دنباله حسابی است:

$$\text{جمله عمومی } a_n = a + (n-۱)d \text{ یا } \underbrace{a_n = ۵n + ۱۵}_{\text{سرعتی و ذهنی (قدرنسبت ضریب n)}} = ۸۰ \Rightarrow n = \frac{۸۰ - ۱۵}{۵} = ۱۳$$

پس تعداد کل جملات ۱۳ است و تعداد واسطه‌ها $۱۱ = ۲ - ۱۳$ می‌باشد.

من که روش اول رو می‌پسندم! شما چطور؟

۱۱ **۴**

اختلاف هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابت $+\frac{۱}{۵}$ است پس دنبالهٔ حسابی است.

پس جملهٔ بیست و یکم برابر است با:

$$a_{۲۱} = a + ۲۰d = \frac{۲}{۵} + ۲۰ \times \frac{۱}{۵} = \frac{۲۲}{۵}$$

به صورت ذهنی هم می‌توان گفت مخرج همه جملات ۵ است و صورت یک واحد بیشتر از شمارهٔ جمله است.

۱۲ **۳**

قدرنسبت دنباله $d = ۷ - ۱۰ = -۳$ است، پس:

روش اول: $n = \frac{a_n - a_۱}{d} + ۱ = \frac{-۴۷ - ۱۰}{-۳} + ۱ = ۲۰$

روش دوم: $a_n = -۳n + ۱۳ = -۴۷ \Rightarrow -۳n = -۶۰ \Rightarrow n = ۲۰$

۱۳ **۲**

روش اول: (روش تشریحی و وقت گیر): تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول و محاسبهٔ جملهٔ اول (a) و قدرنسبت (d) و سپس پیدا کردن $a_{۱۵} = a + ۱۴d$!!!

روش دوم: استفاده از دو فرمول $a_n = a_m + (n-m)d, d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$:

$$d = \frac{a_۷ - a_۳}{۷ - ۳} = \frac{۵۶ - ۲۰}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow a_{۱۵} = a_۷ + ۸d = ۵۶ + ۷۲ = ۱۲۸$$

۱۴ **۲**

روش اول: تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول با توجه به دو دسته اطلاعات داده شده:

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۳ \\ a_۴ + a_۵ + a_۶ = ۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + ۲d = ۳ \\ a + ۳d + a + ۴d + a + ۵d = ۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a + ۳d = ۳ \\ ۳a + ۱۲d = ۳۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div ۳} \begin{cases} a + d = ۱ \\ a + ۴d = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۳d = ۱۲ \Rightarrow d = ۴, a = -۳ \Rightarrow a_n = a + (n-۱)d \Rightarrow a_n = ۴n - ۷ = ۵۳ \Rightarrow ۴n = ۶۰ \Rightarrow n = ۱۵$$

روش دوم: با توجه به نکات درسنامه و بخش تست‌های آموزشی می‌دانیم مجموع چند جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی برابر حاصل ضرب تعداد جملات در جملهٔ وسط آن‌هاست، یعنی:

$$\begin{cases} \text{مجموع سه جملهٔ اول} = ۳a_۲ = ۳ \Rightarrow a_۲ = ۱ \\ \text{مجموع سه جملهٔ دوم} = ۳a_۵ = ۳۹ \Rightarrow a_۵ = ۱۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{مانند سوال ۱۳}} d = \frac{a_۵ - a_۲}{۵ - ۲} = \frac{۱۳ - ۱}{۳} = ۴$$

$$a_۲ = a_۱ + d = ۱ \xrightarrow{d = ۴} a_۱ = -۳ \Rightarrow n = \frac{a_n - a_۱}{d} + ۱ = \frac{۵۳ - (-۳)}{۴} + ۱$$

یا در روش دوم هم می‌توان با معلوم بودن $a_۱ = -۳, d = ۴$ جمله عمومی $a_n = ۴n - ۷$ را برابر ۵۳ قرار داد و $n = ۱۵$ را به‌دست آورد و مانند قسمت پایانی روش اول عمل کرد.

۱۵ ۳

با توجه به الگوی داده شده در سؤال، دنبالهٔ تعداد نقاط به صورت زیر یک دنبالهٔ حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۴ است:

$$۱,۵,۹,\ldots \Rightarrow a=۱, d=۴ \Rightarrow a_n=۴n-۳=۳۹۷ \Rightarrow n=\frac{۴۰۰}{۴}=۱۰۰$$

۱۶ ۳

$$\text{واسطه حسابی دو عدد}=\frac{\text{جمع دو عدد}}{۲}=\frac{۵+۱۱}{۲}=۸$$

دیگه چی بگم از سادگی این سؤال!!! تمرین کتاب بود گفتم با عرض پوزش بیاریمش که ناقص نباشه کتابمون!!

۱۷ ۲

این سؤال مهم رو به خوبی یاد بگیرید هر چند به گفتهٔ کتاب درسی این مسئله از پاپیروس رایند مربوط به ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد مسیح است، آخه اون زمان مگه دنبالهٔ حسابی هم وجود داشته؟؟؟ حالا به هر حال یاد بگیرین که شاید در کنکور شما بیاد ....

گاهی مثل این سؤال ساده‌تر است ۵ جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی را به صورت $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d$ نشان دهیم که مجموع آن‌ها $۵x$ می‌شود

یعنی پنج برابر جملهٔ وسط!!یعنی مرد وسطی ۲۰ نان دارد. $۵x=۱۰۰ \Rightarrow x=۲۰ \Rightarrow$

یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر برابر مجموع دو سهم کوچکتر است، به زبان ریاضی یعنی:

$$\frac{۱}{۳}(x+x+d+x+۲d)=x-۲d+x-d \xrightarrow{x=۲۰} \frac{۱}{۳}(۶۰+۳d)=۴۰-۳d \Rightarrow ۲۰+d=۴۰-۳d \Rightarrow ۴d=۲۰ \Rightarrow d=۵$$

با داشتن $d=۵, x=۲۰$ این دنباله مشخص می‌شود: $۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰$ بیشترین نان یعنی جملهٔ آخر دنباله که همان $x+۲d$ و برابر $۲۰+۱۰=۳۰$ است.

۱۸ ۲

$$\begin{cases} a_۱=۹ \\ r=\dfrac{a_۲}{a_۱}=\dfrac{۳}{۹}=\dfrac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow a_۷=a_۱r^۶=۹\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^۶=۳^۲\times\frac{۱}{۳^۶}=\frac{۱}{۳^۴}=\frac{۱}{۸۱}$$

۱۹ ۱

دنبالهٔ داده شده هندسی با جمله اول $a_۱=-۴$ و قدرنسبت ثابت $r=-\frac{۱}{۲}$ است مقدار جملهٔ n ام $\frac{-۱}{۱۰۲۴}$ داده شده و شمارهٔ جمله (n) را خواسته است:

$$a_n=a_۱r^{n-۱} \Rightarrow a_n=-۴\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{n-۱}=\frac{-۱}{۱۰۲۴}$$

$$\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{n-۱}=\frac{-۱}{۱۰۲۴}\times\frac{-۱}{۴}=+\frac{۱}{۲^{۱۰}}\times\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۱}{۲^{۱۲}}=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{n-۱} \Rightarrow n-۱=۱۲ \Rightarrow n=۱۳$$

دقت کنید در محاسبات نیومدیم ۱۰۲۴×۴ را محاسبه کنیم بلکه $۱۰۲۴=۲^{۱۰}$ و $۴=۲^۲$ را به صورت توانی نوشتیم، کلاً در اکثر مسائل دنبالهٔ هندسی که شمارهٔ جمله، مجهول مسئله است، این دیدگاه نوشتن توان را داشته باشید تا n راحت‌تر به‌دست بیاید.

۲۰ ۲

واسطه هندسی دو عدد میشه جذر حاصل ضرب آن‌ها یعنی:

$$\sqrt{۳\times۴۸}=\sqrt{۳\times۱۶\times۳}=\sqrt{۱۶\times۹}=۴\times۳=۱۲$$

حالا اینجا $\sqrt{۳\times۴۸}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$ ساده است اما اگر اعداد بزرگی باشد، سبک تجزیه بالا بهتر است!!

۲۱ ۳

دقت کنید وقتی تعداد واسطه‌ها معلوم و قدرنسبت را می‌خواهیم، کافی است دقت کنید که تعداد جملات دو تا از تعداد واسطه‌ها بیشتر است پس سه واسطه بین ۳ و ۴۸ به این معنی است که $a_۱ = ۳$ و $a_۵ = ۴۸$ است: $۳ , ? , ? , ? , ۴۸$

در دنباله هندسی: $\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n} \Rightarrow \frac{a_۵}{a_۱} = r^۴ = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶ \Rightarrow r = \pm ۲$

اگر $r = ۲$ باشد چون جملات مثبت نیز هستند دنباله صعودی (افزایشی) می‌شود، اما اگر $r = -۲$ باشد دنباله نوسانی (غیر صعودی و غیر نزولی) خواهد بود: $\underbrace{+۳, -۶}_{\times(-۲)}, +۱۲, -۲۴, +۴۸$ پس $r = -۲$ گزینهٔ (۳) درست است.

تذکر خیلی مهم دقت کنید اگر در سؤال جملهٔ وسط (سومین جمله) یا دومین واسطه مطلوب بود اصلاً نیازی به حل به روش بالا نداشتیم چون می‌دانیم: $(\text{جمله وسطی})^۲ =$ حاصل ضرب جملات ابتدا در انتهای دنبالهٔ هندسی

$\Rightarrow$ جملهٔ وسطی $= \sqrt{\text{حاصل ضرب ابتدا و انتها}} = \sqrt{۳\times۴۸} = \sqrt{۳\times۳\times۱۶} = ۳\times۴ = ۱۲$

۲۲ ۲

روش اول: در این سؤال برخلاف سؤال قبل قدرنسبت را داده و تعداد واسطه‌ها مجهول است بدون استفاده از فرمول ویژه‌ای برای تعداد واسطه‌ها، می‌توان تعداد کل جملات را محاسبه و ۲ تا از آن کم کرد:

$$\begin{cases} a_۱ = ۴ \\ r = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_۱ r^{n-۱} = ۴\times۳^{n-۱} = ۹۷۲ \Rightarrow ۳^{n-۱} = ۲۴۳ = ۳^۵ \Rightarrow n-۱ = ۵ \Rightarrow n = ۶$$

پس ۹۷۲ جملهٔ ششم دنباله است، یعنی دنباله ۶ جمله دارد به عبارت دیگر ۴ واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم.

روش دوم: $۳^{k+۱} = \frac{۹۷۲}{۴} = ۲۴۳ = ۳^۵ \Rightarrow k+۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴$ با قدرنسبت r بین b, a واسطهٔ هندسی $k \Rightarrow r^{k+۱} = \frac{b}{a}$ یا $r = \sqrt[k+۱]{\frac{b}{a}}$

پیشنهاد می‌کنم صرفاً به فرمول اکتفا نکنید و روش اصلی یعنی روش اول را خوب یاد بگیرید. فرمول اینجوری، ممکن است از مغزتان فرار کند!! یا یک جمع و تفریق آن را فراموش کنید! و ...

۲۳ ۲

میتونیم بگیم بعد از سؤال ۱۷ که در دنبالهٔ حسابی یک مسئله جالب و مهم بود، این سؤال در مورد دنباله هندسی مسئلهٔ جالبی است. سؤال نگفته هندسی ولی باید خودتان با توجه به تعریف دنبالهٔ هندسی اینو متوجه بشید که هر جمله در $r = \frac{۴}{۵}$ ضرب شده است.

$$\begin{cases} a_۱ = ۱۰۰۰\times\frac{۴}{۵} \\ a_۲ = a_۱\times\frac{۴}{۵} = ۱۰۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲ \\ \vdots \\ a_۵ = ۱۰۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^۵ = ۱۰۰۰\times\frac{۱۰۲۴}{۳۱۲۵} \sim ۱۰۰۰\times\frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{حدوداً } \frac{۱}{۳} \text{ می شود.} \end{cases}$$

۲۴ ۴

اولین چیزی که باید متوجه بشین اینه که دنبالهٔ داده شده یک دنبالهٔ حسابی است با قدرنسبت ثابت $d = ۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$!!

$$\underbrace{۲\sqrt{۵} , ۴\sqrt{۵}}_{+۲\sqrt{۵}} , \underbrace{\ , ۶\sqrt{۵}}_{+۲\sqrt{۵}} ,\dots \Rightarrow a_{۱۵} = a + ۱۴d = ۲\sqrt{۵} + ۱۴\times۲\sqrt{۵} = ۳۰\sqrt{۵}$$

$$a_{۲۰} - a_{۱۵} = (a_۱ + ۱۹d) - (a_۱ + ۱۴d) = ۵d = ۵\times۲\sqrt{۵} = ۱۰\sqrt{۵}$$

۲۵ **۴**

دنبالهٔ داده شده یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r=\frac{-۱}{۲}$ و $a_۱=۱$ است و می‌دانیم:

$$a_n=a_۱r^{n-۱}\Rightarrow a_{۱۰}=۱\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۱۰-۱}=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۹}=-\frac{۱}{۵۱۲}$$

به این سؤال هم میشه مانند سؤال قبل به دید یک الگو نگاه کرد، فارغ از حسابی یا هندسی بودن آن:

$$\frac{+۱}{۲^۰},\frac{-۱}{۲^۱},+\frac{۱}{۲^۲},\ldots\Rightarrow a_{۱۰}=-\frac{۱}{۲^۹}=-\frac{۱}{۵۱۲}$$

۲۶ **۲**

نکته تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است:

$$a,a,a,a,\ldots\Rightarrow\begin{cases}\text{حسابی با قدرنسبت } d=۰\\ \text{هندسی با قدرنسبت } r=۱\end{cases}$$

پس باید همهٔ جملات آن باهم برابر باشند، یعنی: $۳a=a-۲\Rightarrow a=-۱$

با این توضیحات و جایگذاری $a=-۱$، دنباله به صورت $-۳,b,-۳,-۳,\ldots$ است، پس $b=-۳$ و همهٔ جملات ۳- هستند یعنی جملهٔ دهم هم ۳- است.

۲۷ **۳**

نکته x درصد کاهش یا افزایش هر جمله نسبت به جملهٔ قبل یعنی دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $x=۱\pm\frac{x}{۱۰۰}$. این تمرین کتاب هم مانند تمرین کوه یخی یک دنبالهٔ هندسی است که باید دقت کنید در آن ٪۲۰ کاهش سالانه یعنی قیمت هر سال ٪۸۰ قیمت سال قبل است و دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ٪۸۰ یا همان $r=\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}$ می‌باشد.

اگر بگویید قیمت پس از n سال به صورت $a_n=a_۱r^{n-۱}=۵۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^{n-۱}$ است.

اشتباه کرده‌اید!!! چون پس از یک سال یعنی جملهٔ دوم دنباله، بعد از ۲ سال یعنی جملهٔ سوم دنباله و به همین ترتیب بعد از n سال یعنی جملهٔ $(n+۱)$ام دنباله پس باید به جای n، $n+۱$ بگذاریم:

$$\text{قیمت پس از } n \text{ سال}=۵۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^{n}\Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

یه حرکت دیگه!! به دید یک الگو به مسئله نگاه کنیم:

$$\text{قیمت پس از یک سال}=۵۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)$$

$$\text{قیمت پس از دو سال}=۵۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}$$

$$\vdots$$

$$\text{قیمت پس از } n \text{ سال}=۵۰۰\times\left(\frac{۴}{۵}\right)^{n}\Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

۲۸ **۳**

به دید یک الگو به مسئله نگاه کنیم:

$$۲^۱,۲^۲,۲^۳,\ldots\Rightarrow \text{جملهٔ بیستم}=۲^{۲۰}\Rightarrow \text{جملهٔ } n\text{ام } a_n=۲^n$$

$$\text{حاصل ضرب بیست جملهٔ اول}=۲^۱\times۲^۲\times۲^۳\times\ldots\times۲^{۲۰}=۲^{۱+۲+۳+\ldots+۲۰}=۲^{\frac{۲۰\times۲۱}{۲}}=۲^{۲۱۰}$$

یادآوری: $۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۲۹ ۳

کافی است جمله عمومی را برابر ۱۵۳۶ قرار دهیم.

نکته اگر دو جمله از یک دنبالهٔ هندسی معلوم باشد با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول و حل آن به روش تقسیم کردن می‌توان جملهٔ اول (a_1) و قدرنسبت (r) را به‌دست آورد. البته برای قدرنسبت می‌توان از فرمول $r^{m-n}=\frac{ar^{m-1}}{ar^{n-1}}=\frac{a_m}{a_n}$ نیز استفاده کرد.

در این سؤال: $\frac{a_6}{a_3}=r^{6-3}=r^3 \xrightarrow{\text{چون}} \frac{ar^5}{ar^2}=r^3 \xrightarrow{\text{به هر حال}} r^3=\frac{96}{12}=8 \Rightarrow r=2$

با جایگذاری $r=2$ در جملهٔ سوم یا ششم می‌توان a (جملهٔ اول) را به‌دست آورد: $a_3=ar^2=12 \xrightarrow{r=2} 4a=12 \Rightarrow a=3$

با داشتن r, a، جمله عمومی را می‌توان نوشت:

$$a_n=ar^{n-1} \Rightarrow a_n=3\times 2^{n-1} \Rightarrow 3\times 2^{n-1}=1536 \Rightarrow 2^{n-1}=512=2^9 \Rightarrow n-1=9 \Rightarrow n=10$$

۳۰ ۴

گزینهٔ (۱) نادرست است، چون بی‌شمار دنبالهٔ مختلف وجود دارد که نه حسابی‌اند و نه هندسی، مثل دنباله‌های درجه ۲ و کسری و ...

گزینهٔ (۲) نیز نادرست است، چون دنباله ثابت با $d=0$ و $r=1$ هم حسابی و هم هندسی است.

گزینهٔ (۳) نادرست است، چون این دنباله هندسی با قدرنسبت $r=1-\frac{20}{100}=0/8$ است.

گزینهٔ (۴) درست است، چون هر جمله نسبت به جملهٔ قبل ۱/۲ برابر می‌شود. $a_2=a_1+\frac{20}{100}a_1=(1+0/2)a_1 \Rightarrow a_2=1/2a_1$

۱ ۱

$$(۲,\underline{۴}),(۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,\underline{۱۶}),(۱۸,۲۰,...,\underline{۳۶}),...$$

دقت کنید اعداد زوج طبیعی $۲n$ هستند و مربع اعداد زوج طبیعی $(۲n)^۲$ هستند.

پس عدد مربع کامل در آخر دستهٔ n ام برابر $(۲n)^۲$ است. یعنی عدد آخر دستهٔ هفتم برابر $۱۹۶=۱۴^۲=(۲\times۷)^۲$ است و عدد آخر دستهٔ ششم $۱۴۴=(۲\times۶)^۲$ است، یعنی عدد اول دستهٔ هفتم برابر ۱۴۶ است. توجه داشته باشید که همهٔ اعداد زوج هستند. و مجموع جملات اول و آخر دستهٔ هفتم برابر $۱۴۶+۱۹۶=۳۴۲$

۲ ۴

به جدول مقابل توجه کنید تا الگوی رنگ‌ها را پیدا کنی:

شماره شکل	۱	۲	۳	n		
تعداد کل مثلث‌ها	۴	۹	۱۶	$(n+۱)^۲$	$\longrightarrow$ الگوی مربعی با شروع از ۴	
مثلث تیره	۱	۳	۶	$\frac{n(n+۱)}{۲}$	$\longrightarrow$ الگوی مثلثی با شروع از ۱	
مثلث سفید	۳	۶	۱۰	$\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$	$\longrightarrow$ الگوی مثلثی با شروع از ۳	$\longrightarrow$ البته نیازی به این فرمول نداریم

$$\text{تعداد مثلث‌های رنگ شده}=\frac{n(n+۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n(n+۱)=۷۲\xrightarrow{۸\times۹=۷۲}\underset{\text{شمارهٔ شکل}}{n=۸}\Rightarrow \text{تعداد کل مثلث‌ها}=۹^۲=۸۱$$

$$\text{مثلث‌های سفید}=۸۱-۳۶=۴۵$$

۳ ۴

کافی است با حل یک معادله d,a را به‌دست آوریم.

می‌دانیم $a_n=a+(n-۱)d$ پس $a_{n+۱}=a+nd$!! به جای n، $n+۱$ گذاشتیم در واقع ضریب d یکی کمتر از شمارهٔ جمله است.

$$a_n+a_{n+۱}=a+nd-d+a+nd=\underline{۲nd}+۲a-d=\underline{۶n}\Rightarrow\begin{cases}۲d=۶\Rightarrow d=۳\\ ۲a-d=۰\xrightarrow{d=۳}a=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

خواسته سؤال: $a_۵=a+۴d=\frac{۳}{۲}+۱۲=۱/۵+۱۲=۱۳/۵\Rightarrow$ گزینهٔ (۴)

۴ ۱

کلیدهای حل سؤال

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d$$

$$a_n=a_m+(n-m)d$$

مشابه این سؤال رو در تست‌های آموزشی هم داشتیم که قدرنسبت $d=-۱$ به‌دست آمد:
$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{n-m}{m-n}=-۱$$

سه رابطه برای a_{m+n} داریم. دقت کنید اینجا شمارهٔ جمله (یا همان اندیس)، $m+n$ است:

$$\begin{cases} a_{m+n}=a_۱+(m+n-۱)d \Rightarrow \text{این فایده نداره چون } a_۱ \text{ را نداریم!!} \\ a_{m+n}=a_m+(m+n-m)=a_m+nd \xrightarrow{d=-۱} a_{m+n}=n-n=۰ \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱)} \\ a_{m+n}=a_n+(m+n-n)d=a_n+md=m+m\times(-۱)=m-m=۰ \end{cases}$$

۵ ۲

اگر $d=+۳$ به‌دست آوردی، حواست به کاهشی بودن دنباله، در حین حل مسئله نبوده!!!

کلیدهای حل سؤال در دنبالهٔ حسابی کاهشی، قدرنسبت منفی است. $(d<۰)$

پنج جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی را می‌توان به صورت زیر نشان داد: $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d$

مجموع تعدادی فرد از جملات متوالی یا متساوی‌الفاصله در دنبالهٔ حسابی برابر است با: جملهٔ وسطی $\times$ تعداد

مثلاً در فرم نمایش ۵ جملهٔ متوالی بالا: $۵x=$ مجموع پنج جمله

طبق نکات بالا پنج جملهٔ متوالی این دنبالهٔ حسابی را به صورت $\underbrace{x+d, x+۲d}_{\text{دو جملهٔ کوچکتر (کاهشی)}}$ ، $\underbrace{x-۲d, x-d, x}_{\text{سه جملهٔ بزرگتر (کاهشی)}}$ نشان می‌دهیم پس با دو دسته اطلاعات داده شده دستگاه زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \text{مجموع جملات}=۳۵ \Rightarrow ۵x=۳۵ \Rightarrow x=۷ \rightarrow \text{جملهٔ وسط} \\ \text{مجموع دو جملهٔ کوچکتر}=\frac{۱}{۶}(\text{مجموع سه جملهٔ بزرگتر}) \longrightarrow x+۲d+x+d=\frac{۱}{۶}(x-۲d+x-d+x) \\ \text{(دقت کنید دنباله کاهشی است!! پس } x-۲d \text{ بزرگترین جمله است)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x+۳d=\frac{۱}{۶}(۳x-۳d) \Rightarrow ۲x+۳d=\frac{۱}{۲}(x-d) \xrightarrow{\times ۲} ۴x+۶d=x-d$$

$$\Rightarrow ۳x=-۷d \xrightarrow{x=۷} d=-۳ \xrightarrow{\text{پنج جملهٔ مربوطه}} ۱۳,۱۰,\underset{\text{وسطی}}{۷},۴,۱$$ (دقت کنید دنباله کاهشی است!!! پس $x-۲d$ بزرگترین جمله است)

۶ ۲

خب تازه میشه گفت ۵ سؤال دشوار اول تموم شده و سؤالات ساده‌تر از اینجا شروع می‌شود!!! پس طبیعی بوده یک دانش‌آموز متوسط یا خوب (عالی نه!!) نتونه پنج سؤال اول رو حل کنه!

کلیدهای حل سؤال

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \xrightarrow{\text{مثلاً}} a_۶=a+۵d$$

مجموع تعداد فردی جملهٔ متوالی حسابی = تعداد $\times$ وسطی $\xrightarrow{\text{مثلاً}} a_۴+a_۵+a_۶=۳a_۵$

مجموع تعداد زوجی جملهٔ متوالی حسابی = تعداد $\times \frac{\text{جمع دوتای وسط}}{۲}$ $\Leftarrow$ در این حالت بهتر است طبق کلید اولی، جملات را نوشته و جمع کنیم!

و اما در حل این سؤال نیازی نیست نمایش جملات به سبک سؤال ۵ باشد، طبق صورت مسئله می‌نویسیم:

$$a_۱+a_۲+a_۳=۴(a_۴+a_۵+a_۶) \xrightarrow{\text{سه برابر وسطی}} ۳a_۲=۴\times(۳a_۵) \Rightarrow a_۲=۴a_۵ \Rightarrow a+d=۴(a+۴d)$$

$$\Rightarrow a+d=۴a+۱۶d \Rightarrow ۳a+۱۵d=۰ \xrightarrow{\div ۳} a+۵d=۰ \xrightarrow{\text{یعنی}} a_۶=۰$$

۷ ۱

همان کلیدهای سؤال ۶ برای این سؤال نیز استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=55\Rightarrow a_3=11 \\ a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5a_8=130\Rightarrow a_8=26 \end{cases}\Rightarrow d=\frac{a_8-a_3}{8-3}=\frac{26-11}{8-3}=\frac{15}{5}=3$$

دنباله افزایشی است (چرا؟!!) پس بزرگ‌ترین جمله همان a_{10} است:

$$\begin{cases} a_{10}=a_1+9d\Rightarrow \text{وقت گیر} \\ a_{10}=a_3+7d\Rightarrow a_{10}=11+21=32 \\ \text{یا} \\ a_{10}=a_8+2d\Rightarrow a_{10}=26+6=32 \end{cases}$$

۸ ۱

کلیدهای حل سؤال

وقتی صحبت از جمع و ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی است، ساده‌تر است به صورت $x-d, x, x+d$ نمایش داده شود، چون:

$3x=$ مجموع سه جملهٔ متوالی

$$\text{حاصل ضرب سه جملهٔ متوالی}=x\left(x^2-d^2\right)\Rightarrow \text{حاصل ضرب مربعات آن‌ها}=x^2(x-d)^2(x+d)^2=x^2\left(x^2-d^2\right)^2$$

حل:

$$\begin{cases} 3x=6\Rightarrow x=2 \\ x^2(x-d)^2(x+d)^2=100\Rightarrow x(x+d)(x-d)=\pm 10\xrightarrow{x=2}2\left(4-d^2\right)=\pm 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 4-d^2=5\Rightarrow d^2=-1 \quad \text{غ ق ق} \\ \text{یا} \\ 4-d^2=-5\Rightarrow d^2=9\Rightarrow d=\pm 3\Rightarrow \begin{cases} x=2, d=3\xrightarrow{\text{افزایشی}}-1,2,5 \\ x=2, d=-3\xrightarrow{\text{کاهشی}}5,2,-1 \end{cases} \end{cases}$$

در هر دو حالت بزرگ‌ترین جمله ۵ است و گزینهٔ (۱) درست است.

۹ ۲

کلیدهای حل سؤال

دنبالهٔ حسابی: $a_n=a_1+(n-1)d, a_n=a_m+(n-m)d, a_n-a_m=(n-m)d\Rightarrow d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$

دنبالهٔ هندسی: $a_n=a_1r^{n-1}, a_n=a_mr^{n-m}, \dfrac{a_n}{a_m}=r^{n-m}$

$$3,-6,\ldots\xrightarrow{\text{هندسی}}r=\frac{-6}{3}=-2\Rightarrow\begin{cases} a_2=-6\Rightarrow t_3=-6 \quad \text{جملهٔ سوم حسابی} \\ a_5=a_1r^4=3\times(-2)^4=48\Rightarrow t_9=48 \quad \text{جملهٔ نهم حسابی} \end{cases}$$

$$d=\frac{t_9-t_3}{9-3}=\frac{48-(-6)}{6}=\frac{54}{6}=9\Rightarrow t_{15}=t_9+6d=48+54=102$$

۱۰ ۲

شاید شما این سؤال را با محاسبهٔ y, x حل کرده‌اید اما در روش حل پایین نیازی به x y نیست.

کلیدهای حل سؤال

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: $a_n=a+(n-1)d$

قدرنسبت دنبالهٔ حسابی: $d=a_{n+1}-a_n$ یا $d=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}$

جملات مثبت یک دنبالهٔ حسابی $\Rightarrow a_n>0$

در دنبالهٔ حسابی، که یک الگوی خطی درجه ۱ است، ضریب n همان قدرنسبت است و با داشتن یک جمله از دنباله می‌توان عدد ثابت a_n را به‌دست آورد:

$a_n=dn+?$

$$\underset{a_۲}{x,۴۹},\underset{a_۴}{y,۴۳},\ldots \Rightarrow d=\frac{a_۴-a_۲}{۴-۲}=\frac{۴۳-۴۹}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

$$d=-۳\xrightarrow{\text{ضریب } n}a_n=-۳n+b\xrightarrow[b=?]{a_۲=۴۹}-۶+b=۴۹\Rightarrow b=۵۵$$

$$\Rightarrow a_n=-۳n+۵۵\xrightarrow[a_n>۰]{\text{جملات مثبت}}-۳n+۵۵>۰\Rightarrow ۳n<۵۵\Rightarrow n<\frac{۵۵}{۳}\Rightarrow n<۱۸/۳۳\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۱\le n\le ۱۸$$

یعنی ۱۸ جملهٔ اول این دنباله مثبت‌اند.

۱۱ **۳**

کلیدهای حل سؤال جملات مشترک دو دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت‌های $d_۱,d_۲$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ک.م.م $d_۱,d_۲$ می‌دهند که اولین جملهٔ مشترک با ادامه دادن جملات دو دنباله به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}۱,۵,۹,\ldots\Rightarrow \quad =۴\\ -۱,۵,۱۱,\ldots\Rightarrow \quad =۶\end{cases}\Rightarrow \text{ک.م.م}\ d=۱۲$$ اولین جملهٔ مشترک $a=۵$

حال با داشتن $a=۵$, $d=۱۲$ جملهٔ عمومی دنبالهٔ مشترک‌ها را به صورت $a_n=۱۲n-۷$ می‌نویسیم.

اولین جملهٔ مشترک سه رقمی یعنی باید $a_n\ge ۱۰۰$ باشد پس:

$$۱۲n-۷\ge ۱۰۰\Rightarrow ۱۲n\ge ۱۰۷\Rightarrow n\ge \frac{۱۰۷}{۱۲}\Rightarrow n\ge ۸/۹۲\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n\ge ۹$$

یعنی جملهٔ نهم دنبالهٔ مشترک‌ها اولین جملهٔ مشترک سه رقمی است.

۱۲ **۲**

کلیدهای حل سؤال اعداد طبیعی که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر b برابر r باشد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=b$ و جملهٔ اول $a=r$ می‌دهند. (اگر $r=۰$ باشد جملهٔ اول را همان b می‌گیریم.)

جملهٔ عمومی حسابی: $a_n=a_۱+(n-۱)d$، جملهٔ عمومی هندسی: $a_n=a_۱r^{n-۱}$، قدرنسبت هندسی: $r=\frac{a_۲}{a_۱}$

اعداد طبیعی که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۴ باشد یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=۶$ و جملهٔ اول $a=۴$ را تشکیل می‌دهند، $\{۴,۱۰,۱۶,\ldots\}$ که جملهٔ ۴۲ ام این دنباله برابر است با:

$$a_{۴۲}=a_۱+۴۱d=۴+۴۱\times ۶=۴+۲۴۶=۲۵۰$$

حال باید ببینیم که این ۲۵۰، جملهٔ چندم دنبالهٔ هندسی داده شده است، یعنی جملهٔ عمومی هندسی را برابر ۲۵۰ قرار داده و شمارهٔ جملهٔ n را بیابیم:

$$۰/۰۸,۰/۴\text{ و }۲,\ldots\xrightarrow{\text{باور کن هندسی است!!}}\frac{۸}{۱۰۰},\frac{۴}{۱۰},۲,\ldots\xrightarrow{\text{ساده سازی}}\frac{۲}{۲۵},\frac{۲}{۵},\frac{۲}{۱},\ldots$$

جملهٔ اول $a=\frac{۲}{۲۵}$ و قدرنسبت $r=۵$ است. *دیری هندسی بود!!! خب ....*

$$a_n=a_۱r^{n-۱}=\frac{۲}{۲۵}\times ۵^{n-۱}=۲۵۰\Rightarrow ۵^{n-۱}=\cancel{۲۵۰}^{۱۲۵}\times\frac{۲۵}{\cancel{۲}}=۱۲۵\times ۲۵\Rightarrow ۵^{n-۱}=۵^۳\times ۵^۲=۵^۵\Rightarrow n-۱=۵\Rightarrow n=۶$$

۱۳ **۳**

کلیدهای حل سؤال در یک دنبالهٔ هندسی با تعداد جملات زوج، نسبت مجموع جملات با شمارهٔ زوج به مجموع جملات با شمارهٔ فرد برابر r است: $\frac{S_{\text{زوج}}}{S_{\text{فرد}}}=r$

(S مخفف کلمهٔ Sum به معنی مجموع است.)

$$\frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{فرد}}}=\frac{S_{\text{زوج}}+S_{\text{فرد}}}{S_{\text{فرد}}}=۱+r,\quad \frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{زوج}}}=\frac{S_{\text{فرد}}+S_{\text{زوج}}}{S_{\text{زوج}}}=۱+\frac{۱}{r}$$

بلد باشی زیر ۵ ثانیه حل میشه!!!

حل : $\frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{زوج}}}=۱+\frac{۱}{r}\xrightarrow{r=۲}۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow$ گزینهٔ (۳)

۱۴ ۴

کلیدهای حل سؤال در یک دنبالهٔ حسابی با تعداد جملات زوج، همواره:

$$\overset{\text{مجموع جملات با شمارهٔ فرد}}{S_{\text{فرد}}} - \underset{\text{مجموع جملات با شمارهٔ زوج}}{S_{\text{زوج}}} = \frac{n}{۲}d$$

اینم میدونید که: $S_{\text{فرد}} + S_{\text{زوج}} = S_{\text{کل}}$

حل: $S_{\text{زوج}} - ۱۰۰ = \frac{۳۰}{۲} \times ۴ \Rightarrow S_{\text{زوج}} = ۱۶۰ \Rightarrow S_{\text{کل}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}} = ۱۶۰ + ۱۰۰ = ۲۶۰$

۱۵ ۱

این سؤال که برگرفته از تمرین کوه یخی کتاب درسی است در تست‌های آموزشی و جامع (۱) نیز به صورت مشابه آن آمده بود!

کلیدهای حل سؤال دنباله‌هایی که در آن‌ها هر جمله نسبت به جملهٔ قبل $x\%$ کاهش یافته است یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r = ۱ - \frac{x}{۱۰۰}$ است. (برای افزایش $۱ + \frac{x}{۱۰۰}$)

در مسائل کاربردی به سبک بالا، با مقدار اولیه a بعد از روز nام یا سال nام، مقدار دنباله ar^n است!

$$\begin{cases} a_{۰} = \text{مقدار اولیه} \\ \text{بعد از یک روز} = a_{۰} \times r \Rightarrow a_n = a_{۰} r^n \ \text{یا}\ a_n = a_{۱} r^{n-۱} \\ \text{بعد از دو روز} = a_{۰} \times r^{۲} \end{cases}$$

روش اول: طبق کلید و راه‌حل بالا، قدرنسبت $r = ۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۰/۸$ یا $r = \frac{۴}{۵}$ است و بعد از ۵ مرتبه برخورد با زمین ارتفاع توپ برابر است با:

$$h_{۵} = \underset{\text{اولیه}}{h_{۰}} \times r^{۵} = \underset{\text{۳۰متر}}{h_{۰}} \times \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۵} = \frac{۱۰۲۴}{۳۱۲۵} h_{۰} \simeq \frac{۱}{۳} h_{۰} \xrightarrow{h_{۰} = ۳۰} \frac{۱}{۳} \times ۳۰ = ۱۰m$$

روش دوم: بدون هیچ نکته و ذهنیت قبلی سؤال را حل کنیم، مثلاً ۲۰٪ کاهش یعنی ۸۰٪ قبل!

$$\begin{cases} \text{بعد از یک مرتبه برخورد} = ۳۰ \times ۰/۸ = ۲۴ \ \text{متر} \\ \text{بعد از دو مرتبه برخورد} = ۲۴ \times ۰/۸ = ۱۹/۲ \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: ۲۴, ۱۹/۲, \ldots \Rightarrow h_n = ۲۴(۰/۸)^{n-۱} \Rightarrow h_{۵} = ۱۰m$$

دقت کنید که جمله عمومی این دنباله به دو صورت زیر نوشته شد که در واقع فرقی ندارند:

$$\begin{cases} h_n = h\ r \Rightarrow h_n = ۳۰ \times \left(-\right) \\ h_n = h\ r \Rightarrow h_n = ۲۴ \times \left(-\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{باور کن یکی اند!!!}} ۲۴ \times \left(\frac{۴}{۵}\right)^n = \underbrace{۲۴ \times \left(\frac{۴}{۵}\right)^n \div \frac{۴}{۵}}_{۳۰} = ۳۰ \times \left(\frac{۴}{۵}\right)^n$$

۱۶ ۴

کلیدهای حل سؤال وقتی c, b, a سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، که: $۲b = a + c$

در یک دنبالهٔ حسابی $a_n = a + (n-۱)d$

واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت y, x برابر است با: $\sqrt{xy}$

حل: $x, x+۳, ۵x+۲, \ldots \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲(x+۳) = x + ۵x + ۲ \Rightarrow ۲x + ۶ = ۶x + ۲ \Rightarrow x = ۱$

$$\Rightarrow \text{دنبالهٔ حسابی}: ۱, ۴, ۷, \ldots \xrightarrow[d=۳]{a=۱} \begin{cases} a_{۳} = ۷ \\ a_{۱۰} = a + ۹d = ۱ + ۲۷ = ۲۸ \end{cases}$$

در نهایت واسطهٔ هندسی دو عدد ۷ و ۲۸ را می‌خواهیم که برابر است با: $\sqrt{۷ \times ۲۸} = \sqrt{۷ \times ۷ \times ۴} = ۷ \times ۲ = ۱۴$

۱۷ **۳**

کلیدهای حل سؤال اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d_۱$ و جمله اول $a_۱$ با جملات دنبالهٔ حسابی دیگر با قدرنسبت $d_۲$ و جمله اول $a_۲$ جمع شوند، دنبالهٔ حسابی جدیدی با جمله اول $a_۱+a_۲$ و قدرنسبت $d_۱+d_۲$ تشکیل می‌دهند.

قدرنسبت دنبالهٔ حسابی $\dots,\frac{۷}{۳},\frac{۵}{۳},۱$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است که اگر به ترتیب با اعداد $\dots,\frac{۶}{۳},\frac{۷}{۳},\frac{۸}{۳}$ (یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{-۱}{۳}$) جمع شوند، دنباله حاصل نیز یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$ و جمله اول $۱+\frac{۸}{۳}$ است:

دنبالهٔ جدید: $\frac{۱۱}{۳},\frac{۱۲}{۳},\frac{۱۳}{۳},\dots \Rightarrow a_{۶۵}=a+۶۴d=\frac{۱۱}{۳}+۶۴\times\frac{۱}{۳}=۲۵$

۱۸ **۲**

کلیدهای حل سؤال اگر در مسئله دنبالهٔ هندسی غیرکاهشی یا غیرافزایشی معرفی شده باشد، معمولاً قدرنسبت آن منفی بوده است: $(r<۰)$ یعنی نه کاهشی و نه افزایشی است.

جملهٔ nام دنبالهٔ هندسی: $a_n=ar^{n-۱}$ (a جمله اول و d قدرنسبت)

دستگاه دو معادله و دو مجهول در دنبالهٔ هندسی معمولاً با فاکتورگیری و تقسیم کردن، دو معادله بر هم و ساده شدن یک مجهول حل می‌شود.

حل:

$$\begin{cases} a_۲=a_۱-۹ \\ a_۴=a_۳-۳۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_۲-a_۱=-۹ \\ a_۴-a_۳=-۳۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ar-a=-۹ \\ ar^۳-ar^۲=-۳۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(r-۱)=-۹ \quad ۱ \\ ar^۲(r-۱)=-۳۶ \quad ۲ \end{cases}$$

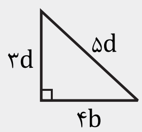
$$\xrightarrow{\text{تقسیم } \frac{۲}{۱}} \frac{ar^۲(r-۱)}{a(r-۱)}=\frac{-۳۶}{-۹} \Rightarrow r^۲=۴ \Rightarrow r=\pm۲ \xrightarrow[r<۰]{\text{غیر کاهشی}} r=-۲$$

$r=-۲$ را در معادلهٔ ۱ جایگذاری می‌کنیم تا a به‌دست آید:

$$a(r-۱)=-۹ \xrightarrow{r=-۲} -۳a=-۹ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow \text{جملهٔ ششم } a_۶=ar^۵=۳\times(-۲)^۵=-۹۶$$

۱۹ **۲**

کلیدهای حل سؤال اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند، آنگاه حتماً به صورت $۵d, ۴d, ۳d$ هستند:

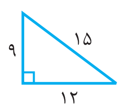


$$\text{محیط مثلث}=۳d+۴d+۵d=۱۲d$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\times۳d\times۴d=۶d^۲$$

حل:

$$۱۲d=۳۶ \Rightarrow d=۳ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۲=۵۴$$

۲۰ ۲

مشابه این سؤال را در تست‌های آموزشی نیز آورده بودیم.

کلیدهای حل سؤال

مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب $= (n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

مجموع زوایای یک پنج ضلعی محدب $= ۳\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

پنج جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی: $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d \Rightarrow$ مجموع $= ۵\underset{\text{وسطی}}{x}$

حل:

$۵x = ۵۴۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۸^\circ$ زاویهٔ متوسط $\xrightarrow{\text{دنباله افزایشی}} \underbrace{x-۲d, x-d}_{\text{دو زاویه کوچکتر}}, \underbrace{x, x+d, x+۲d}_{\text{سه زاویه بزرگتر}}$

$$\Rightarrow (x+x+d+x+۲d) = ۳(x-۲d+x-d) \Rightarrow ۳x+۳d = ۳(۲x-۳d)$$

$$\Rightarrow \cancel{۳}(x+d) = \cancel{۳}(۲x-۳d) \Rightarrow x = ۴d \xrightarrow{x=۱۰۸^\circ} d = \frac{۱۰۸^\circ}{۴} = ۲۷^\circ$$ قدرنسبت

بزرگ‌ترین زاویه: $x+۲d \xrightarrow[d=۲۷^\circ]{x=۱۰۸^\circ} ۱۰۸^\circ + ۵۴^\circ = ۱۶۲^\circ$

۲۱ ۲

کلیدهای حل سؤال

روابط اصلی در دنبالهٔ هندسی:

$a_n = ar^{n-۱}$

$a_n = a_m r^{n-m}$، $\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$

حل:

$$\begin{cases} a_۵ = ۳ \Rightarrow ar^۴ = ۳ \Rightarrow a(r^۲)^۲ = ۳ \xrightarrow{۱} \frac{۱}{۴}a = ۳ \Rightarrow a = ۱۲ \\ a_۷ = ۲a_۹ \Rightarrow \frac{a_۹}{a_۷} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r^۴ = \frac{۱}{۴}, r = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad ۱ \text{ و } ۲ \end{cases}$$

$$a_n = ar^{n-۱} = ۱۲r^{n-۱} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow r^{n-۱} = \frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۳۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵ \Rightarrow \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{n-۱} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{n-۱}{۲}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵ \Rightarrow \frac{n-۱}{۲} = ۵ \Rightarrow n = ۱۱$$

دقت کنید اگر $r = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ هم گرفته می‌شد باز هم $n = ۱۱$ به‌دست می‌آمد!!

۲۲ ۳

یه جورایی مشابه این سؤال، تست ۷۸ آموزشی بود، یه نگاهی بنداز الان!

کلیدهای حل سؤال

در یک دنبالهٔ هندسی همواره: $\frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$

اگر $۰ < r < ۱$ باشد و جملات دنباله مثبت باشند، دنباله کاهشی است و بزرگ‌ترین جمله همان جملهٔ اول دنباله است.

کلید اضافه!!! اگر $-۱ < r < ۰$ باشد، $\min, \max$ همان دو جملهٔ اول هستند، این‌که کدام $\max$ و کدام $\min$ باشد بستگی به علامت آن‌ها دارد:

$۸, -۴, ۲, -۱, \ldots$

حل:

$$a, b, \underset{\text{جملهٔ سوم}}{\frac{۱}{۳}}, c, d, \underset{\text{جملهٔ ششم}}{\frac{۱}{۲۴}} \Rightarrow \frac{a_۶}{a_۳} = r^۳ = \frac{\frac{۱}{۲۴}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

چون $۰ < r < ۱$ و جملات مثبت‌اند پس دنباله کاهشی است.

$$a_۳ = ar^۲ = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{r=\frac{۱}{۲}} a\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow$$ جملهٔ اول همان بزرگ‌ترین جمله است.

۲۳ ۴

کلیدهای حل سؤال تعداد جملات دنباله از تعداد واسطه‌ها دو واحد بیشتر است. اگر بین b, a، k واسطه درج کنیم، a، جملهٔ اول و b، جملهٔ $(k+2)$ام است.

واسطهٔ nام در واقع جملهٔ $(n+1)$ام دنباله است. (کمی تفکر!!!) $a_n = ar^{n-1}, \frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$

حل: چون دنباله افزایشی است با ۴ واسطه، پس $a_6 = 256, a_1 = \sqrt{2}$ است، در نتیجه:

$$\frac{a_6}{a_1} = r^5 = \frac{256}{\sqrt{2}} = \frac{2^8}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{15}{2}} \Rightarrow r^5 = 2^{\frac{15}{2}} \xrightarrow{\text{۱۵ و ۵ رو ساده کن!!!}} r = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی سومین واسطه یعنی چهارمین جملهٔ دنباله با شروع از $a_1 = \sqrt{2}$ و قدرنسبت $r = 2\sqrt{2}$ یا $r = 2^{\frac{3}{2}}$:

$$a_4 = a_1 r^3 = \sqrt{2} \times (2\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times 8 \times 2\sqrt{2} = 32$$

این تهش رو دیگه هر جوری دوست داری حساب کن!!! مهم اینه جوابت ۳۲ بشه! مثلاً اینجوری هم میشه:

$$a_4 = ar^3 = 2^{\frac{1}{2}} \times \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{9}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

۲۴ ۴

برای حل این سؤال همان کلیدهای سؤال قبلی رو بخون!

اطلاعات سؤال اینو میگه که $t_1 = a^5, t_n = a^{17}, t_5 = a^{11}$ (چهارمین واسطه همان پنجمین جمله است.) است، ابتدا قدرنسبت و مجهول n یعنی تعداد جملات را به‌دست می‌آوریم و سپس ۲ واحد از آن کم می‌کنیم تا تعداد واسطه‌ها به‌دست آید.

$$\frac{t_5}{t_1} = r^4 = \frac{a^{11}}{a^5} = a^6 \Rightarrow r = \pm(a^6)^{\frac{1}{4}} = \pm a^{\frac{3}{2}}$$

$$t_n = a_1 r^{n-1} = a^{17} \Rightarrow a^5 \times r^{n-1} = a^{17} \Rightarrow r^{n-1} = a^{12} \text{ یا } \left(\frac{t_n}{t_1} = r^{n-1} = a^{12}\right)$$

$$\xrightarrow{r = \pm a^{\frac{3}{2}}} (\pm a)^{\frac{3}{2}(n-1)} = a^{12} \Rightarrow \frac{3}{2}(n-1) = 12 \Rightarrow n-1 = 12 \times \frac{2}{3} = 8 \Rightarrow n = 9$$

پس دنباله شامل ۹ جمله بوده است یعنی a^{17} جملهٔ نهم است، پس تعداد واسطه‌های هندسی بین a^5, a^{17} برابر $9 - 2 = 7$ واسطه است.

۲۵ ۱

کلیدهای حل سؤال

a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی $\Rightarrow b^2 = ac$

b, a واسطهٔ حسابی $= \frac{a+b}{2}$

b, a واسطهٔ هندسی اعداد مثبت $= \sqrt{ab}$ (کلید اضافه!!!)

حل:

$$2^a, 4\sqrt{2}, 2^b \xrightarrow{\text{هندسی}} (4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5$$

b, a واسطهٔ حسابی $= \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5 \Rightarrow$ گزینهٔ (۱)

دقت کنید با یک معادله، دو مجهول b, a به‌دست نمی‌آید و لازم هم نیست! ما $a+b$ را می‌خواهیم که داریم!

۲۶ ۳

کلیدهای حل سؤال

$$a,b,c \xrightarrow[\text{حسابی}]{\text{هندسی}} \begin{cases} b^{۲}=ac \\ ۲b=a+c \end{cases}$$

حسابی: $x,y,z \Rightarrow$ هندسی k^{x},k^{y},k^{z}

هندسی $x,y,z \xrightarrow{\text{مثبت}}$ حسابی $\mathrm{Log}_k^x,\mathrm{Log}_k^y,\mathrm{Log}_k^z$

$$\frac{۱}{b+c},\frac{۱}{a+c},\frac{۱}{a+b} \xrightarrow{\text{حسابی}} \times\frac{۱}{a+c}=\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{a+b} \Rightarrow \frac{۲}{a+c}=\frac{a+۲b+c}{ab+b\quad +ac\quad bc}$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} a^{۲}+\cancel{۲ab}+\cancel{ac}+\cancel{ac}+\cancel{۲bc}+c^{۲}=\cancel{۲ab}+۲b^{۲}+\cancel{۲ac}+\cancel{۲bc} \xrightarrow{\text{ساده}} a^{۲}+c^{۲}=۲b^{۲}$$

یعنی $a^{۲},b^{۲},c^{۲}$ نیز تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس $k^{a^{۲}},k^{b^{۲}},k^{c^{۲}}$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است:

$$۵^{-a^{۲}},۵^{-b^{۲}},۵^{-c^{۲}} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۵}\right)^{a^{۲}},\left(\frac{۱}{۵}\right)^{b^{۲}},\left(\frac{۱}{۵}\right)^{c^{۲}} \xrightarrow{\text{هندسی}} \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲b^{۲}}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{a^{۲}+c^{۲}}$$

توضیحات بیشتر از اثبات این نکته در درسنامهٔ (۲۶) آمده است.

۲۷ ۳

کلیدهای حل این سؤال همان کلیدهای سؤال قبل است!!! یعنی شرط حسابی یا هندسی بودن عدد.

$$\begin{cases} a,۴,b \xrightarrow{\text{حسابی کاهشی}} ۲\times۴=a+b \Rightarrow a+b=۸ \\ b,a,-۵۰ \xrightarrow{\text{هندسی}} a^{۲}=-۵۰b \end{cases}$$

در واقع یک دستگاه دو معادله و دو مجهول غیر خطی (درجه دوم) داریم، که مجهول n را می‌خواهیم.

روش اول: امتحان کردن گزینه‌ها! چون دنباله حسابی کاهشی است پس باید $a>۴$ باشد که هست:

گزینهٔ (۳): $a=۱۰ \xrightarrow{a+b=۸} b=-۲ \Rightarrow b,a,-۵۰ \Rightarrow -۲,۱۰,-۵۰ \Rightarrow ۱۰^{۲}=۱۰۰$ درست است.

روش دوم: حل دستگاه به روش حذفی b:

$$a+b=۸ \Rightarrow b=۸-a \Rightarrow a^{۲}=-۵۰b \Rightarrow a^{۲}=-۵۰(۸-a) \Rightarrow a^{۲}-۵۰a+۴۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱۰)(a-۴۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱۰ \Rightarrow b=-۲ \\ \text{یا} \\ a=۴۰ \Rightarrow b=-۳۲ \end{cases} \Rightarrow$$ هر دو جواب قابل قبول است.

۲۸ ۳

$-۲,a,۴ \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲a=-۲+۴=۲ \Rightarrow a=۱, d=۴-۱=۳ \Rightarrow$!!!جملهٔ اول نیست $a=۱$

جملهٔ بیست و سوم این دنبالهٔ حسابی $t_{۲۳}=t_{۱}+۲۲d=-۲+۲۲\times۳=۶۴$

حالا باید جمله عمومی دنبالهٔ هندسی را برابر این ۶۴ که به‌دست آوردیم، قرار دهیم تا به‌دست آید:

دنبالهٔ هندسی: $b,\frac{۱}{۴},\frac{-a}{۲},\ldots \xrightarrow{a=۱} b,\frac{۱}{۴},\frac{-۱}{۲},\ldots \Rightarrow r=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-۲, b=\frac{۱}{۴}\div(-۲)=\frac{-۱}{۸}$

جمله عمومی دنبالهٔ هندسی: $a_n=a_۱r^{n-۱}=-\frac{۱}{۸}\times(-۲)^{n-۱}=۶۴ \Rightarrow (-۲)^{n-۱}=۶۴\times(-۸)=۲^{۶}\times(-۲)^{۳}=(-۲)^{۹} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-۱=۹ \Rightarrow n=۱۰$ گزینهٔ (۳)

۲۹ ۳

کلیدهای حل سؤال

اگر جملات nام، mام و kام یک دنبالهٔ حسابی، سه جمله متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با: $r=\dfrac{k-m}{m-n}$

روش تشریحی نکته بالا این بود که باید: $\left(a+(m-1)k\right)^2=\left(a+(n-1)d\right)\times\left(a+(k-1)d\right)$ و رابطه‌ای بین d,a به‌دست آوریم و ...

جمله nام حسابی: $a_n=a+(n-1)d$

حل: قدر نسبت هندسی $r=\dfrac{8-4}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

اما برای حل سؤال رابطه‌ای بین d,a لازم است. پس باید قدرنسبت هندسی را به صورت زیر بنویسیم:

نسبت دو جمله متوالی، هندسی $=r=\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{a+3d}{a}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow 4a=3a+9d\Rightarrow a=9d$ (یعنی جمله اول حسابی ۹ برابر قدرنسبت آن است.)

$\dfrac{\text{جملهٔ هفتم حسابی}}{\text{جملهٔ دوم حسابی}}=\dfrac{a_7}{a_2}=\dfrac{a+6d}{a+d}\xrightarrow{a=9d}\dfrac{9d+6d}{9d+d}=\dfrac{15d}{10d}=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}=1/5\Rightarrow$ گزینهٔ (۳)

توجه داشته باشید اگر از روش تشریحی $b^2=ac$ هم حل می‌کردیم به همین ترتیب $a=9d$ می‌رسیدیم:

$$a_1,a_4,a_8\xrightarrow{\text{حسابی}}a,a+3d,a+7d\xrightarrow{\text{هندسی}}(a+3d)^2=a(a+7d)\Rightarrow a^2+6ad+9d^2=a^2+7ad$$

$$\Rightarrow 9d^2=ad\Rightarrow\begin{cases}d=0\Rightarrow \text{غ ق ق (دنبالهٔ ثابت)}\\ \text{یا}\\ a=9d\Rightarrow \text{ق ق}\Rightarrow \text{و ادامهٔ داستان مانند بالا}\end{cases}$$

۳۰ ۴

کلیدهای حل سؤال

فرم‌های بازگشتی دنبالهٔ حسابی (هر جمله به اندازه d از جملهٔ قبلی بیشتر است.) $\begin{cases}a_{n+1}-a_n=d\Rightarrow a_{n+1}=a_n+d\\ a_n-a_{n-1}=d\Rightarrow a_n=a_{n-1}+d\end{cases}$

فرم‌های بازگشتی دنبالهٔ هندسی (هر جمله، r برابر جملهٔ قبلی): $\begin{cases}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r\Rightarrow a_{n+1}=ra_n\\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r\Rightarrow a_n=ra_{n-1}\end{cases}$

گزینهٔ (۱): $a_{n+1}=a_n-2\Rightarrow d=-2$ دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲-

گزینهٔ (۲): $a_{n+1}=2a_n\Rightarrow r=2$ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت

گزینهٔ (۳): $a_{n-1}-a_n=3\Rightarrow a_n-a_{n-1}=-3\Rightarrow d=-3$ دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳-

گزینهٔ (۴): $a_n+3a_{n+1}=0\Rightarrow a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n\Rightarrow \dfrac{-1}{3}$ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\Longrightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

پاسخنامهٔ آزمون جامع ۳ (۱۰۰ واره)

۱ ۳

این سؤال را با تست ۱۴ آموزشی مقایسه کنید!!!

توجه داشته باشید که در این الگوهای دو رنگی گاهی لازم است جدولی روی کاغذ یا در ذهنتان رسم کنید :

شماره شکل	۱ ۲ ۳ ۴ ۵...n
تعداد کل دایره‌ها	۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵...$n^۲$
تعداد دایره‌های توپر	۰ ۲ ۴ ۸ ۱۲...$\frac{n^۲}{۲}$ (n زوج) $\frac{n^۲-۱}{۲}$ (n فرد)
تعداد دایره‌های تو خالی	۱ ۲ ۵ ۸ ۱۳...$\frac{n^۲}{۲}$ (n زوج) $\frac{n^۲-۱}{۲}$ (n فرد)

$n=۱۵ \xrightarrow{\text{در کل ۲۲۵ دایره}} \frac{n^۲+۱}{۲}=\frac{۲۲۵+۱}{۲}=\frac{۲۲۶}{۲}=۱۱۳$ دایرهٔ تو خالی $\xrightarrow{\text{و}}$ ۱۱۲ دایره توپر

۲ ۲

این سؤال را با سؤال ۱۵ تست‌های آموزشی مقایسه کنید.

تعداد دایره‌های توپر در یک شکل شمارهٔ فرد و شکل شمارهٔ زوج قبل از آن برابر است.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
تعداد دایره‌های توپر	۰	۳	۳	۳+۷	۳+۷	۳+۷+۱۱	...

($\underbrace{۳ \quad ۳}_{\text{برابر}}$)

اما سؤال اختلاف تعداد دایره‌های توپر را خواسته است:

nهای زوج	۲	۴	۶	...	n
اختلاف تعداد دایره‌های توپر در شکل nام و قبلی	۳	۷	۱۱	...	۲n−۱

اختلاف تعداد دایره‌های توپر در شکل nام و قبلی آن، $(n-۱)$ام $\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{n فرد}} \text{صفر} \\ \xrightarrow{\text{n زوج}} ۲n-۱ \end{cases}$

پس اختلاف تعداد دایره‌های توپر در شکل سی‌ام و شکل بیست و نهم برابر $۵۹=۱-۳۰\times۲$ است.

۳ ۱

به نظر می‌رسد اگر روی آخرین عدد هر دسته تمرکز کنیم، مسئله راحت‌تر حل شود.

با توجه به الگو، آخرین عدد دسته سوم برابر $۶=\underbrace{۳}_{\text{تعداد دستهٔ سوم}}+\overbrace{۲}^{\text{تعداد دستهٔ دوم}}+\underbrace{۱}_{\text{تعداد دستهٔ اول}}$ و به همین ترتیب آخرین عدد دستهٔ nام برابر است با:

$\frac{n(n+۱)}{۲}=۱+۲+۳+...+n$ پس جملهٔ آخر دستهٔ ۲۰ام برابر $۲۱۰=\frac{۲۰\times۲۱}{۲}$ و جملهٔ آخر دستهٔ ۱۹ام برابر $۱۹۰=\frac{۱۹\times۲۰}{۲}$ و جملهٔ اول دستهٔ بیستم $۱۹۱=۱+۱۹۰$ است یعنی دستهٔ بیستم به صورت $(۱۹۱,۱۹۲,...,۲۱۰)$ است.

و اما می‌دانیم مجموع چند جمله از جملات متوالی دنبالهٔ حسابی برابر است با: (وسطی×تعداد) یا $\frac{(\text{آخری}+\text{اولی})\times\text{تعداد}}{۲}$

مجموع جملات دستهٔ بیستم $=\frac{۲۰\times(۱۹۱+۲۱۰)}{۲}=۱۰\times۴۰۱=۴۰۱۰\Rightarrow$ گزینهٔ (۱)

۴ — ۱

می‌دانیم در یک دنباله حسابی $t_{n+۱}-t_n=d$ ، $t_n-t_m=(n-m)d$ است پس: $\frac{۱}{t_۱}-\frac{۱}{t_۲}=\frac{t_۲-t_۱}{t_۱t_۲}=\frac{d}{t_۱t_۲}$

عبارت خواسته شده را در یک d ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱}{d}\left(\frac{d}{t_۱t_۲}+\frac{d}{t_۲t_۳}+\dots+\frac{d}{t_{۱۹}t_{۲۰}}\right)=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{t_۱}-\cancel{\frac{۱}{t_۲}}+\cancel{\frac{۱}{t_۲}}-\cancel{\frac{۱}{t_۳}}+\dots+\cancel{\frac{۱}{t_{۱۹}}}-\frac{۱}{t_{۲۰}}\right)$$

$$=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{t_۱}-\frac{۱}{t_{۲۰}}\right)=\frac{۱}{d}\times\frac{t_{۲۰}-t_۱}{t_۱t_{۲۰}}=\frac{۱}{d}\times\frac{۱۹d}{t_۱t_{۲۰}}=\frac{۱۹}{t_۱t_{۲۰}}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱)

به طور کلی می‌توان اثبات کرد:

$$\frac{۱}{t_۱t_۲}+\frac{۱}{t_۲t_۳}+\dots+\frac{۱}{t_{n-۱}t_n}=\frac{n-۱}{t_۱t_n}$$

$$\frac{۱}{t_۱t_۲}+\frac{۱}{t_۲t_۳}+\dots+\frac{۱}{t_nt_{n+۱}}=\frac{n}{t_۱t_{n+۱}}$$

۵ — ۳

جملهٔ اول $a=۲+x$ و قدرنسبت برابر $d=(۵+۳x)-(۲+x)=۳+۲x$ است، پس:

$$a_{۲۰}=a+۱۹d=(۲+x)+۱۹(۳+۲x)=۲+x+۵۷+۳۸x=۳۹x+۵۹=۲۱۵\Rightarrow ۳۹x=۱۵۶\Rightarrow x=\frac{۱۵۶}{۳۹}=۴$$

۶ — ۲

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=۳x=۲۱\Rightarrow x=۷\\(x-d)^۳+x^۳+(x+d)^۳=۱۱۹۷\Rightarrow(۷-d)^۳+۳۴۳+(۷+d)^۳=۱۱۹۷\Rightarrow(۷-d)^۳+(۷+d)^۳=۸۵۴\end{cases}$$

اتحاد فرعی $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ رو که یادتونه!!!

$$\Rightarrow(۷-d+۷+d)^۳-۳(۷-d)(۷+d)(۷-d+۷+d)=۱۴^۳-۳\times(۴۹-d^۲)\times۱۴=۸۵۴$$

$$\Rightarrow ۲۷۴۴-۴۲(۴۹-d^۲)=۸۵۴\Rightarrow ۴۲(۴۹-d^۲)=۱۸۹۰\Rightarrow ۴۹-d^۲=۴۵\Rightarrow d^۲=۴$$

$$\Rightarrow d=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}x=۷,d=۲\xrightarrow{\text{افزایشی}}۵,۷,۹\\x=۷,d=-۲\xrightarrow{\text{کاهشی}}۹,۷,۵\end{cases}\Rightarrow$$ بزرگ‌ترین جمله $=۹$

۷ — ۱

$$\begin{cases}a_{n+۱}=a_n+۳,a_۱=۱\xrightarrow{d=۳}۱,۴,۷,۱۰,\dots\to a_n=۳n-۲\\b_{n-۱}=b_n-۴,b_۱=۲\to b_n-b_{n-۱}=۴\xrightarrow{d=۴}۲,۶,۱۰,\dots\to b_n=۴n-۲\end{cases}$$

پس اولین جملهٔ مشترک ۱۰ و قدرنسبت جملات مشترک که (خود دنباله‌ای حسابی است!) برابر ک.م.م ۳ و ۴ یعنی ۱۲ است و جمله عمومی دنبالهٔ مشترک‌ها $t_n=۱۲n-۲$ است.

صد جملهٔ اول دنباله با قدرنسبت کمتر یعنی دنباله a_n به $a_{۱۰۰}=۲۹۸$ ختم می‌شود، پس باید جملات مشترک کوچکتر یا مساوی ۲۹۸ باشند:

یعنی در صد جملهٔ اول a_n و b_n، ۲۵ جملهٔ، مشترک داریم. $۱۲n-۲\le۲۹۸\Rightarrow۱۲n\le۳۰۰\Rightarrow n\le۲۵$

۸ — ۳

این سؤال را با سه روش حل کرده‌ایم!!!

اعداد طبیعی که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر یک است، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۷ و جمله اول ۱ می‌دهند، پس جمله عمومی آن‌ها $۷n-۶$ است پس تعداد سه رقمی‌های آن‌ها از حل نامعادلهٔ $۱۰۰\le a_n\le۹۹۹$ به‌دست می‌آیند:

$$۱۰۰\le۷n-۶\le۹۹۹\Rightarrow۱۰۶\le۷n\le۱۰۰۵\xrightarrow{\div۷}۱۵/۱۴\le n\le۱۴۳/۵۷\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۱۶\le n\le۱۴۳$$

پس تعداد جملات سه رقمی برابر است با: تعداد جملات $=۱۴۳-۱۶+۱=۱۲۸$

روش دوم: ۱۰۶ و ۹۹۵ اولین و آخرین عدد سه رقمی‌اند که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۱ است، پس تعداد آن‌ها برابر است با:

$$n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱=\frac{۹۹۵-۱۰۶}{۷}+۱=۱۲۷+۱=۱۲۸$$

۹ — **۳**

طبق نکات درسنامهٔ (۱۵) داریم:

$$S_{\text{زوج}}-S_{\text{فرد}}=\frac{n}{۲}d\Rightarrow ۱۳۵-۱۵۰=\frac{۲۰}{۲}\times d\Rightarrow -۱۵=۱۰d\Rightarrow d=-\frac{۳}{۲}=-۱/۵$$

$$\begin{cases} S_{\text{کل}}=S_{\text{زوج}}+S_{\text{فرد}}=۱۳۵+۱۵۰=۲۸۵ \\ S_{\text{کل}}=\dfrac{(\text{اولی}+\text{آخری})\times \text{تعداد}}{۲} \end{cases}\Rightarrow \frac{۲۰(a_۱+a_{۲۰})}{۲}=\frac{۲۰(a_۱+a_۱+۱۹d)}{۲}=۱۰(۲a_۱+۱۹d)=۲۸۵$$

$$\xrightarrow{\div ۵}۲(۲a_۱+۱۹d)=۵۷\xrightarrow{d=-\frac{۳}{۲}}۲\left(۲a_۱+۱۹\times\frac{-۳}{۲}\right)=۵۷\Rightarrow ۴a_۱-۵۷=۵۷\Rightarrow ۴a_۱=۱۱۴\Rightarrow a_۱=۲۸/۵$$

۱۰ — **۳**

طبق نکات درسنامهٔ (۲۲) در یک دنبالهٔ هندسی با تعداد جملات زوج و قدرنسبت r داریم:

$$\frac{S_{\text{زوج}}}{S_{\text{فرد}}}=r\Rightarrow \frac{۵۰}{S_{\text{فرد}}}=۲\Rightarrow S_{\text{فرد}}=۲۵$$

$S_{\text{کل}}=S_{\text{زوج}}+S_{\text{فرد}}=۵۰+۲۵=۷۵\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است

۱۱ — **۴**

روش اول: نمایش چهار جملهٔ متوالی حسابی به صورت $a, a+d, a+۲d, a+۳d$ با قدرنسبت d و جمله اول a است.

$$\text{مجموع جملات}=۴a+۶d=۱۲۲\xrightarrow{\div ۲}۲a+۳d=۶۱ \quad ❶$$

گفته مجموع سه جملهٔ کوچکتر از دو برابر جملهٔ بزرگ‌تر، یک واحد کمتر است، یعنی:

$$a+a+d+a+۲d=۲(a+۳d)-۱\Rightarrow ۳a+۳d=۲a+۶d-۱\Rightarrow a=۳d-۱ \quad ❷$$

حال با جایگذاری ❷ در ❶ دستگاه معادلات مربوطه را حل می‌کنیم:

$$۲(۳d-۱)+۳d=۶۱\Rightarrow ۶d-۲+۳d=۶۱\Rightarrow ۹d=۶۳\Rightarrow d=۷\Rightarrow a=۳d-۱\xrightarrow{d=۷}a=۲۰$$

پس کمترین سهم $a=۲۰$ و بیشترین سهم $a+۳d=۴۱$ قرص نان است.

روش دوم: *نمایش جملات به صورت $x-۳d, x-d, x+d, x+۳d$ با قدرنسبت $۲d$ است. مایل بودید خودتون ادامه بدین!!!*

۱۲ — **۱**

حتماً هر سه روش حل را مطالعه کنید!

$$\text{مجموع زوایای یک } n \text{ ضلعی محدب}=(n-۲)\times ۱۸۰^\circ\Rightarrow \text{مجموع زوایای یک ۵ ضلعی محدب}=۳\times ۱۸۰^\circ=۵۴۰^\circ$$

روش اول: اگر زاویه‌ها را به صورت $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d$ نمایش دهیم: $\text{مجموع زوایا}=۵x=۵۴۰^\circ\Rightarrow$ زاویهٔ متوسط: $x=\frac{۵۴۰^\circ}{۵}=۱۰۸^\circ$

کوچک‌ترین زاویه: $x-۲d=۳۸^\circ\Rightarrow ۱۰۸^\circ-۲d=۳۸^\circ\Rightarrow d=۳۵^\circ$

بزرگ‌ترین زاویه: $x+۲d=۱۰۸^\circ+۷۰^\circ=۱۷۸^\circ\Rightarrow$ گزینهٔ (۱)

روش دوم: نمایش جملات به صورت $a, a+d, \dots, a+۴d$

$$\begin{cases} a=۳۸ \\ \text{مجموع}=۵a+۱۰d=۵۴۰\xrightarrow{\div ۵}a+۲d=۱۰۸\xrightarrow{a=۳۸^\circ}d=۳۵^\circ\Rightarrow \text{بزرگ‌ترین جمله } a_۵=a+۴d=۳۸+۱۴۰=۱۷۸^\circ \end{cases}$$

روش سوم:

$$\text{مجموع } n \text{ جملهٔ دنبالهٔ حسابی}=\frac{(\overset{\min}{\text{اولی}}+\overset{\max}{\text{آخری}})\times \text{تعداد}}{۲}\Rightarrow \frac{۵\times(M+۳۸)}{۲}=۵۴۰^\circ\Rightarrow M=۱۷۸^\circ$$

یا می‌توان گفت $(\max+\min)$ دو برابر جملهٔ وسط یعنی $۲\times ۱۰۸^\circ=۲۱۶^\circ$ است چون $\min=۳۸^\circ$ پس $\max=۱۷۸^\circ$ است.

۱۳ ۴

مجموع زوایای یک چهار ضلعی محدب $۲\times ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ است. و میانگین زاویه‌ها $\frac{۳۶۰^\circ}{۴} = ۹۰^\circ$ می‌باشد.

روش اول: جادوگری!!! $\max + \min$ دو برابر میانگین است:

$$\max+\min = ۲\times ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\max = ۱۵۰^\circ} \min = ۳۰^\circ \xrightarrow{\text{یعنی}} a_۱ = ۳۰, a_۴ = ۱۵۰^\circ$$

و مجموع دو زاویه کوچکتر برابر ۱۰۰ درجه است. $\Rightarrow$ قدرنسبت $d = \frac{a_۴ - a_۱}{۴-۱} = \frac{۱۵۰^\circ - ۳۰^\circ}{۳} = \frac{۱۲۰^\circ}{۳} = ۴۰^\circ \Rightarrow$ زوایا $۳۰, ۷۰, ۱۱۰, ۱۵۰$

روش دوم: *روش بچه مثبت‌ها!!!*

$$\begin{cases} a+a+d+a+۲d+a+۳d = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۴a+۶d = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} ۲a+۳d = ۱۸۰^\circ \\ a+۳d = ۱۵۰^\circ \end{cases}$$

حل دستگاه: $\begin{cases} ۲a+۳d = ۱۸۰^\circ \\ a+۳d = ۱۵۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a = ۳۰, d = ۴۰ \Rightarrow$ جملات دنباله: $۳۰^\circ, ۷۰^\circ, ۱۱۰^\circ, ۱۵۰^\circ$

یه جور دیگه: $x = ۹۰^\circ$، بزرگ‌ترین زاویه $x + \frac{۳d}{۲} = ۱۵۰^\circ$ است. که از آن $d = ۴۰^\circ$ به‌دست می‌آید.

۱۴ ۳

$$\begin{cases} \text{مجموع زوایای یک } n \text{ ضلعی} = (n-۲)\times ۱۸۰^\circ \\ \text{مجموع زوایای } n \text{ جملهٔ متوالی حسابی} = \frac{n\times(\min+\max)}{۲} \end{cases}$$

$$\frac{n\times\overbrace{(۷۰^\circ + ۱۷۰^\circ)}^{۲۴۰^\circ}}{۲} = (n-۲)\times ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰n = ۱۸۰n - ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰n = ۳۶۰^\circ \Rightarrow n = ۶$$

روش دوم: میانگین $= \frac{\max+\min}{۲}$ پس میانگین $= \frac{۷۰+۱۷۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$ و می‌دانیم میانگین زاویه‌های داخلی در چهارضلعی، پنج ضلعی و شش ضلعی محدب به ترتیب $۹۰^\circ, ۱۰۸^\circ, ۱۲۰^\circ$ است.

۱۵ ۲

می‌توانیم جملات را $a, ar, ar^۲$ بگیریم اما اگر $\frac{x}{r}, x, xr$ بگیریم ظاهراً محاسبات راحت‌تر خواهد شد.

$$\begin{cases} \frac{x}{r} + x + xr = ۲۱ \Rightarrow x\left(\frac{۱}{r} + ۱ + r\right) = ۲۱ \\ \frac{r}{x} + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{xr} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{x}\left(r + ۱ + \frac{۱}{r}\right) = \frac{۷}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲۱}{x} = \frac{۷x}{۱۲} \xrightarrow{\text{ساده}} x^۲ = ۳۶$$

$$x = \pm ۶ \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} \text{جملهٔ وسط } x = +۶ \Rightarrow ۶\left(\frac{۱}{r} + ۱ + r\right) = ۲۱ \Rightarrow \frac{۱}{r} + ۱ + r = \frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{r^۲ + r + ۱}{r} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۲r^۲ + ۲r + ۲ = ۷r \Rightarrow ۲r^۲ - ۵r + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ \Rightarrow r = \frac{۵\pm ۳}{۴}$$

$$\Rightarrow r = ۲ \text{ یا } \frac{۱}{۲}, x = ۶ \Rightarrow \text{جملات دنباله}: ۳, ۶, ۱۲ \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین جمله} = ۱۲$$

نکتهٔ زیر ویژه عشق فرمولی‌هاست.

نکته مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی، $x^۲$ برابر مجموع معکوس آن جملات است که x جملهٔ وسط آن‌ها می‌باشد.

۱۶ ۱

جملات را $x, xr, xr^۲ xr^۳$ فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{حاصل ضرب آنها} = x^۴r^۶ = ۳۲۴ \; ❶ \\ \text{بزرگترین جمله} = xr^۳ = ۱۲ \; ❷ \end{cases} \xrightarrow{\frac{❷}{❶}} \frac{x^۴r^۶}{xr^۳} = \frac{۳۲۴}{۱۲} \Rightarrow x^۳r^۳ = ۲۷ \Rightarrow xr = ۳$$

$$xr^۳ = ۱۲ \Rightarrow xr^۳ = xr\times r^۲ = ۳\times r^۲ = ۱۲ \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = \pm ۲$$

۱۷ ۲

داده‌های سؤال
$$\begin{cases} \text{حاصل ضرب پنج متوالی هندسی} = (\text{وسطی})^{۵} = x^{۵} = ۳۲ \Rightarrow x = ۲ \\ \dfrac{x}{r^{۲}} + \dfrac{x}{r} + x + xr + xr^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x\left(\dfrac{۱}{r^{۲}} + \dfrac{۱}{r} + ۱ + r + r^{۲}\right) = ۱۶ \xrightarrow{x=۲} \left(\dfrac{۱}{r^{۲}} + \dfrac{۱}{r} + ۱ + r + r^{۲}\right) = ۸ \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال (مجموع معکوس جملات): $\dfrac{r^{۲}}{x} + \dfrac{r}{x} + \dfrac{۱}{x} + \dfrac{۱}{xr} + \dfrac{۱}{xr^{۲}} = \dfrac{۱}{x}\left(r^{۲} + r + ۱ + \dfrac{۱}{r} + \dfrac{۱}{r^{۲}}\right) = \dfrac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$

روش دوم: $۴ =$ مجموع معکوس جملات $\Rightarrow$ مجموع معکوس جملات $\times ۴ = ۱۶$ $\xrightarrow[\text{جمله وسط}]{x=۲}$ (مجموع معکوس جملات هندسی) $\times x^{۲} =$ مجموع جملات هندسی

۱۸ ۱

$$\begin{cases} a_{۳} + a_{۵} = ۵ \\ a_{۷} + a_{۹} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ar^{۲} + ar^{۴} = ۵ \\ ar^{۶} + ar^{۸} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ar^{۲}(۱ + r^{۲}) = ۵ & ❶ \\ ar^{۶}(۱ + r^{۲}) = ۸۰ & ❷ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم ❷ بر ❶}} \frac{ar^{۶}(۱ + r^{۲})}{ar^{۲}(۱ + r^{۲})} = \frac{۸۰}{۵} \Rightarrow r^{۴} = ۱۶ \xrightarrow[r<۰]{\text{غیرافزایشی}} r = -۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a_{۱} + a_{۲} = a + ar = a(۱ + r) = \frac{۱}{۴} \times (۱ - ۲) = \frac{-۱}{۴}$$

۱۹ ۲

توجه داشته باشید سؤالات ۱۱ و ۱۳ هم چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی بودند، اما لزومی نداشت از فرم

$$\begin{matrix} x - ۳d & , & x - d & , & x + d & , & x + ۳d \\ a & , & b & , & c & , & d \end{matrix}$$

استفاده کنیم و همانطور که دیدید از $a, a + d, a + ۲d, a + ۳d$ استفاده کردیم.

اما در اینجا چون بحث ضرب bc, ad مطرح است، فرم x که ضرب آن اتحاد مزدوج تشکیل می‌دهد بهتر است:

$$\begin{cases} \text{مجموع} = ۱۲ \Rightarrow ۴x = ۱۲ \Rightarrow x = ۳ \\ ad + bc = -۲۲ \Rightarrow (x^{۲} - ۹d^{۲}) + (x^{۲} - d^{۲}) = -۲۲ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۰d^{۲} = -۲۲ \end{cases}$$

$$x = +۳ \Rightarrow ۱۸ - ۱۰d^{۲} = -۲۲ \Rightarrow ۱۰d^{۲} = ۴۰ \Rightarrow d^{۲} = ۴ \Rightarrow d = \pm ۲ \xrightarrow{d>۰} \max = x + ۳d \Rightarrow \max = ۳ + ۶ = ۹$$

اگر $d < ۰$ هم باشد، یعنی $d = -۲$ دنباله کاهشی و بزرگ‌ترین جمله، جملهٔ اول است، یعنی $x - ۳d = ۳ + ۶ = ۹$ می‌شود.

توجه داشته باشید قدرنسبت در این فرم نمایش $۲d = \pm ۴$ است، یعنی جملات دنباله به صورت $-۳, ۱, ۵, ۹$ هستند، $\max = ۹, \min = -۳$ و قدرنسبت ۴ یا ۴- است. جمع جملات ۱۲ و $ad + bc = -۲۲$ است.

۲۰ ۲

با فرض فرد بودن n:

$$\begin{cases} a_{۱}.a_{۲}.a_{۳}\ldots a_{n} = (\text{جمله وسط})^{n} \Rightarrow a_{۱}^{۲}.a_{۲}^{۲}\ldots a_{n}^{۲} = (\text{جمله وسط})^{۲n} = \left((\text{جمله وسط})^{۲}\right)^{n} & ❷ \\ a_{۱}.a_{n} = (\text{جمله وسط})^{۲} & ❶ \end{cases}$$

اگر ❶ را در ❷ جایگذاری کنیم، حاصل ضرب مربعات n جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی، برابر خواهد بود با: $(a_{۱}.a_{n})^{n}$

دقت کنید ما از فرض فرد بودن n صحبت کردیم تا جملهٔ وسط معنی پیدا کرده است اما اگر n زوج باشد، باز هم جذر حاصل ضرب دو جمله وسط را به عنوان واسطه هندسی فرض می‌کنیم و در هر دو حالت رابطه بالا برقرار است.

۲۱ ۴

مشابه این سؤال در تست ۱۰۸ آموزشی حل شده بود!!

$$\frac{a + b}{۲} = ۲\sqrt{ab} \Rightarrow a + b = ۴\sqrt{ab} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^{۲} + ۲ab + b^{۲} = ۱۶ab \Rightarrow a^{۲} - ۱۴ab + b^{۲} = ۰ \xrightarrow[\text{ساخت } \frac{a}{b}]{\div b^{۲}} \frac{a^{۲}}{b^{۲}} - ۱۴\frac{a}{b} + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{b} = x^{۲}} x^{۲} - ۱۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۴ \pm \sqrt{۱۹۲}}{۲} = ۷ \pm ۴\sqrt{۳}$$

در صورت سؤال مطرح شده که $b > a$ است پس کسر $\dfrac{a}{b} < ۱$ بوده و $\dfrac{a}{b} = ۷ - ۴\sqrt{۳}$ است.

۲۲ **۳**

مشابه این سؤال در تست ۱۰۷ آموزشی حل شده بود!!

$$\begin{cases} x,y,z \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲y = x+z \quad ❶ \\ y,x,z \xrightarrow{\text{هندسی}} x^۲ = yz \quad ❷ \end{cases}$$

چون $r=\frac{x}{y}$ را می‌خواهیم از معادله ❶، z را بر حسب x و y به صورت $z=۲y-x$ نوشته و در معادلهٔ ❷ جایگذاری می‌کنیم:

$$x^۲ = y(۲y-x) \Rightarrow x^۲ = ۲y^۲ - xy \xrightarrow{\div} \frac{x}{-} = ۲ - \frac{x}{-}$$

$$\xrightarrow{\frac{x}{y}=r} r^۲ + r - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۱ \Rightarrow \text{غ ق ق} \Rightarrow \text{گفته شده جملات متمایز!!} \\ r=-۲ \ \text{ق ق} \end{cases}$$

۲۳ **۲**

افزایشی بودن دنباله‌ها به معنی $a<b<c<d$ است و خواستهٔ سؤال، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $r=\frac{b}{a}$ است.

$$\begin{cases} a,b,d \xrightarrow{\text{هندسی}} b^۲ = ad \quad ❶ \\ a,b,c,d \xrightarrow{\text{حسابی}} \begin{cases} ۲b = a+c \\ ۲c = b+d \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } c} ۲(۲b-a) = b+d \Rightarrow ۳b = ۲a+d \quad ❷ \end{cases}$$

چون $r=\frac{b}{a}$ را می‌خواهیم پس باید d را حذف کنیم از رابطهٔ ❶ داریم: $d=\frac{b^۲}{a}$، آن را در رابطهٔ ❷ می‌گذاریم:

$$۳b = ۲a + \frac{b^۲}{a} \xrightarrow{\div a} \frac{۳b}{a} = ۲ + \frac{b^۲}{a^۲} \xrightarrow{\frac{b}{a}=r} ۳r = ۲ + r^۲ \Rightarrow r^۲ - ۳r + ۲ = ۰ \Rightarrow (r-۱)(r-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۱ \ \text{غ ق ق} \\ r=۲ \ \text{ق ق} \end{cases}$$

۲۴ **۳**

در واقع باید شرط حسابی بودن را روی گزینه‌ها پیاده کنیم و گزینه‌ای که به $b^۲=ac$، یعنی شرط هندسی بودن a، b و c برسد، درست است.

گزینهٔ (۱): $۲^a, ۲^b, ۲^c \Rightarrow ۲\times ۲^b = ۲^a + ۲^c \Rightarrow$ بی‌فایده!!!

یادتونه برعکس بود، یعنی اگر a، b و c حسابی بودند، $۲^a, ۲^b, ۲^c$ هندسی می‌شدند!

گزینهٔ (۲): $۲\times\frac{۱}{a+c} = \frac{۱}{a+b} + \frac{۱}{b+c} \xrightarrow[\text{ساده کردن}]{\text{سوال ۲۶ آزمون جامع (۲)}} ۲b^۲ = a^۲ + c^۲$

پس در این گزینه $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$ حسابی‌اند اما a، b و c هندسی نیستند.

گزینهٔ (۳): $۲\times\frac{۱}{۲b} = \frac{۱}{a+b} + \frac{۱}{b+c} \xrightarrow[\text{ساده کردن}]{\text{سوال ۱۰۳ آموزشی}} b^۲ = ac \Rightarrow$ a، b و c هندسی‌اند.

گزینهٔ (۴): $\text{Log}a, \text{Log}c, \text{Log}b \Rightarrow ۲\text{Log}c = \text{Log}a + \text{Log}b \Rightarrow c^۲ = ab$

دقت کنید a، c و b هندسی‌اند اما a، b و c هندسی نیستند. اگر در گزینهٔ (۴) $\text{Log}b$ در وسط قرار می‌گرفت درست بود.

۲۵ **۲**

$$\begin{cases} ۳,a,b \xrightarrow{\text{حسابی}} ۲a = b+۳ \Rightarrow b = ۲a-۳ \quad ❶ \\ a,b,۸ \xrightarrow{\text{هندسی}} b^۲ = ۸a \xrightarrow{\text{جایگذاری ❶}} (۲a-۳)^۲ = ۸a \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ - ۱۲a + ۹ = ۸a \Rightarrow ۴a^۲ - ۲۰a + ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵۶ \Rightarrow a = \frac{۲۰\pm ۱۶}{۸}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲} \ \text{ق ق} \\ \text{یا} \\ a = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۲a-۳ = ۱-۳ = -۲ \ \text{غ ق ق} \xrightarrow{\text{باید}} a,b>۰ \end{cases}$$

۲۶ **۳**

$$\begin{cases} \text{در دنبالهٔ حسابی}: a_۲ = ۳, a_۴ = ۱۱ \Rightarrow d = \frac{۱۱-۳}{۴-۲} = \frac{۸}{۲} = ۴ \Rightarrow a = -۱, a+b = ۷ \Rightarrow b = ۸ \\ \text{در دنبالهٔ هندسی}: b, a+c, ۲, \ldots \xrightarrow[a=-۱]{b=۸} ۸, c-۱, ۲, \ldots \Rightarrow (c-۱)^۲ = ۱۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow c-۱ = \pm ۴ \xrightarrow{\text{غیر نزولی}} c-۱ = -۴ \Rightarrow c = -۳$$

۲۷ ۱

شما دانش‌آموز عزیزی که در این حد ریاضی با پایهٔ قوی داری که الان مشغول حل آزمون جامع (۳) هستی، باید توجه داشته باشی که وقتی در درسنامهٔ (۲۷) گفته شد اگر جملات a_n، a_m و a_k حسابی سه جملهٔ متوالی هندسی باشند، آنگاه، $r=\frac{k-m}{m-n}$.

قرار نیست دنبالهٔ حسابی، هر دنبالهٔ حسابی دلخواهی باشد، بلکه یک رابطهٔ خاص بین a و d آن دنبالهٔ حسابی باید برقرار باشد. حال اگر این رابطه برقرار نباشد با اضافه کردن مقدار ثابتی به جملات حسابی این رابطه برقرار خواهد شد و این سؤال در مورد آن مقدار ثابت صحبت کرده است پس به هر حال با این شرایط در این سؤال قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $\frac{۳}{۲}=\frac{۷-۴}{۴-۲}=r$ خواهد شد. اگر فقط r را خواسته بود پاسخ سؤال در همین جا تمام بود و نیازی به پیدا کردن آن مقدار ثابت اضافه شده نبود، اما در اینجا که جملهٔ ششم هندسی مدنظر است، باید آن مقدار ثابت را به‌دست آوریم:

$$-۵,-۲,\ldots \xrightarrow{d=+۳} \begin{cases} a_۲=a+d=-۲ \\ a_۴=a+۳d=-۵+۹=۴ \\ a_۷=a+۶d=-۵+۱۸=۱۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+x} x-۲,x+۴,x+۱۳ \xrightarrow{\text{هندسی}} (x+۴)^۲=(x-۲)\times(x+۱۳) \Rightarrow x=\cdots$$

یا $r=\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۱۴\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی: $۱۲,۱۸,۲۷,\ldots \Rightarrow$ جملهٔ ششم هندسی $t_۶=ar^۵=۱۲\times\left(\frac{۳}{۲}\right)^۵=۱۲\times\frac{۲۴۳}{۳۲}=\frac{۷۲۹}{۸}$

۲۸ ۱

$$\begin{cases} a,b,c \xrightarrow{\text{حسابی}} \begin{cases} ۲b=a+c \\ a+b+c=۳b=۱۵\Rightarrow b=۵\Rightarrow a+c=۱۰ \end{cases} \\ a+۴,b+۷,c+۱۶ \xrightarrow[c=۱۰-a]{b=۵} a+۴,۱۲,۲۶-a \xrightarrow{\text{هندسی}} ۱۴۴=(a+۴)(۲۶-a) \end{cases}$$

$$۱۴۴=۲۶a-a^۲+۱۰۴-۴a \to a^۲-۲۲a+۴۰=۰\Rightarrow (a-۲)(a-۲۰)=۰$$

$$\begin{cases} a=۲\Rightarrow c=۱۰-a=۸ \xrightarrow[\text{ق ق}]{\text{سه جمله هندسی}} ۶,۱۲,۲۴\Rightarrow r=۲ \\ \text{یا} \\ a=۲۰\Rightarrow c=۱۰-۲۰=-۱۰ \text{ غ ق ق} \xrightarrow{\text{باید}} a,b,c>۰ \end{cases}$$

۲۹ ۱

در سؤال ۴ آزمون جامع (۲)، برای حالت خاص $a_n=m, a_m=n$ مقدار a_{m+n} را صفر به‌دست آوردیم، در اینجا نیز $a_{m+n}=۰$ خواهد شد.

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{n}{m}\Rightarrow\frac{a+(m-۱)d}{a+(n-۱)d}=\frac{n}{m}\Rightarrow ma+\left(m^۲-m\right)d=na+\left(n^۲-n\right)d$$

$$\Rightarrow ma-na+\left(m^۲-m\right)d-\left(n^۲-n\right)d=۰$$

$$\Rightarrow (m-n)a+\big(\underbrace{m^۲-n^۲-m+n}_{(m-n)(m+n)-(m-n)}\big)d=۰\Rightarrow (m-n)\left[a+(m+n-۱)d\right]=۰ \xrightarrow{m\neq n} a+(m+n-۱)d=۰\Rightarrow a_{m+n}=۰$$

۳۰ ۴

$$\begin{cases} a_{n-۱}-a_{n+۱}=۴\Rightarrow a_{n+۱}-a_{n-۱}=۲d=-۴\Rightarrow d=-۲ \\ a_۵=-a_{۱۲}\Rightarrow a_۵+a_{۱۲}=۰\Rightarrow a+۴d+a+۱۱d=۰\Rightarrow ۲a+۱۵d=۰ \xrightarrow[a=۱۵]{d=-۲} a_{۲۰}=a+۱۹d=۱۵-۳۸=-۲۳ \end{cases}$$

۳۱ ۱

$$\begin{cases} a_1a_3=4 \Rightarrow a_2=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \\ a_3a_5=16 \Rightarrow a_4=\pm\sqrt{16}=\pm 4 \end{cases}$$

$a_1, 2, a_3, 4, a_5 \Rightarrow$ ۲ حالت دارد $\Rightarrow$ { همه جملات مثبت / جملات شماره فرد منفی باشند }

$a_1, -2, a_3, -4, a_5 \Rightarrow$ ۲ حالت دارد $\Rightarrow$ { همه جملات منفی / جملات شماره فرد مثبت }

$\begin{cases} a_1, 2, a_3, -4, a_5 \\ a_1, -2, a_3, 4, a_5 \end{cases} \Rightarrow$ غیر ممکن است.

باید علامت جملات با شمارهٔ فرد مثل هم و علامت جملات با شمارهٔ زوج نیز مثل هم باشند. پس در کل ۴ حالت مختلف یا ۴ دسته جواب برای این دنباله وجود دارد.

۳۲ ۱

$$3^a, 3\sqrt{3}, 9, b \xrightarrow{\text{هندسی}} r=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Rightarrow 3^a, 3\sqrt{3}, 9, b \Rightarrow 3^a=3 \Rightarrow a=1, b=9\sqrt{3}$$

خواستهٔ مسئله واسطهٔ هندسی بین $a\sqrt{3}$ و b است:

$$\begin{cases} b=9\sqrt{3} \\ a\sqrt{3}=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{واسطه هندسی دو عدد مثبت}=\sqrt{\text{حاصل ضرب آنها}}=\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

۳۳ ۴

$$\sqrt{3}, a, 6-4\sqrt{3} \xrightarrow{\text{هندسی}} a^2=\sqrt{3}\times\left(6-4\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}-12$$

دقت کنید $\left(6\sqrt{3}-12\right)$ منفی است و a^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود پس گزینهٔ (۴) درست است.

از همان ابتدا هم می‌توان گفت چون در دنبالهٔ هندسی جملات فرد هم علامت و جملات با شمارهٔ زوج نیز هم علامت‌اند و در این سؤال $\sqrt{3}$ عددی مثبت اما $6-4\sqrt{3}$ منفی است، پس این دنباله هیچ‌گاه هندسی نیست.

۳۴ ۴

$$a+b+c=12 \xrightarrow{a+c=2b} 3b=12 \Rightarrow b=4, a+c=2\times 4=8$$

$$ab+bc=b(a+c)=4\times 8=32$$

این هم از آخرین سؤال فصل ۲. امیدوارم این فصل رو به خوبی یاد گرفته باشید و به اندازهٔ کافی تا کنکور مرور کنید.

۳۵ ۳

$$\begin{cases} 3 \text{ و } b \text{ و } c \xrightarrow{\text{حسابی}} 2b=3+c \Rightarrow c=2b-3 \quad (1) \\ 3 \text{ و } b-1 \text{ و } c+1 \xrightarrow{\text{هندسی}} (b-1)^2=3(c+1) \xrightarrow[(1)]{\text{جایگذاری}} (b-1)^2=3(2b-3+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2-2b+1=3(2b-2)=6b-6 \Rightarrow b^2-8b+7=0$$

$$\Rightarrow (b-1)(b-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \text{ و } c=-1 \\ \text{یا} \\ b=7 \text{ و } c=11 \end{cases}$$

حالت اوّل: $b=1 \text{ و } c=-1 \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ و } 1 \text{ و } -1 \Rightarrow d=-2 \\ 3 \text{ و } 0 \text{ و } 0 \Rightarrow r=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{r} \Rightarrow$ تعریف‌نشده

حالت دوّم: $b=7 \text{ و } c=11 \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ و } 7 \text{ و } 11 \Rightarrow d=4 \\ 3 \text{ و } 6 \text{ و } 12 \Rightarrow r=2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d}{r}=\dfrac{4}{2}=2$. گزینهٔ (۳) درست است.