

۷۸. **گزینه ۲** $t_n = mn^2 - mn + 2n^2 - 2 = (m+2)n^2 - mn - 2$

دنباله‌ی داده‌شده، خطی است؛ پس ضریب n^2 باید صفر باشد، یعنی:

$$m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow t_n = 2n^2 - 2$$

$$t_n = 46 \Rightarrow 2n^2 - 2 = 46 \Rightarrow n = 24$$

بنابراین جمله‌ی بیست و چهارم برابر ۴۶ است.

۷۹. **گزینه ۲** در شکل اول ۳ نقطه، در شکل دوم ۵ نقطه و در شکل سوم ۸

نقطه دیده می‌شود که الگوی زیر را می‌توان بیان کرد:

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 5 = 3 + 2 = \text{شماره‌ی جمله} + \text{جمله‌ی قبلی}$$

$$t_3 = 8 = 5 + 3 = \text{شماره‌ی جمله} + \text{جمله‌ی قبلی}$$

بنابراین، با همین الگو جملات را تا جمله‌ی هفتم می‌نویسیم:

$$3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, \dots$$

۸۰. **گزینه ۳** با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که تعداد گلوله‌های توپ در هر شکل یک واحد از شماره‌ی شکل بیشتر است، ببین:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...	۱۷
تعداد گلوله‌های توپ	۲	۳	۴	...	۱۸

۸۱. **گزینه ۲** با کمی دقت می‌توان به الگوی زیر دست یافت:

شکل (۱): $t_1 = 2$

تعداد چوب‌کبریت‌های شکل قبل + شماره‌ی جمله

شکل (۲): $t_2 = 4 = 2 + 2$

شکل (۳): $t_3 = 7 = 3 + 4$

طبق این الگو، جملات دنباله (تعداد چوب‌کبریت‌ها) را تا جمله‌ی هفتم می‌نویسیم:

۸۲. **گزینه ۳** دنباله‌ای رو که تعداد صندوق‌ها را در هر ردیف نمایش می‌دهد

$$2, 5, 8, \dots$$

بنابراین اگر با همین الگو پیش برویم، داریم:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \dots \Rightarrow t_5 + t_8 = 14 + 23 = 37$$

۸۳. **گزینه ۱** با توجه به فرض‌های مسئله، داریم: $t_5 = -25, t_7 = 2$ ، خوب، فقط کافی‌ه جای‌گذاری کنید:

$$t_n = an^2 + bn \Rightarrow \begin{cases} n=2 \Rightarrow t_2 = a(2)^2 + b \times 2 \\ t_2=2 \Rightarrow 2 = 4a + 2b \\ n=5 \Rightarrow t_5 = a(5)^2 + b \times 5 \\ t_5=-25 \Rightarrow -25 = 25a + 5b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 4a + 2b \\ -25 = 25a + 5b \end{cases} \xrightarrow{\times(-\frac{5}{2})} \begin{cases} -5 = -10a - 5b \\ -25 = 25a + 5b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع کن}} -30 = 15a \Rightarrow a = -2 \xrightarrow{\text{با } a=-2 \text{ رو جایگزین کن}} 4a + 2b = 2$$

$$4 \times (-2) + 2b = 2 \Rightarrow -8 + 2b = 2 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$$\Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5 \xrightarrow{\text{با } b=5 \text{ رو جایگزین کن در } t_n} t_n = -2n^2 + 5n$$

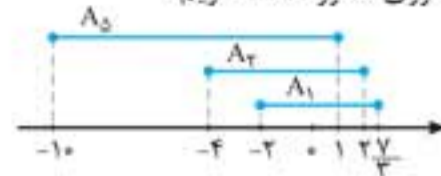
$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} t_7 = -2 \times 7^2 + 5 \times 7 = -98 + 35 = -63$$

۸۴. **گزینه ۲** با کمی دقت می‌توان رابطه‌ی بین جملات را پیدا کرد. خب! چرا عصبانی می‌شی، صبر کن تا برات توضیح بدم. جمله‌ی اول که هستش،

۷۳. **گزینه ۱**

$$A_n = [-2n, \frac{A-n}{3}] \Rightarrow \begin{cases} A_7 = [-4, 2] \\ A_5 = [-10, 1] \\ A_1 = [-2, \frac{1}{3}] \end{cases}$$

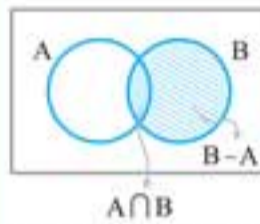
با نمایش هر سه بازه روی محور اعداد، داریم:



$$(A_7 \cap A_5) = [-4, 1] \Rightarrow (A_7 \cap A_5) - A_1 = [-4, 1] - [-2, \frac{1}{3}] = [-4, -\frac{2}{3}]$$

۷۴. **گزینه ۱**

با توجه به نمودار ون مقابل داریم:



$$(B \cap A) \cup (B - A) = B$$

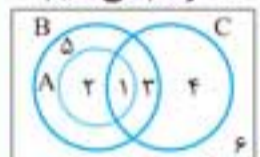
از طرفی چون $A \cap B \subseteq A$ است، پس

$$A \cup (A \cap B) = A$$

می‌توان این رابطه را به دست آورد.

$$\text{بنابراین: } [A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)] = A' \cap B = A' - B'$$

۷۵. **گزینه ۱** روش اول نمودار ون را با شرط $A \subseteq B$ رسم می‌کنیم:



$$B - C = \{2, 5\}$$

$$A \cap (B - C) = \{2, 1\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$$

$$A \cap B \cap C = \{1\}$$

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = \{2\} - \{1\} = \{2\}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام یک برابر با مجموعه‌ی $\{2\}$ می‌شود:

گزینه ۱: $A \cap C' = \{1, 2\} \cap \{2, 5, 6\} = \{2\}$ ✓

گزینه ۲: $A \cap C = \{1\}$ ✗

گزینه ۳: $A = \{1, 2\}$ ✗

گزینه ۴: $B = \{1, 2, 3, 5\}$ ✗

روش دوم:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = (A \cap C') - (A \cap C) = A \cap C'$$

۷۶. **گزینه ۳**

$$\begin{cases} 9 \leq 10 \xrightarrow{\text{ضابطه‌ی اولی}} t_9 = 9^2 - 9 = 81 - 9 = 72 \\ 11 > 10 \xrightarrow{\text{ضابطه‌ی دومی}} t_{11} = 2 \times 11 + 1 = 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_9 + t_{11} = 72 + 23 = 95$$

۷۷. **گزینه ۴** روش اول جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به صورت

$$t_n = an + b \text{ است، بنابراین: } \begin{cases} n=1 \xrightarrow{\text{جمله‌ی اول}} 5 = a \times 1 + b \\ n=8 \xrightarrow{\text{جمله‌ی هشتم}} -16 = a \times 8 + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از هم کم کن و دستگاه رو حل کن}} -16 - 5 = 8a - a \Rightarrow -21 = 7a \Rightarrow a = -3$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزین کن}} a + b = 5 \Rightarrow -3 + b = 5 \Rightarrow b = 8$$

$$\xrightarrow{\text{با } a \text{ و } b \text{ رو جایگزین کن}} t_n = an + b \Rightarrow t_n = -3n + 8$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی دهم}} n=10 \Rightarrow t_{10} = -3 \times 10 + 8 = -22$$

روش دوم الگوی عددی خطی، همان دنباله‌ی حسابی است. از آنجایی که $t_8 = -16, t_1 = 5$ از فرمول دو جمله و شماره داریم:

$$d = \frac{t_8 - t_1}{8 - 1} = \frac{-16 - 5}{7} = -3$$

بنابراین:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \xrightarrow{n=10} t_{10} = t_1 + 9d = 5 + 9(-3) = -22$$



روش دوم اگر چند جمله‌ی اول این دنباله را بنویسیم، به یک الگوی هندسی برخورد می‌کنیم، **بیین:**

$$3, 4, 6, 10, 18$$

$\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+4}$ $\xrightarrow{+8}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۲ داده است. اگر دنباله‌ی اختلاف جملات را با b_n نمایش دهیم، جملات b_n به صورت روبه‌رو خواهند بود: $b_n: 1, 2, 4, 8, \dots$ می‌دانیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی که قدرنسبت آن ۲ و جمله‌ی آغازین ۱ دارد به صورت زیر قابل بیان است:

$$b_n = b_1 r^{n-1} \xrightarrow{b_1=1, r=2} b_n = (1) \times 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}$$

البته باید توجه کنید که در دنباله‌ی اختلاف جملات (b_n) ، جمله‌ی اول $t_1 - t_1$ ، جمله‌ی دوم $t_2 - t_1$ و به همین ترتیب این الگو ادامه پیدا می‌کند پس برای محاسبه‌ی $t_8 - t_7$ باید جمله‌ی هفتم دنباله‌ی b_n را بیابیم:

$$b_n = 2^{n-1} \xrightarrow{n=7} b_7 = t_8 - t_7 = 2^{7-1} = 2^6 = 64$$

تذکره: روش دوم موقعی اهمیت پیدا می‌کند که طراح سؤال

می‌پرسیدند که به فرض $t_9 - t_8$ کدام است؟

گزینه ۳ با توجه به رابطه‌ی داده‌شده داریم:

$$t_n - t_{n-1} = 0 \Rightarrow t_n = t_{n-1}$$

حال اگر رابطه‌ی $t_n = t_{n-1}$ را به صورت یک عبارت جبری بخوانیم، داریم: «در دنباله‌ی داده‌شده، هر جمله، مکعب جمله‌ی قبل از خود است.»

این جوری هم بیین:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_n = t_{n-1}^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2: t_2 = t_1^3 = 2^3 \\ n=3: t_3 = t_2^3 = (2^3)^3 = 2^9 \\ n=4: t_4 = t_3^3 = (2^9)^3 = 2^{27} \\ n=5: t_5 = t_4^3 = (2^{27})^3 = 2^{81} \end{cases}$$

گزینه ۳

$$t_n > 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{n-100}{3n+1} + \frac{1}{20} > 0 \xrightarrow{\text{جایگزین کن}}$$

$$\frac{20n - 2000 + 3n + 1}{20(3n+1)} > 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{23n - 1999}{20(3n+1)} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج کسر همواره مثبت است چون } n \text{ عددی طبیعی است}} 23n - 1999 > 0 \Rightarrow 23n > 1999$$

$$\Rightarrow n > \frac{1999}{23} \Rightarrow n > 86.91 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 87$$

بنابراین جمله‌ی مثبت دنباله، جمله‌ی هشتم و هفتم است.

گزینه ۲ جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است (همون معادله‌ی خط).

$$\begin{cases} t_4 = 8 \\ t_9 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{در } t_n \text{ قرار بده}} \begin{cases} t_4 = 4a + b = 8 \\ t_9 = 9a + b = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم کن}} 9a - 4a = -2 - 8 \Rightarrow 5a = -10$$

$$\Rightarrow a = -2 \xrightarrow{\text{در } 4a + b = 8 \text{ جایگزین کن}} 4 \times (-2) + b = 8 \Rightarrow -8 + b = 8$$

$$\Rightarrow b = 8 + 8 = 16 \xrightarrow{\text{در } t_n \text{ قرار بده}} t_n = -2n + 16$$

تست از ما خواسته که مشخص کنیم الگو چند جمله‌ی مثبت دارد، یعنی باید نامعادله‌ی $t_n > 0$ را حل کنیم:

$$-2n + 16 > 0 \Rightarrow -2n > -16 \xrightarrow{+(-2)} n < 8$$

یعنی هفت جمله‌ی اول این الگو، مثبت هستند.

گزینه ۲ جمله‌ی عمومی الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است، پس:

$$\begin{cases} t_1 = a \times 1 + b = 10a + b & 1 \\ t_{18} = a \times 18 + b = 18a + b & 2 \end{cases}$$

در جملات بعدی، شماره‌ی جمله‌شون با جمله‌ی قبلی جمع می‌شه. **بیین:**

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$$

$\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+4}$ $\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+6}$ $\xrightarrow{+7}$ $\xrightarrow{+8}$ $\xrightarrow{+9}$

$$\Rightarrow t_7 + t_9 = 28 + 45 = 73$$

گزینه ۳ روش اول دقت کنید که جملات، یک در میان منفی و مثبت هستند، پس باید در جمله‌ی عمومی دنباله، عبارت $(-1)^n$ وجود داشته باشد، برای این که:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{های فرد } n \\ 1 & \text{های زوج } n \end{cases}$$

اگر از منفی صرف‌نظر کنیم، مشاهده می‌کنیم که صورت کسر، یک واحد یک واحد اضافه شده است، پس در صورت کسر باید $(-1)^n$ داشته باشیم. اعداد مخرج هم، همگی به فرم $n^2 + 1$ هستند. **بیین:**

$$\begin{cases} 2 = 1^2 + 1 \\ 5 = 2^2 + 1 \\ 10 = 3^2 + 1 \\ \vdots \\ n^2 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا جمله‌ی عمومی رو بنویس}} t_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$$

به نظر شما اگر اولین جمله مثبت بود و جمله‌ی دوم منفی و به همین ترتیب جملات یک در میان مثبت و منفی می‌شد، جمله‌ی عمومی دنباله چی می‌شد؟

روش دوم جمله‌ی دوم دنباله، $\frac{2}{5}$ است؛ یعنی: $t_2 = \frac{2}{5}$

فقط در **گزینه ۳** این شرط برقرار است.

گزینه ۳ کافی است t_n را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{2^{n^2-9n-10} - 1}{n+7} = 0 \xrightarrow{\text{کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد}} 2^{n^2-9n-10} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2^{n^2-9n-10} = 1 \xrightarrow{\text{باید هارویکی کن}} 2^{n^2-9n-10} = 2^0$$

$$\Rightarrow n^2 - 9n - 10 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (n+1)(n-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -1 & \text{غ ق ق} \\ n = 10 \end{cases}$$

بنابراین جمله‌ی دهم دنباله برابر صفر است.

گزینه ۳ خب! کافیست هر دو جمله‌ی عمومی را با هم برابر بگذاریم:

$$a_n = b_n \Rightarrow \frac{n}{n^2+5} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n^2 + 5 = n^2 + n \Rightarrow n = 5$$

یعنی جمله‌ی پنجم دو دنباله‌ی a_n و b_n برابر است.

گزینه ۲ جملات این دنباله تقریباً رفتاری شبیه دنباله‌ی فیبوناچی دارند

با این تفاوت که جمله‌های اول و دوم آن هر دو ۱ نیست. در این دنباله جمله‌های اول و دوم به ترتیب ۱ و ۲ بوده و جملات بعدی مجموع دو جمله‌ی قبلی است، یعنی:

$$n \geq 3: t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$$

بنابراین جمله‌ی بعدی مجموع ۸ و ۱۳ یعنی ۲۱ است.

گزینه ۴ روش اول هشت جمله‌ی نخست این دنباله را می‌نویسیم:

$$t_n = 2t_{n-1} - 2, t_1 = 3$$

$$\xrightarrow{n=2} t_2 = 2t_1 - 2 = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$\xrightarrow{n=3} t_3 = 2t_2 - 2 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، جملات این دنباله به صورت زیر خواهند بود:

$$3, 4, 6, 10, 18, 24, 42, 72, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_8 = 130 \\ t_7 = 66 \end{cases} \Rightarrow t_8 - t_7 = 130 - 66 = 64$$

شماره‌ی شکل	۴	...	n
تعداد مربع‌ها	۱+۲+۳+۴	...	۱+۲+۳+...+n

طبق الگوی داده‌شده، در شکل n ام تعداد مربع‌ها برابر مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n خواهد بود.

نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی الگوی داده‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{\text{با } n=8 \text{ بنابر}} t_8 = \frac{8 \times (8+1)}{2} = 4 \times 9 = 36$$

۹۷. گزینه ۳ در الگوی داده‌شده، مربع‌های میانی، نمایش دهنده‌ی اعداد مربع کامل‌اند. در شکل (۱)، چیزی به یک اضافه نشده، اما در شکل (۲)، یک مربع، در شکل (۳)، دو مربع و در شکل (۴)، سه مربع اضافه شده است. بنابراین در هر شکل تعداد مربع‌های اضافه‌شده از شماره‌ی شکل یک واحد کمتر است؛ پس جمله‌ی عمومی زیر را می‌توان برای این الگو در نظر گرفت:

$$t_n = n^2 + (n-1) \xrightarrow{\text{به عنوان مثال } n=4} t_4 = 4^2 + 4 - 1 = 19 \quad \checkmark \text{ (شکل (۴))}$$

$$t_{12} = 12^2 + 12 - 1 = 144 + 11 = 155$$

۹۸. گزینه ۱ فرض مسئله این است که $t_n > 0$ باشد:

$$t_n > 0 \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو جایگزین کن}} 8 \cdot n - 5n^2 > 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتور بگیر}} \Delta n(16-n) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{نامعادله رو حل کن}} 8 \cdot n - 5n^2 = 0$$

n	-∞	0	16	+∞
t _n	-	0	+	-

جدول تعیین علامت

$$\Rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=16 \end{cases}$$

جواب رو بنویس $0 < n < 16$

بین صفر و ۱۶، پانزده عدد طبیعی وجود دارد، یعنی دنباله‌ی داده‌شده، ۱۵ جمله‌ی مثبت دارد. همان‌طور که می‌دانید تعداد اعداد صحیح در بازه‌ی (m, n) برابر است با:

۹۹. گزینه ۴ روش اول همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جملات زوج این دنباله صفرند و این مطلب فقط در گزینه‌ی «۴» دیده می‌شود:

$$t_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{4n} \Rightarrow \begin{cases} n=1: t_1 = \frac{1+(-1)^2}{4 \times 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ n=2: t_2 = \frac{1+(-1)^3}{4 \times 2} = \frac{1-1}{8} = \frac{0}{8} = 0 \\ n=3: t_3 = \frac{1+(-1)^4}{4 \times 3} = \frac{1+1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\ n=4: t_4 = \frac{1+(-1)^5}{4 \times 4} = \frac{1+(-1)}{16} = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$$

در گزینه‌ی «۱» جملات یک در میان، مثبت و منفی هستند. در گزینه‌های «۲» و «۳» هم، همه‌ی جملات در حال تغییرند.

روش دوم در دنباله‌ی داده‌شده $t_2 = 0$ است و تنها گزینه‌ای که در این شرط صدق می‌کند، گزینه‌ی «۴» است.

۱۰۰. گزینه ۱ جمله‌های اول و دوم این دنباله برابر ۱ و جمله‌ی سوم آن برابر ۲ است. برای $n \geq 4$ ، هر جمله از ضرب دو جمله‌ی قبلی به دست آمده است، بنابراین می‌توان رابطه‌ی زیر را برای دنباله‌ی داده‌شده نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1, \quad t_3 = 2 \\ n \geq 4 \Rightarrow t_n = t_{n-1} \times t_{n-2} \end{cases}$$

پس اگر همین الگو را دنبال کنیم، جملات بعدی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$1, 1, 2, 2, 4, 8, 22, 256, 256 \times 22, 256 \times 22 \times 256$$

$$\xrightarrow{8 \times 4 \quad 22 \times 8} t_4 = t_3 \times t_2 \quad t_5 = t_4 \times t_3$$

$$\Rightarrow t_{10} = 256 \times 22 \times 256 = 2^8 \times 2^5 \times 2^8 = 2^{21}$$

$$\frac{2t_{10} + t_{18}}{4} \xrightarrow{\text{۱ و ۲}} \frac{2(10a+b) + (18a+b)}{4}$$

$$= \frac{20a + 2b + 18a + b}{4} = \frac{38a + 3b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{38a}{4} + \frac{3b}{4} = 12a + b \xrightarrow{\text{مقایسه با } t_n = an+b} n = 12$$

بنابراین عبارت داده‌شده با جمله‌ی دوازدهم الگو برابر است.

۹۴. گزینه ۴ دنباله‌ی شامل تمام مربع‌های موجود در هر شکل (مربع‌های رنگی و سفید) به صورت مقابل است:

در هر شکل به ترتیب به اندازه‌ی $2^2, 1^2, 0^2$ و... از کل مربع‌ها سفید است؛ تعداد مربع‌های سفید

بنابراین تعداد مربع‌های رنگی در هر شکل برابر است با:

شماره‌ی شکل	تعداد کل مربع‌ها	تعداد مربع‌های سفید	تعداد مربع‌های رنگی
۱	۲ ^۲	۰ ^۲	۲ ^۲ - ۰ ^۲
۲	۳ ^۲	۱ ^۲	۳ ^۲ - ۱ ^۲
۳	۴ ^۲	۲ ^۲	۴ ^۲ - ۲ ^۲
⋮	⋮	⋮	⋮
n	(n+1) ^۲	(n-1) ^۲	t _n = (n+1) ^۲ - (n-1) ^۲

$$\xrightarrow{\text{t}_n \text{ رو تجزیه کن}} t_n = ((n+1) + (n-1))((n+1) - (n-1))$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n = (2n)(2) \Rightarrow t_n = 4n$$

$$\xrightarrow{\text{t}_n \text{ را برابر ۱۴۴ قرار بده}} t_n = 144 \Rightarrow 4n = 144 \xrightarrow{\div 4} n = 36$$

۹۵. گزینه ۳ روش اول اگر به هر شکل ۴ نقطه اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل‌ها، مربع کامل می‌شود، بنابراین برای پیدا کردن تعداد نقاط هر شکل، کافی است از اعداد مربع کامل ۴ واحد کم کنیم:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	۳ ^۲ - ۴ = ۵	۴ ^۲ - ۴ = ۱۲	۵ ^۲ - ۴ = ۲۱	...	(n+۲) ^۲ - ۴

بنابراین جمله‌ی عمومی این الگوری می‌توان به صورت $t_n = (n+۲)^2 - ۴$ در نظر گرفت:

$$\xrightarrow{\text{t}_n \text{ رو ساده کن}} t_n = n^2 + 4n + 4 - 4 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$$

$$\xrightarrow{\text{n رو برابر ۱۰}} t_{10} = 10^2 + 4 \times 10 = 100 + 40 = 140$$

روش دوم:

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	۵	۱۲	۲۱	...	
الگو	۲ ^۲ + ۱	۳ ^۲ + ۳	۴ ^۲ + ۵	...	t _n = (n+1) ^۲ + (2n-1)

$$\Rightarrow t_n = (n+1)^2 + (2n-1) = n^2 + 2n + 1 + 2n - 1$$

$$t_n = n^2 + 4n \Rightarrow t_{10} = 10^2 + 4(10) = 100 + 40 = 140$$

۹۶. گزینه ۲ تعداد مربع‌های هر شکل را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم الگوری را رعایت کنیم:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳
تعداد مربع‌ها	۱	۱+۲	۱+۲+۳



بنابراین با توجه به جمله‌ی عمومی کاشی‌های سفید، مشخص می‌کنیم در شکل چندم ۱۰۰ کاشی سفید داریم:

$$b_n = 2n \xrightarrow{b_n=100} 100 = 2n \Rightarrow n = 50$$

حالا کافی است در الگوی کاشی‌های تیره، به جای n قرار دهیم ۵۰:

$$t_n = 2(n+2) \xrightarrow{n=50} t_{50} = 2(50+2) = 2 \times 52 = 104$$

۱.۵. **گزینه ۳** فرض کنیم t_n ، تعداد مربع‌های رنگی هر شکل باشد؛ در این صورت:

$$t_2 - t_1 = 10 - 4 = 6 = 2(3)$$

$$t_3 - t_2 = 18 - 10 = 8 = 2(4)$$

⋮

$$t_4 - t_3 = 2(4) = 8$$

۱.۶. **گزینه ۴** دنباله‌ی تعداد مربع‌های رنگ‌شده را می‌نویسیم:

$$1, 3, 6, 10, \dots$$

دنباله‌ی فوق، همان دنباله‌ی معروف مثلثی است که جمله‌ی عمومی آن از

$$\text{رابطه‌ی } t_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ به دست می‌آید:}$$

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{\text{برای } n=8} t_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 4 \times 9 = 36$$

۱.۷. **گزینه ۲** ابتدا الگوی مناسبی برای تعداد مثلث‌های سفید و رنگی پیدا می‌کنیم. برای این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

شکل	n	۱	۲	۳	۴
تعداد مثلث‌های رنگی	a_n	۱	۳	۶	۱۰
تعداد مثلث‌های سفید	b_n	۰	۱	۳	۶
مجموع کل مثلث‌ها	u_n	۱	۴	۹	۱۶

حالا خودمان **شکل (۴)** را با همین الگو رسم می‌کنیم؛ سپس اعداد آن را در جدول بالا وارد می‌کنیم:



شکل (۴)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{تعداد مثلث‌های رنگی} = 10 \\ \text{تعداد مثلث‌های سفید} = 6 \end{cases}$$

همان‌طور که تا حالا متوجه شدید، تعداد مثلث‌های رنگی، جملات دنباله‌ی مثلثی هستند، بنابراین:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

از طرفی مجموع کل مثلث‌ها در هر مرحله، جملات دنباله‌ی مربعی هستند، یعنی:

$$u_n = n^2$$

در نتیجه جمله‌ی عمومی برای تعداد مثلث‌های سفید از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$b_n = u_n - a_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد مثلث‌های رنگی به تعداد مثلث‌های سفید برابر است با:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{n-1} = 1/1 \Rightarrow \frac{n+1}{n-1} = 1/1$$

$$\Rightarrow 10n + 10 = 11n - 11 \Rightarrow n = 21$$

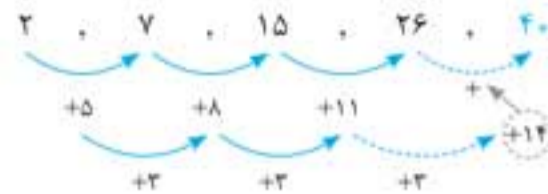
۱.۸. **گزینه ۱** هر دو دایره‌های توپر و توخالی از الگوی مثلثی تبعیت می‌کنند؛ بنابراین:

$$\text{الگوی دایره‌های توخالی: } a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{12(13)}{2} = 78$$

$$\text{الگوی دایره‌های توپر: } b_n = \frac{(n-1)n}{2} \Rightarrow b_{12} = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

$$\Rightarrow a_{12} - b_{12} = 78 - 66 = 12$$

۱.۱. **گزینه ۳** روش اول الگوی زیر همه‌ی جزئیات را به‌طور کامل نمایش می‌دهد:



روش دوم با توجه به مطالب درسنامه، اعداد داده‌شده مجموع جملات دنباله‌های مربعی و مثلثی هستند:

$$\text{جملات مربعی: } a_n = n^2 \rightarrow 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$\text{جملات مثلثی: } b_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

$$\Rightarrow c_n = a_n + b_n \xrightarrow{\text{جملات مربعی}} 2, 7, 15, 26, 40, \dots$$

۱.۲. **گزینه ۱** ابتدا جمله‌ی عمومی دنباله‌ی t_n را گویا می‌کنیم:

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

حال مجموع $t_1 + t_2 + \dots + t_{99}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$t_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1}, t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}, t_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$\dots, t_{98} = \sqrt{99} - \sqrt{98}, t_{99} = \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

کاملاً واضح است که با جمع کردن جملات این دنباله، رادیکال‌ها دوبه‌دو با هم ساده می‌شوند و فقط $\sqrt{100}$ و $-\sqrt{1}$ باقی می‌ماند، ببین:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{99} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$+ \dots + (\sqrt{99} - \sqrt{98}) + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 + \dots + t_{99} = -1 + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9$$

۱.۳. **گزینه ۳** باید جملات منفی هر دو ضابطه را بیابیم. در ضابطه‌ی اول داریم:

$$n < 5 \Rightarrow t_n = n^2 + n - 20 < 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (n+5)(n-4) < 0$$

$$\Rightarrow n - 4 < 0 \Rightarrow n < 4 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3 \Rightarrow \text{۳ جمله‌ی منفی دارد.}$$

کمان کسینوس $\alpha = \frac{\Delta\pi}{n}$ است و $n \geq 5$ است. توجه کنید که:

$$n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < \frac{\Delta\pi}{n} \leq x$$

کسینوس در ربع اول $(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ ، مثبت و در ربع دوم $(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi)$ ،

منفی است؛ بنابراین مقادیر $\cos(\frac{\Delta\pi}{n})$ موقعی منفی می‌شوند که:

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\Delta\pi}{n} < \pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 1 < \frac{10}{n} \leq 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2} \leq \frac{n}{10} < 1$$

$$\xrightarrow{\times 10} 5 \leq n < 10 \xrightarrow{n \geq 5} 5 \leq n < 10$$

یعنی جملات پنجم، ششم، هفتم، هشتم و نهم همگی منفی هستند؛ بنابراین این دنباله در مجموع ۸ جمله‌ی منفی دارد.

۱.۴. **گزینه ۴** الگوی مربوط به تعداد کل کاشی‌ها، کاشی‌های سفید و کاشی‌های تیره را می‌نویسیم:

شماره‌ی شکل (n)	۱	۲	۳	...	n
کل کاشی‌ها (a_n)	2×4	2×6	2×8	...	$a_n = 2 \times (2n + 2) = 4(n + 1)$
کاشی‌های سفید (b_n)	2×1	2×2	2×3	...	$b_n = 2 \times n = 2n$
کاشی‌های تیره (t_n)	$2(4-1)$	$2(6-2)$	$2(8-3)$...	$t_n = 2(2n + 2 - n) = 2(n + 2)$
$t_n = a_n - b_n$					

و به همین ترتیب: $t_5 = 2 \times 15 + 1 = 31$, $t_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$

$t_7 = 2 \times 63 + 1 = 127$, $t_8 = 2 \times 127 + 1 = 255$

۱۱۴. **گزینه ۴** جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است. مطالب گفته‌شده در سؤال به زبان ریاضی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} t_3 = 20 \xrightarrow{\text{در } n \text{ جای عدد } 3 \text{ قرار بده}} t_1 + (3-1)d = 20 \\ t_7 = 56 \xrightarrow{\text{در } n \text{ جای عدد } 7 \text{ قرار بده}} t_1 + (7-1)d = 56 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20 \\ t_1 + 6d = 56 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4d = 36 \Rightarrow d = \frac{36}{4} \Rightarrow d = 9 \xrightarrow{t_1 + 2d = 20} t_1 + 2 \times 9 = 20$

$\Rightarrow t_1 + 18 = 20 \Rightarrow t_1 = 2 \xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_n = 2 + (n-1) \times 9$

$\xrightarrow{n=20} t_{20} = 2 + (20-1) \times 9 \Rightarrow t_{20} = 2 + 19 \times 9 = 2 + 171 = 173$

۱۱۵. **گزینه ۱** شرط آن که سه جمله‌ی متوالی، تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، آن است که جمله‌ی وسط، واسطه‌ی حسابی بین جمله‌ی اول و سوم باشد.

$3x + 7, 2x - 1, 5x + 1$

$\xrightarrow{\text{میانگین اولی و سومی = وسطی}} 2x - 1 = \frac{3x + 7 + 5x + 1}{2}$

$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4x - 2 = 4x + 4 \Rightarrow -2 - 4 = 4x - 4x$

$\Rightarrow -10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10}{0} = \frac{-5}{0}$

قدرنسبت هم، تفاضل دو جمله‌ی متوالی است، بنابراین:

$d = (2x - 1) - (3x + 7) = -x - 8 \xrightarrow{x = \frac{-5}{0}} d = -(-\frac{5}{0}) - 8 = \frac{-11}{0}$

توجه کنید که اگر $-\frac{11}{0}$ در گزینه‌ها نبود، آن وقت باید می‌نوشتید:

$d = (3x + 7) - (2x - 1)$

یا مقداری را که به دست آوردید، قرینه کنید.

۱۱۶. **گزینه ۳** کافیست صورت سؤال رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$\begin{cases} t_1 + t_3 + t_5 = 3 \\ t_2 + t_4 + t_6 = 39 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 39 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{دو معادله رو از هم کم کن}} 12d - 3d = 39 - 3 \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow d = 4$

$\xrightarrow{\frac{3t_1 + 3d = 3}{d=4}} 3t_1 + 3 \times 4 = 3 \Rightarrow 3t_1 + 12 = 3 \Rightarrow 3t_1 = 3 - 12$

$\Rightarrow 3t_1 = -9 \Rightarrow t_1 = -3$

$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_1 = -3, d=4}$

$t_{10} = -3 + (10-1) \times 4 = -3 + 9 \times 4 \Rightarrow t_{10} = 33$

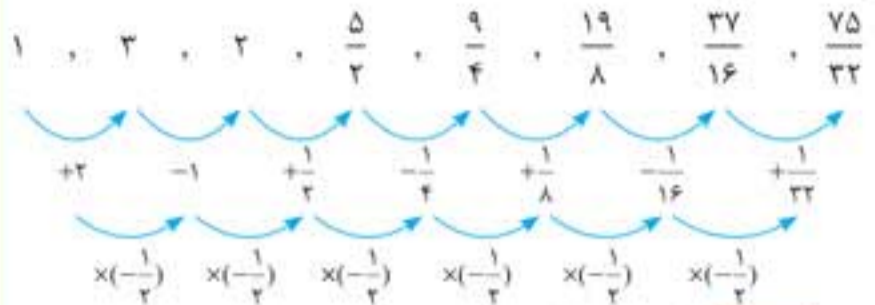
۱۱۷. **گزینه ۱** دقت کنید که در مجموع دو جمله‌ی t_1 و t_8 ، جمع دو اندیس ۸ می‌شود؛ بنابراین از قانون اندیس‌ها در حالت کلی استفاده می‌کنیم:

$t_2 + t_7 + t_4 + t_5 + t_6 + t_3 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} (t_2 + t_7) + (t_4 + t_5) + (t_3 + t_6)$

$\xrightarrow{\text{قانون اندیس‌ها } 1+8=9} (t_1 + t_8) + (t_1 + t_8) + (t_1 + t_8)$

$= 3(t_1 + t_8) \xrightarrow{\text{طبق فرض } t_1 + t_8 = k} 3k$

۱۰۹. **گزینه ۳** جملات دنباله، یکی در میان زیاد و کم شده‌اند، باید الگوی آن را کشف کنیم:



۱۱۰. **گزینه ۱** روش اول با کمی دقت متوجه می‌شویم هر جمله در عدد $-\frac{1}{3}$ ضرب می‌شود از طرفی جمله‌ی اول دنباله نیز -27 است، پس جمله‌ی عمومی این دنباله را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$t_n = (-27)(-\frac{1}{3})^{n-1} = (-3)^3 (-3^{-1})^{n-1}$

$\xrightarrow{\text{از قوانین توان عبارت رو ساده کن}} t_n = (-1)(3)^3 (-1)^{n-1} (3^{-1})^{n-1}$

$\xrightarrow{\text{در پایه‌های مشترک، توان‌ها جمع می‌شوند}} t_n = (-1)^n \times 3^3 \times 3^{-n+1}$

$\Rightarrow t_n = (-1)^n \times 3^{4-n} \xrightarrow{(-1)^4=1} t_n = (-1)^{n+6} \times 3^{4-n}$

روش دوم در دنباله‌ی داده‌شده $t_1 = -27$ است. فقط در **گزینه ۱** این شرط برقرار است.

۱۱۱. **گزینه ۱** جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است. با توجه به فرض‌های تست داریم:

$\frac{t_{12}}{t_4} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{12a + b}{4a + b} = \frac{7}{5} \Rightarrow 60a + 5b = 28a + 7b$

$\Rightarrow 32a = 2b \Rightarrow b = 16a$

$t_{13} = \frac{1}{4} t_7 + 15 \Rightarrow 13a + b = \frac{1}{4}(7a + b) + 15$

$\Rightarrow 12a + \frac{b}{4} = 15 \xrightarrow{b=16a} 12a + \frac{16a}{4} = 15$

$\Rightarrow 20a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \xrightarrow{b=16a} b = 16 \times \frac{3}{4} = 12$

$\Rightarrow t_n = \frac{3}{4}n + 12 \Rightarrow t_{20} = \frac{3}{4} \times 20 + 12 = 15 + 12 = 27$

۱۱۲. **گزینه ۲** جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ است. با توجه به دنباله‌ی داده‌شده، داریم:

$\begin{cases} t_1 = -3 \xrightarrow{n=1} a + b + c = -3 \quad 1 \\ t_2 = 0 \xrightarrow{n=2} 4a + 2b + c = 0 \quad 2 \\ t_3 = 5 \xrightarrow{n=3} 9a + 3b + c = 5 \quad 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 - 1 \rightarrow 3a + b = 3 \quad 4 \\ 3 - 2 \rightarrow 5a + b = 5 \quad 5 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع کن}} \begin{cases} 3a + b = 3 \\ -2a - b = -5 \end{cases} \rightarrow -2a = -2$

$\Rightarrow a = 1 \xrightarrow{3a+b=3} 3 + b = 3 \Rightarrow b = 0$

$\xrightarrow{a+b+c=-3} 1 + 0 + c = -3 \Rightarrow c = -4$

$\Rightarrow t_n = an^2 + bn + c \xrightarrow{a=1, b=0, c=-4} t_n = n^2 - 4$

$\xrightarrow{n=10} t_{10} = 10^2 - 4 \Rightarrow t_{10} = 96$

۱۱۳. **گزینه ۴** جملات دنباله را می‌نویسیم، تا الگوی مناسبی پیدا کنیم:

$t_1 = 1$

$$n \geq 2, t_n = 2t_{n-1} + 1 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 2t_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\ t_3 = 2t_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \\ t_4 = 2t_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \end{cases}$$



۱۲۴. گزینه ۳

$$19, \underbrace{0, 0, 0, 0}_{\text{درج چهار واسطه‌ی حسابی}}, 89 \xrightarrow[m=4]{a=19, b=89} d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{89-19}{4+1}$$

$$\Rightarrow d = \frac{70}{5} = 14 \xrightarrow{\text{حالا جملات رو بنویس}} 19, 33, 47, 61, 75, 89$$

چهار واسطه

یا این که: $89 - d = 89 - 14 = 75$
بنابراین بزرگ‌ترین عدد ۷۵ است.

۱۲۵. گزینه ۴ می‌دانیم که جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است، یعنی یک رابطه‌ی خطی بر حسب n . همان‌طور که دیده می‌شود، در دنباله‌ی حسابی n^2 وجود ندارد، بنابراین در دنباله‌ی داده‌شده باید عبارت شامل n^2 را از بین ببریم، در نتیجه ضریب n^2 باید برابر صفر باشد، یعنی:

$$m + 6 = 0 \Rightarrow m = -6 \xrightarrow{\text{در } t_n \text{ قرار بده}} t_n = 0 + \frac{-6n}{3} + 4$$

$$\Rightarrow t_n = -2n + 4 \xrightarrow{\text{۱۰امین جمله}} t_{10} = -2 \times 10 + 4 = -20 + 4 = -16$$

۱۲۶. گزینه ۳

$$\begin{cases} t_2 = 40 \\ t_5 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + d = 40 \\ t_5 = t_1 + 4d = 25 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو از هم کم کن}} 4d - d = 25 - 40 \Rightarrow 3d = -15$$

$$\Rightarrow d = -5 \xrightarrow{t_1 + d = 40} t_1 + (-5) = 40 \Rightarrow t_1 = 45$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو بنویس}} t_n = 45 + (n-1) \times (-5)$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی سؤال: } t_n > 0} -5n + 50 > 0$$

$$\Rightarrow -5n > -50 \xrightarrow{+(-5)} n < 10$$

جهت رو عوض کن

بنابراین این دنباله ۹ جمله‌ی مثبت دارد.

۱۲۷. گزینه ۲

$$a, b+2, c+4$$

$$\xrightarrow{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی وسطی، میانگین اولی و سومی است.}} b+2 = \frac{a+c+4}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2b+4 = a+c+4 \Rightarrow a+c = 2b$$

$$\xrightarrow{\text{فرض دوم}} a + (b+2) + (c+4) = 180$$

مجموع سه عدد ۱۸۰ است.

$$\Rightarrow a + b + c + 6 = 180 \Rightarrow (a+c) + b = 174$$

$$\xrightarrow{\text{②}} 2b + b = 174 \Rightarrow 3b = 174 \Rightarrow b = \frac{174}{3} = 58$$

۱۲۸. گزینه ۳ روش اول کافی است با استفاده از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی داده‌شده را ساده کنیم:

$$t_1 + (t_1 + 2d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 6d) = 160$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4t_1 + 20d = 160 \xrightarrow{+4} t_1 + 5d = 40 \Rightarrow t_6 = 40$$

روش دوم طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$1 + 4 + 7 + 12 = 24 = 4 \times 6 \xrightarrow{\text{۴ تا جمله داریم}} t_1 + t_4 + t_7 + t_{12} = 4t_6$$

$$\Rightarrow 160 = 4t_6 \Rightarrow t_6 = 40$$

۱۲۹. گزینه ۲ بیایید در ابتدا، دنباله‌ی اعداد سه‌رقمی مضرب ۱۱ رو بنویسیم. اولین عدد سه‌رقمی مضرب ۱۱ برابر ۱۱۰، بعدیش ۱۲۱، ... و آخرین عدد سه‌رقمی مضرب ۱۱، برابر ۹۹۰ است، یعنی یک دنباله‌ی حسابی:

$$110, 121, 132, \dots, 990$$

۱۱۸. گزینه ۴ جمله‌ی هشتم دنباله $t_8 = t_1 + 7d$ است. طبق فرض سؤال داریم:

$$t_6 + 2t_9 = 90 \xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} \begin{cases} t_6 = t_1 + 5d \\ t_9 = t_1 + 8d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه قرار بده}} (t_1 + 5d) + 2(t_1 + 8d) = 90$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 3t_1 + 21d = 90 \xrightarrow{+3} t_1 + 7d = 30 \Rightarrow t_8 = 30$$

۱۱۹. گزینه ۲ طبق مطالب گفته‌شده در درسنامه، داریم:

$$d = 9 - 5 = 4$$

$$\text{تعداد عددها} = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{40 - 5}{4} + 1 = 10 + 1 = 11$$

۱۲۰. گزینه ۱ روش اول

$$-10, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0}_{\text{پنج واسطه‌ی حسابی}}, 80 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -10 \\ t_7 = 80 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_7 = t_1 + (7-1)d \Rightarrow 80 = -10 + 6d$$

$$\Rightarrow 90 = 6d \Rightarrow d = \frac{90}{6} = 15$$

$$\xrightarrow{\text{جملات رو بنویس}} -10, 5, 20, 35, 50, 65, 80$$

۵ واسطه‌ی حسابی

$$\text{مجموع پنج واسطه} = 5 + 20 + 35 + 50 + 65 = 175$$

روش دوم طبق فرمول گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$-10, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0}_{\text{پنج واسطه‌ی حسابی}}, 80$$

$$\xrightarrow{a=-10, b=80} d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{80 - (-10)}{5+1}$$

$$\Rightarrow d = \frac{90}{6} = 15 \Rightarrow \text{ادامه مثل روش اول}$$

۱۲۱. گزینه ۲ روش اول در دنباله‌ی داده‌شده، جملات ۶ واحد، ۶ واحد و ۶ واحد در حال افزایش‌اند، پس قدرنسبت دنباله برابر ۶ و جمله‌ی اول هم که ۱۵- است:

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی}} t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$\xrightarrow{t_1 = -15, d = 6} t_n = -15 + (n-1)(6)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n = -15 + 6n - 6 \Rightarrow t_n = 6n - 21$$

روش دوم جمله‌ی دوم دنباله، ۹- است و فقط در **گزینه ۲** $t_2 = -9$ می‌شود.

۱۲۲. گزینه ۲ جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی، خطی است. فقط **گزینه ۲** فرم خطی یا درجه‌ی اول دارد.

۱۲۳. گزینه ۴ در سؤال گفته شده که هزینه‌ی مکالمه‌ی هر ۲ دقیقه، ۴۰ تومان است؛ پس می‌توان فرض کرد که هزینه‌ی مکالمه‌ی هر ۱ دقیقه، ۲۰ تومان است. بنابراین می‌توانیم الگوی زیر را در نظر بگیریم:

مدت زمان	۱	۲	۳	۴	...	n
بر حسب دقیقه	۱	۲	۳	۴	...	n
قیمت مکالمه	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	...	۲۰n

پس دنباله‌ی بالا یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲۰ و جمله‌ی اول ۲۰ است، بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 20 + (n-1) \times 20$$

در تست گفته شده که هزینه‌ی ثابت یک سیم کارت برابر ۳۰۰۰ تومان است. با احتساب هزینه‌ی ثابت، جمله‌ی عمومی هزینه‌ی کل مکالمه در یک ماه چنین است:

$$a_n = 20n + 3000$$

می‌دانیم که ۵ ساعت معادل ۳۰۰ دقیقه است؛ بنابراین:

$$a_{300} = 20 \times 300 + 3000 = 6000 + 3000 = 9000 \text{ تومان}$$

۱۳۴. **گزینه ۳** برای حل مسئله باید t_n را پیدا کنیم و نامعادله‌ی $t_n < 120$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ d = 10 - 4 = 6 \end{cases} \rightarrow \frac{t_n = t_1 + (n-1)d}{t_n = 4 + (n-1) \times 6} \rightarrow t_n < 120 \rightarrow 6n - 2 < 120 \rightarrow 6n < 122 \rightarrow n < \frac{122}{6} \rightarrow n < 20.33 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 20$$

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از 20.33 تا 20 است، پس این دنباله ۲۰ جمله‌ی کوچک‌تر از ۱۲۰ دارد.

۱۳۵. **گزینه ۱** سه جمله‌ی اول این دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-d, a, a+d \xrightarrow{\text{هر سه را جمع کن}} 3a = 39 \Rightarrow a = 13$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 579$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} a^2 - 2ad + d^2 + a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 579$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 579 \xrightarrow{a=13} 3 \times (13)^2 + 2d^2 = 579$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 507 + 2d^2 = 579 \Rightarrow 2d^2 = 72 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

چون طبق فرض $d > 0$ است، $d = 6$ را انتخاب می‌کنیم؛ بنابراین جملات دنباله به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} d = 6 \\ t_1 = a - d = 13 - 6 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{سه جمله‌ی اول را بنویس}} 7, 13, 19$$

$$\xrightarrow{\text{هر سه را در هم ضرب کن}} \text{جواب} = 7 \times 13 \times 19 = 1729$$

۱۳۶. **گزینه ۳**

$$\begin{cases} O_{15} = a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \\ O_{16} = a_1 + a_2 + \dots + a_{15} + a_{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow O_{16} - O_{15} = a_{16} \xrightarrow{\frac{a_n = a_1 + (n-1)d}{a_1=1, d=3}} O_{16} - O_{15} = 1 + (16-1) \times 3 = 46$$

۱۳۷. **گزینه ۴** اگر جمله‌ی وسط را a فرض کنیم و قدرنسبت دنباله را هم d در نظر بگیریم، این پنج جمله‌ی متوالی، به صورت زیر قابل نمایش است:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d \xrightarrow{\text{مجموع پنج جمله}} \xrightarrow{\text{همه را جمع کن}}$$

$$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 180$$

$$\Rightarrow 5a = 180 \Rightarrow a = \frac{180}{5} = 36$$

۱۳۸. **گزینه ۲** شرط واسطه‌ی حسابی را برای سه جمله‌ی اول می‌نویسیم:

$$2x, 3x + y, 6x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{وسطی، میانگین اولی و سومی}} 3x + y = \frac{2x + 6x - 1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 6x + 2y = 2x + 6x - 1 \Rightarrow 2x - 2y = 1$$

$$\xrightarrow{+2} x - y = \frac{1}{2} \Rightarrow |x - y| = \frac{1}{2}$$

۱۳۹. **گزینه ۳** با توجه به مفروضات مسئله، اگر جمله‌ی سوم را a فرض کنیم، قدرنسبت برابر $a+1$ خواهد بود (دو عدد متوالی)؛ بنابراین:

$$\begin{cases} t_1 = a & \text{①} \\ d = a+1 & \text{②} \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که قدرنسبت در هر دنباله‌ی حسابی، تفاضل دو جمله‌ی متوالی دنباله است، یعنی:

$$d = t_2 - t_1 \xrightarrow{\text{① و ②}} a+1 = a - t_1 \Rightarrow t_1 = -1$$

دقت کنید که اگر $d = a+1$ و $t_1 = a+1$ آن‌گاه:

$$d = t_2 - t_1 \Rightarrow a = a+1 - t_1 \Rightarrow t_1 = 1$$

در گزینه‌ها $t_1 = -1$ آمده است.

در این دنباله‌ی حسابی $t_1 = 110$ و $t_n = 990$ است. بنابراین طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه، تعداد اعداد مضرب ۱۱ بین ۱۱۰ و ۹۹۰ برابر است با:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{990 - 110}{11} + 1 = 80 + 1 = 81$$

۱۳۰. **گزینه ۲** فرض‌های مسئله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_6 = \frac{1}{5}(t_7 + t_8 + \dots + t_{12}) \end{cases} \text{ ①}$$

برای پیدا کردن قدرنسبت، رابطه‌ی ① را به کمک جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی ساده می‌کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} t_7 = t_1 + 6d \\ t_8 = t_1 + 7d \\ t_9 = t_1 + 8d \\ t_{10} = t_1 + 9d \\ t_{11} = t_1 + 10d \\ t_{12} = t_1 + 11d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{همه را جمع کن}} t_7 + \dots + t_{12} = 6t_1 + 15d \text{ ②}$$

$$\begin{cases} t_7 = t_1 + 6d \\ t_8 = t_1 + 7d \\ t_9 = t_1 + 8d \\ t_{10} = t_1 + 9d \\ t_{11} = t_1 + 10d \\ t_{12} = t_1 + 11d \end{cases} \xrightarrow{\text{همه را جمع کن}} t_7 + \dots + t_{12} = 6t_1 + 15d \text{ ③}$$

② و ③ را در رابطه‌ی ① قرار دهید:

$$t_1 + 5t_1 + 15d = \frac{1}{5}(6t_1 + 15d) \xrightarrow{\times 5} 5(6t_1 + 15d) = 6t_1 + 15d$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 30t_1 + 75d = 6t_1 + 15d \Rightarrow 24t_1 + 24d = 0$$

$$\xrightarrow{t_1=2} 24 \times 2 + 24d = 0 \Rightarrow 24d = -2 \times 24 \Rightarrow d = -2$$

۱۳۱. **گزینه ۴** دنباله‌ی داده‌شده حسابی است، بنابراین:

$$2 + x = \frac{(1-x) + (1+2x)}{2} \Rightarrow 4 + 2x = x + 2 \Rightarrow x = -2$$

$-3 =$ قدرنسبت $\Rightarrow 3, 0, -3, \dots$ جملات دنباله

پس برای این که قدرنسبت ۴۸ باشد، باید جملات دنباله در -16 ضرب شوند.

۱۳۲. **گزینه ۳** دنباله‌ی حسابی اولیه:

$$\begin{cases} t_1 = a \\ d_1 = d \\ t_n = t_1 + (n-1)d_1 \end{cases} \xrightarrow{n=8} t_8 = a + (8-1)d \Rightarrow t_8 = a + 7d$$

دنباله‌ی حسابی جدید:

$$\begin{cases} t'_1 = a + 4 \\ d'_1 = d + 5 \end{cases} \Rightarrow t'_8 = t'_1 + (8-1)d'_1$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری}} t'_8 = (a + 4) + 7(d + 5) \Rightarrow t'_8 = a + 4 + 7d + 35$$

$$\Rightarrow t'_8 = \underbrace{a + 7d}_{t_8} + 39$$

در نتیجه به جمله‌ی هشتم در دنباله‌ی اولیه، ۳۹ واحد اضافه شده است.

۱۳۳. **گزینه ۲**

$$\xrightarrow{\text{تعداد کل جملات}} n = m + 2$$

بنابراین در این دنباله‌ی حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ n = m + 2 \\ t_n = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی دنباله رو بنویس}} 64 = 1 + (m+2-1) \times 3/5$$

$$\xrightarrow{-1} 63 = (m+1) \times \frac{3}{5} \xrightarrow{\times \frac{5}{3}} 105 = m+1 \Rightarrow m = 104$$

۱۴۵. گزینه ۳

گزینه ۱: $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ \Rightarrow r=3$
 $9^\circ+27^\circ+81^\circ+243^\circ=360^\circ$
 ✓ دنباله هندسی جمع زوایای داخلی چهارضلعی 360° است

گزینه ۲: قیمت در هر سال ۱۰ درصد سال قبل کم شود
 فرم دنباله \rightarrow قیمت در هر سال ۹۰ درصد سال قبل است \rightarrow به زبان دیگر
 $90\% = \frac{90}{100} = 0.9$

گزینه ۳: $r = 0.9$ ✓
 دنباله هندسی $a, 0.9a, 0.81a, \dots$

اگر دنباله‌ای، دنباله هندسی باشد، آن گاه نسبت هر دو جمله متوالی آن (به جز جمله اول) مقداری ثابت است.

گزینه ۳: $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ مساوی هم نیستند $\rightarrow x$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

گزینه ۴: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{8}, 2\sqrt{2}$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{2}$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3-1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{2}$

$\frac{t_4}{t_3} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{2^1 \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{1+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3-3}{2}} = 2^0 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

بنابراین این جملات تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت $r = \sqrt{2}$ می دهند

۱۴۶. گزینه ۲: جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است بنابراین:

$t_2 = t_1 r$
 $t_4 = t_1 r^3 \Rightarrow \frac{t_2 t_4}{t_3^2} = \frac{(t_1 r)(t_1 r^3)}{(t_1 r^2)^2}$
 $\frac{t_2 t_4}{t_3^2} = \frac{t_1^2 r^4}{t_1^2 r^4} = 1 \Rightarrow \frac{t_2 t_4}{t_3^2} = 1 \Rightarrow 10 \cdot 24 = 240 = 10 \cdot 24$

۱۴۷. گزینه ۱: ابتدا تست را به زبان ریاضی می نویسیم:

$t_3 = 12, t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_3 = t_1 r^2 = 12 \\ t_6 = t_1 r^5 = 96 \end{cases}$

$\frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

$\Rightarrow r = 2 \xrightarrow{t_3 r^2 = 12} t_1 \times (2)^2 = 12 \Rightarrow 4t_1 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$

۱۴۰. گزینه ۲ ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$t_{19}^2 - t_{13}^2 = 128d$
 $\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (t_{19} - t_{13})(t_{19} + t_{13}) = 128d$ ۱

از قانون اندیس ها داریم:
 $13 + 19 = 15 + 17 = 22 \Rightarrow t_{13} + t_{19} = t_{15} + t_{17}$ ۲

از طرفی داریم:
 $\begin{cases} t_{19} = t_1 + 18d \\ t_{13} = t_1 + 12d \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه رو کم کن}} t_{19} - t_{13} = 6d$ ۳

با جای گذاری رابطه های ۲ و ۳ در رابطه ۱ داریم:
 $(6d)(t_{15} + t_{17}) = 128d \xrightarrow{+6d} t_{15} + t_{17} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$

۱۴۱. گزینه ۳ در دنباله حسابی داده شده داریم:

$\begin{cases} t_1 = 3 \\ d = 7 - 3 = 4 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{13} = 3 + 12 \times 4 = 51 \\ t_9 = 3 + 8 \times 4 = 35 \\ t_5 = 3 + 4 \times 4 = 19 \end{cases}$

از آنجایی که حاصل همه ی گزینه ها مثبت و بیشتر از ۵۱ است، در دنباله جدید جمله اول باید ۱۹ باشد. بنابراین دنباله ی جدید به صورت زیر قابل نمایش است:

$19, 35, 51, \dots \Rightarrow \begin{cases} t'_1 = 19 \\ d' = 35 - 19 = 16 \end{cases} \xrightarrow{t'_n = t'_1 + (n-1)d'}$

$t'_{10} = 19 + (10-1) \times 16 = 19 + 9 \times 16 = 19 + 144 \Rightarrow t'_{10} = 163$

۱۴۲. گزینه ۲

$t_1 + t_5 + t_9 = 18$

$\xrightarrow{\text{همه رو بازنکن}} t_1 + (t_1 + 4d) + (t_1 + 8d) = 18$
 $t_3 + t_7 = 12 \xrightarrow{\text{هر دو رو بازنکن}} (t_1 + d) + (t_1 + (m-1)d) = 12$
 $\xrightarrow{\text{ساده کن}} 2t_1 + d + md - d = 12$
 $\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2t_1 + md = 12$ ۲

با ۱ و ۲ دستگاه ساز $\begin{cases} t_1 + 4d = 6 \\ 2t_1 + md = 12 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2t_1 + 8d = 12 \\ 2t_1 + md = 12 \end{cases}$

از مقایسه ی دو معادله، نتیجه می گیریم که m باید برابر ۸ باشد.

۱۴۳. گزینه ۳

۱۲،، ۶۸
 ۱۰ واسطه های حسابی

طبق شکل بالا، جمله ی اول برابر ۱۲ و جمله ی دوازدهم برابر ۶۸ است. همچنین واسطه ی دوم در واقع جمله ی سوم خواهد شد و به همین ترتیب واسطه های چهارم، هفتم و نهم به ترتیب جملات پنجم، هشتم و دهم هستند؛ بنابراین طبق قانون اندیس ها داریم:

$5 + 8 = 12 + 1 \Rightarrow t_5 + t_8 = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_5 + t_8 = 68 + 12 = 80$
 $3 + 10 = 12 + 1 \Rightarrow t_3 + t_{10} = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_3 + t_{10} = 68 + 12 = 80$

بنابراین مجموع واسطه های دوم، چهارم، هفتم و نهم برابر است با:
 $t_3 + t_5 + t_8 + t_{10} = 80 + 80 = 160$

۱۴۴. گزینه ۳

$1, \frac{7}{4}, \frac{10}{4}, \dots$
 $1, 3, \frac{11}{4}, \dots$

اعداد را نظیر به نظیر جمع می کنیم و جملات دنباله ی جدید را می نویسیم:

$\frac{17}{4}, \frac{19}{4}, \frac{21}{4}, \dots$

دنباله ی جدید، یک دنباله ی حسابی با قدرنسبت $\frac{2}{4}$ و جمله ی اول $\frac{17}{4}$ است؛ بنابراین:

$t_{51} = t_1 + 50 \cdot d = \frac{17}{4} + 50 \times \frac{2}{4} = \frac{17 + 100}{4} = \frac{117}{4} = 29 \frac{1}{4}$

کاملاً مشخص است که اگر این ۵ جمله را در هم ضرب کنیم، همه‌ی ۲ها با هم ساده می‌شوند؛ پس: $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = a^5 = 1024 \Rightarrow a^5 = 4^5 \Rightarrow a = 4$
بنابراین جمله‌ی سوم این دنباله، عدد ۴ است.

۱۵۲. **گزینه ۳** - روش اول طبق مطالب درسنامه داریم:

$$3, 0, 0, 0, 0, 729$$

چهار واسطه‌ی هندسی

$$\frac{a=3, b=729}{m=4} \rightarrow r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^5 = \frac{729}{3} \Rightarrow r^5 = 243 = 3^5$$

حالا جملات رو بنویس

$$\Rightarrow r = 3 \rightarrow 3, 9, 27, 81, 243, 729$$

واسطه‌های درج شده

مجموع چهار واسطه $= 9 + 27 + 81 + 243 = 360$

روش دوم با توجه به شکل روش اول، جمله‌ی اول و جمله‌ی ششم دنباله‌ی

هندسی معلوم است:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_6 = 729 \end{cases} \rightarrow t_1 r^5 = 729 \Rightarrow 3 \times r^5 = 729 \Rightarrow r^5 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

ادامه‌ی حل، مثل روش اول...

۱۵۳. **گزینه ۳** ابتدا با اعمال شرط واسطه‌ی هندسی، مقدار x را می‌یابیم:

$$x, x+3, x+5 \Rightarrow (x+3)^2 = x(x+5)$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 5x \Rightarrow x = -9$$

قرار بده در جملات

$$\rightarrow -9, -6, -4, \dots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -9 \\ r = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

جمله‌ی دهم رو بنویس

$$\rightarrow t_{10} = t_1 r^9 = (-9) \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{-9 \times 2^9}{3^9}$$

$$\frac{9=3^2}{3^7} \frac{-2^9}{3^9} \Rightarrow t_{10} = \frac{-512}{2187}$$

۱۵۴. **گزینه ۴** فرض می‌کنیم واسطه‌ی هندسی بین این دو عدد a باشد، بنابراین:

$$a^2 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) \Rightarrow a^2 = 1 - 2 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm i$$

۱۵۵. **گزینه ۳** - روش اول طبق نکات گفته‌شده در درسنامه، داریم:

اندیس‌ها رو به ترتیب در نظر بگیرد

$$3, 7, 12 \rightarrow t_1, t_2, t_3$$

بنابر فرمول

$$\rightarrow r = \frac{12-7}{7-3} = \frac{5}{4}$$

روش دوم روش کلی:

همه رو طبق جمله‌ی عمومی $t_1 + 2d, t_1 + 6d, t_1 + 11d$

دنباله‌ی حسابی بازکن

جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی

جمله‌ی سوم \times جمله‌ی اولی $=$ (جمله‌ی وسطی) \rightarrow شرط دنباله‌ی هندسی

رو اعمال کن

$$\Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 11d)$$

اتحاد رو بازکن

$$\rightarrow t_1^2 + 12t_1d + 36d^2 = t_1^2 + 13t_1d + 22d^2$$

ساده کن

$$\rightarrow 36d^2 - 22d^2 = 13t_1d - 12t_1d \Rightarrow 14d^2 = t_1d$$

در جملات به جای t_1

$$\rightarrow 14d + 2d, 14d + 6d, 14d + 11d$$

قدرنسبت رو حساب کن

$$\rightarrow r = \frac{20d}{16d} = \frac{5}{4}$$

۱۵۶. **گزینه ۳**

سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی

$$x, 4, y \rightarrow 4 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 8$$

سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی

$$x, y, 18 \rightarrow y^2 = 18 \times x$$

شرط رو اعمال کن

شرط رو اعمال کن

شرط رو اعمال کن

حالا می‌توانیم جمله‌ی دهم را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow t_{10} = t_1 r^9 = 3 \times 2^9$$

۱۴۸. **گزینه ۴** در این سؤال می‌خواهیم نسبت $\frac{t_8}{t_6}$ را حساب کنیم؛ یعنی:

$$\frac{t_8}{t_6} = \frac{t_1 r^7}{t_1 r^5} = r^2$$

به عبارتی هدف، محاسبه‌ی r^2 است. با توجه به فرضیات داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} t_2 = 9 \rightarrow t_1 r = 9 \\ t_5 = 243 \rightarrow t_1 r^4 = 243 \end{cases}$$

دو رابطه رو بر هم تقسیم کن

$$\rightarrow \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{243}{9} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

در $\frac{t_8}{t_6} = 3^2 = 9$

۱۴۹. **گزینه ۳** - روش اول با توجه به مطالب گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$t_n = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \rightarrow t_1 = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2 \times 1 - 1} = 3 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

همچنین اگر بایستی توان را به توان ضرب n برسائیم، مقدار قدرنسبت به دست می‌آید:

$$r = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

حالا می‌توانیم مقدار خواسته‌شده را بیابیم:

$$\frac{t_2}{r^2} = \frac{t_1 r}{r^2} = \frac{t_1}{r} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = -6$$

روش دوم کافی است جمله‌های اول و دوم دنباله را بنویسید:

$$t_n = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2 \times 1 - 1} \\ t_2 = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2 \times 2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \left(-\frac{1}{2}\right) \\ t_2 = 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{3 \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{t_2}{r^2} = \frac{3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{-3 \times 16}{16} = -6$$

و سرانجام:

$$\frac{t_2}{r^2} = \frac{3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{-3 \times 16}{16} = -6$$

۱۵۰. **گزینه ۱** - روش اول ابتدا، عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A = t_1 t_2 t_3 - t_4 t_5 \xrightarrow{\text{همه رو بازکن}} (t_1 r^0)(t_1 r)(t_1 r^2) - (t_1 r^3)(t_1 r^4)$$

ساده کن

$$\rightarrow A = t_1^2 r^3 - t_1^2 r^7 = 0$$

روش دوم طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$12 + 2 = 8 + 6 \Rightarrow t_1 t_2 t_3 = t_4 t_5 \Rightarrow t_1 t_2 t_3 - t_4 t_5 = 0$$

۱۵۱. **گزینه ۳**

راهبرد: هرگاه تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی متناهی، عددی فرد باشد، برای راحتی کار و محاسبات کمتر، بهتر است ابتدا جمله‌ی وسط را نوشته، سپس جملات قبل و بعد از آن را بنویسیم.

این جوری:

$$\leftarrow \frac{A}{r^2}, \frac{A}{r}, A, Ar, Ar^2, \dots \rightarrow$$

اگر جمله‌ی سوم این دنباله را a فرض کنیم، طبق مطلب بالا، جمله‌ی اول دنباله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

جمله‌ی سوم



قدرنسبت در دنباله هندسی از تقسیم دو جمله متوالی به دست می آید؛ بنابراین:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3^5}{3^3} = 3^2 = 9 \quad \text{②}$$

$$\text{① و ②} \rightarrow |t_1 - r| = \left| \frac{27}{4} - 9 \right| = \left| \frac{27 - 36}{4} \right| \Rightarrow |t_1 - r| = \frac{9}{4}$$

روش دوم: طبق نکته‌ی گفته شده در درسنامه، داریم:

$$t_n = \frac{3^1 \times 3^{2n}}{4} = \frac{3}{4} \times 3^{2n} \quad \text{با بهی توان رو به توان ضرب n برسون تا قدرنسبت پیدا بشه}$$

$$r = 3^2 = 9 \xrightarrow{\text{رو ۱ بنذار و ۱ رو پیدا کن}} t_1 = \frac{3^{1+(2 \times 1)}}{4} = \frac{3^3}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\Rightarrow |t_1 - r| = \left| \frac{27}{4} - 9 \right| = \frac{9}{4}$$

۱۶۰. **گزینه ۳** - روش اول کافی است همی جملات را طبق رابطه‌ی

$$t_n = t_1 r^{n-1} \quad \text{ساده کنیم:}$$

$$\frac{t_2 t_4 t_8}{t_5^2} = 25 \xrightarrow{\text{همی جملات رو بازنویس}} \frac{(t_1 r)(t_1 r^3)(t_1 r^7)}{(t_1 r^4)^2} = 25$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{t_1^3 r^{1+3+7}}{t_1^2 (r^4)^2} = 25 \Rightarrow \frac{t_1^3 r^{11}}{t_1^2 r^8} = 25$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = 25 \Rightarrow r = \frac{1}{25}$$

روش دوم: چون $8 + 2 = 5 + 5$ است، پس طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_2 t_8 = t_5^2 \quad \text{③}$$

$$\frac{t_2 t_4 t_8}{t_5^2} = \frac{t_5^2 t_4}{t_5^2} = \frac{t_4}{t_5} = 25$$

$$\frac{t_5}{t_4} = \frac{1}{25} \xrightarrow{\text{نسبت دو جمله متوالی برابر ۲۵ است}} r = \frac{1}{25}$$

۱۶۱. **گزینه ۲** مسئله را به زبان ریاضی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_{11} - t_1 = \frac{1}{243} \quad \text{④} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه‌ی ④ رو ساده کن}} \frac{t_n = t_1 r^{n-1}}{t_n = t_1 r^{n-1}} \rightarrow t_1 r^{10} - t_1 r^0 = \frac{1}{243}$$

$$\xrightarrow{\text{از } t_1 r^0 \text{ فاکتور بگیر}} t_1 r^0 (r^{10} - 1) = \frac{1}{243}$$

$$\xrightarrow{r = \frac{1}{3}} t_1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1\right) = \frac{1}{243}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5} t_1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{9} - 1\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\xrightarrow{\times 3^5} t_1 \left(\frac{1}{9} - 1\right) = 3^5 \Rightarrow t_1 \times \left(\frac{-8}{9}\right) = 27$$

$$\xrightarrow{\times \left(-\frac{9}{8}\right)} t_1 = 27 \times \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{-27 \times 9}{8}$$

$$t_2 = t_1 r = \frac{-27 \times 9}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{-81}{8}$$

و اما جمله‌ی دوم:

$$\xrightarrow{\text{①}} x = 8 - y \xrightarrow{\text{قرار بده در ②}} y^2 = 18(8 - y)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} y^2 + 18y - 18 \times 8 = 0 \xrightarrow{\text{دستور } \Delta} \Delta = 18^2 + 4 \times (18 \times 8)$$

$$\Rightarrow \Delta = 18(18 + 4 \times 8) = 18(18 + 32) = 18 \times 50 = 900$$

$$\Rightarrow y = \frac{-18 \pm 30}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-18 - 30}{2} = -24 \xrightarrow{\text{②}} x = 8 + 24 = 32 \\ y = \frac{-18 + 30}{2} = 6 \xrightarrow{\text{②}} x = 8 - 6 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - y| = |32 - (-24)| = 56 \\ |x - y| = |2 - 6| = 4 \end{cases}$$

مقدار $|x - y| = 4$ در گزینه‌ها آمده است.

۱۵۷. **گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی با

قدرنسبت ۳ به صورت زیر است:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow{r=3} t_n = t_1 \times 3^{n-1}$$

$$t_2 = 3t_1, t_3 = 9t_1$$

بنابراین:

چهار جمله‌ی اضافه شده بین t_1 و t_2 را b_1, b_2, b_3, b_4 و b_5 و $k-1$ جمله‌ی اضافه شده بین t_2 و t_3 را c_1, c_2, \dots, c_{k-1} و c_k در نظر می‌گیریم. در این صورت دنباله‌ی جدید به صورت زیر است: فرض می‌کنیم جمله‌ی عمومی آن a_n باشد.

$$t_1, b_1, b_2, b_3, b_4, 3t_1, \underbrace{c_1, c_2, \dots, c_{k-1}}_{k-1}, 9t_1$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است؛ بنابراین:

$$a_6 = 3t_1 \Rightarrow a_1 + 5d = 3t_1 \Rightarrow 5d = 2t_1 \quad \text{①}$$

$$a_{k+6} = 9t_1 \Rightarrow a_1 + (k+6-1)d = 9t_1 \Rightarrow (k+5)d = 8t_1 \quad \text{②}$$

② را بر ① تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $t_1 \neq 0$ و $d \neq 0$ است، چون

جمله‌ی اول هر دنباله‌ی هندسی ناصفر است و جمله‌های دنباله‌ی هندسی طبق

فرض متمایز هستند.)

$$\frac{k+5}{5} = 4 \Rightarrow k+5 = 20 \Rightarrow k = 15$$

۱۵۸. **گزینه ۳** در سؤال گفته شده که قیمت دو چرخه‌ی علی هر سال ۲۰

درصد نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد یا به عبارت دیگر قیمت دو چرخه در

هر سال ۸۰ درصد سال قبل است. یعنی $\frac{80}{100}$ یا $\frac{4}{5}$ ؛ بنابراین دنباله‌ی

قیمت دو چرخه‌ی علی در سال‌های مختلف به صورت زیر است:

$$500, 500 \times \frac{4}{5}, 500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2, \dots, 500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

یا به عبارتی:

$$\frac{500}{\text{سال } k\text{ام}}, \frac{500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2}{\text{سال دوم}}, \frac{500 \times \left(\frac{4}{5}\right)}{\text{سال اول}}, \frac{500}{\text{خرید دو چرخه}}$$

قیمت دو چرخه بعد از ۳ سال، یعنی جمله‌ی چهارم در دنباله‌ی بالا؛ پس:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow{n=4} t_4 = 500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 500 \times \frac{64}{125} = 256$$

۱۵۹. **گزینه ۲** روش اول کافی است دو جمله‌ی اول دنباله را بنویسیم:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3^{1+2}}{4} = \frac{3^3}{4} = \frac{27}{4} \quad \text{①} \\ t_2 = \frac{3^{1+2 \times 2}}{4} = \frac{3^5}{4} \end{cases}$$

دنباله‌ی جدید هم یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۸ است:

$$d = 13 - 5 = 21 - 13 = 8$$

راهنما: به‌طور کلی، اگر در یک دنباله‌ی حسابی، همه‌ی جملات با شماره‌ی فرد یا همه‌ی جملات با شماره‌ی زوج را حذف کنیم، دنباله‌ی حاصل باز هم یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود با این تفاوت که قدرنسبت آن نسبت به حالت اول، ۲ برابر می‌شود.

۱۶۶. **گزینه ۳** در این دنباله، جملات در حال کم‌شدن هستند، بنابراین بزرگ‌ترین جمله همان جمله‌ی اول است. از طرفی در این دنباله مقدار دو جمله معلوم است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} t_3 = \frac{1}{3} \\ t_6 = \frac{1}{24} \end{cases} \xrightarrow[\text{جمله‌ی بازکن}]{t_n = t_1 r^{n-1}} \begin{cases} t_1 r^2 = \frac{1}{3} \\ t_1 r^5 = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دو جمله‌ی رو بر هم تقسیم‌کن}]{\frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}}} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[t_1 r^2 = \frac{1}{3}]{t_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}} \Rightarrow t_1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 4} t_1 = \frac{4}{3} = a$$

۱۶۷. **گزینه ۲** سه جمله‌ی اول دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r}, a, ar$$

طبق فرض‌های مسئله داریم:

$$t_1 t_2 t_3 = 216 \Rightarrow \frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216$$

$$\xrightarrow{216 = 6^3} a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

از طرفی داریم:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 19 \Rightarrow \frac{a}{r} + a + ar = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19$$

$$\xrightarrow{\times r} 6 + 6r + 6r^2 = 19r \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$\xrightarrow[\Delta]{\Delta} r = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

$$\xrightarrow[\text{ساده‌کن}]{\text{ساده‌کن}} r = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \Rightarrow r = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$$

با قراردادن $r = \frac{3}{2}$ و $a = 6$ ، جملات به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{a}{r}, a, ar \Rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6 \times \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 4, 6, 9$$

با قرار دادن $r = \frac{2}{3}$ ، دنباله‌ی مقابل به‌دست می‌آید: ۹، ۶، ۴
بنابراین در هر دو حالت، تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این سه عدد ۹ - ۴ یا همان ۵ است.

۱۶۸. **گزینه ۲** با کمی دقت متوجه می‌شویم که در تمام مخرج‌ها، مجموع اندیس‌ها در حاصل‌ضرب دو جمله‌ی داده‌شده برابر ۲۰ است، یعنی مخرج همه‌ی کسرها با هم برابرند. **نگاه‌کن:**

$$\begin{aligned} t_1 t_9 &= t_1 (t_1 r^{18}) = t_1^2 r^{18} \\ t_2 t_8 &= (t_1 r)(t_1 r^{17}) = t_1^2 r^{18} \\ &\vdots \end{aligned}$$

۱۶۲. **گزینه ۴** فرض کنیم $t_n = \frac{1}{3125}$ باشد. با توجه به دنباله‌ی داده‌شده، هر جمله در عدد $-\frac{1}{5}$ ضرب شده است، پس این دنباله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{5}$ و جمله‌ی اول -25 است؛ بنابراین:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3125} = (-25) \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{+(-25)} -\frac{1}{25 \times 3125} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{-1}{5^2 \times 5^5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{5^7} = \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} \xrightarrow[\text{مقایسه‌کن}]{\text{عدد عددی فرد است } n-1} \frac{1}{5^7} = \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{(-1)^{n-1} = -1} n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

۱۶۳. **گزینه ۱** طبق راهنما گفته‌شده در سوال ۱۵۱، پنج جمله‌ی اول دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

$$\xrightarrow[\text{حاصل‌ضرب پنج جمله}]{\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 243}$$

$$\Rightarrow a^5 = 243 \xrightarrow{243 = 3^5} a^5 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

از طرفی، مجموع دو جمله‌ی نخست را هم داریم:

$$\frac{a}{r^2} + \frac{a}{r} = 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{a=3} \frac{3}{r^2} + \frac{3}{r} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow[\text{ساده‌کن}]{\frac{3 + 3r}{r^2} = 1 + \sqrt{3}} 3 + 3r = (1 + \sqrt{3})r^2$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب‌کن}]{(1 + \sqrt{3})r^2 - 3r - 3 = 0}$$

$$\xrightarrow[\Delta]{\Delta} \Delta = 9 - 4(1 + \sqrt{3})(-3)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 + 12 + 12\sqrt{3} = 21 + 12\sqrt{3} = 9 + 12\sqrt{3} + 12$$

$$= 3^2 + 2(3 \times 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2$$

$$\xrightarrow[\text{رو بیدارکن}]{r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm (3 + 2\sqrt{3})}{2(1 + \sqrt{3})}} r = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} + 1)} \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

۱۶۴. **گزینه ۳** روش اول

$$\begin{aligned} & \text{جمله‌ی وسط } t_{10} \\ & \uparrow \\ & 4, 0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0, 4, 0, 0 \\ & \text{عدد } 29 \\ & \text{تعداد کل جملات } = 31 \end{aligned}$$

با توجه به شکل $t_1 = 4$ و $t_{31} = 400$ است. باید t_{16} را حساب کنیم. چون $1 + 31 = 16 + 16$ است، پس با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_1 t_{31} = t_{16}^2 \Rightarrow 4(400) = t_{16}^2 \Rightarrow t_{16} = \pm 40$$

روش دوم:

$$\text{جمله‌ی آخر} = r^{m+1} \Rightarrow \frac{400}{4} = r^{29+1} \Rightarrow 100 = r^{30} \Rightarrow r = \pm \sqrt[30]{100}$$

$$\Rightarrow r = \pm \sqrt[15]{10}$$

$$\xrightarrow[\text{جمله‌ی عمومی رو بنویس}]{t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow{n=16} t_{16} = 4 \times (\pm \sqrt[15]{10})^{15}} = 4 \times \pm 10 = \pm 40$$

۱۶۵. **گزینه ۳** با توجه به فرض سؤال، جملات t_1, t_2, t_3, \dots را حذف می‌کنیم. در این صورت جملات دنباله عبارت‌اند از:

$$t_2, t_4, t_6, \dots \xrightarrow{t_n = 4n-2} 5, 13, 21, \dots$$

بنابراین به جای مخرج همه‌ی کسرها $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ قرار می‌دهیم و از آنجایی که تعداد این کسرها ۱۰ تا است، داریم:

$$\text{کسر} = \frac{4}{t_1^2} + \frac{4}{t_2^2} + \dots + \frac{4}{t_n^2} = 10 \times \frac{4}{t_1^2}$$

$$\xrightarrow{r=\sqrt[2]{2}, t_1=1} \text{کسر} = \frac{40}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sqrt[2]{2})^{18}} = \frac{40}{\frac{1}{4} \times \sqrt[2]{2^{18}}} = \frac{40}{\frac{1}{4} \times 2^9}$$

$$= \frac{40}{\frac{1}{4} \times 8} \Rightarrow \text{کسر} = \frac{40}{2} = 20$$

۱۶۹. **گزینه ۳** جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول t_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$t_3 = t_1 + 2d, \quad t_7 = t_1 + 6d, \quad t_9 = t_1 + 8d$$

از طرفی اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه:

$$t_7^2 = ac \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 12t_1d + 36d^2 = t_1^2 + 10t_1d + 16d^2 \Rightarrow 2t_1d + 20d^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2d(t_1 + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2d = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ غلط} \\ t_1 + 10d = 0 \xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_{11} = 0 \end{cases}$$

۱۷۰. **گزینه ۱** جملات دنباله‌ی داده شده، توان‌هایی از ۲ هستند. **نگاه کن:**

$$2, 2^2, 2^3, \dots$$

بنابراین حاصل ضرب بیست جمله‌ی نخست آن، یعنی از 2 تا 2^{20} به صورت

روبه‌رو است:

$$2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{210}$$

$$\Rightarrow 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{210}$$

بنابراین حاصل ضرب بیست جمله‌ی نخست این دنباله برابر 2^{210} است.

۱۷۱. **گزینه ۲** در این سؤال گفته شده است که هر سال به اندازه‌ی $1/9$ از

جمعیت کم می‌شود، به عبارت دیگر می‌توان گفت هر سال جمعیت این روستا

$9/10$ سال قبل است. الگوی زیر را می‌توان برای جمعیت این روستا نوشت:

$$1000, \underbrace{1000 \times 9/10}_{\text{گذشت یک سال}}, \underbrace{1000 \times 9/10 \times 9/10}_{\text{گذشت دو سال}}, \dots$$

یا به صورت ساده‌تر:

$$1000, 900, 810, 729, \dots$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{سال ۱}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{سال ۲}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{سال ۳}}$$

حتماً متوجه شده‌اید که دنباله‌ی بالا، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $9/10$ است.

۱۷۲. **گزینه ۳** یا توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} t_7 t_9 = \frac{4}{5} \\ t_9 t_{11} = \frac{8}{7} \end{cases} \xrightarrow{\text{همه‌ی جمله‌ها رو بازن کن}} \begin{cases} (t_1 r)(t_1 r^9) = \frac{4}{5} \\ (t_1 r^9)(t_1 r^{11}) = \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \begin{cases} (t_1 r)(t_1 r^{10}) = \frac{4}{5} \\ (t_1 r^{16})(t_1 r^9) = \frac{8}{7} \end{cases} \xrightarrow{\text{باز هم ساده کن}} \begin{cases} t_1^2 r^{11} = \frac{4}{5} \\ t_1^2 r^{25} = \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دور رابطه رو بر هم تقسیم کن}} \frac{t_1^2 r^{25}}{t_1^2 r^{11}} = \frac{8/7}{4/5} \Rightarrow r^{14} = \frac{8 \times 5}{4 \times 7} \xrightarrow{\text{ساده کن}} r^{14} = \frac{10}{7}$$

حال باید نسبت $\frac{t_{20}}{t_6}$ را بیابیم. هر دو جمله را باز می‌کنیم:

$$\frac{t_{20}}{t_6} = \frac{t_1 r^{19}}{t_1 r^5} = r^{14} = \frac{10}{7}$$

۱۷۳. **گزینه ۳** روش اول در صورتی که جمله‌ی عمومی دنباله t_n باشد، مسئله از ما خواسته که عبارت زیر را حساب کنیم:

$$A = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1} = ?$$

باتوجه به اینکه در دنباله‌ی هندسی $t_n = t_1 r^{n-1}$ است، همه‌ی جمله‌ها را باز می‌کنیم:

$$A = \frac{t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3 + t_1 r^4}{t_1} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$$

$$\xrightarrow{r=2} A = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \Rightarrow A = 31$$

روش دوم می‌توان دنباله‌ای دلخواه با قدرنسبت -2 را $1, -2, 4, -8, 16, \dots$ در نظر گرفت؛ بنابراین:

$$\text{مجموع پنج جمله‌ی اول جمله‌ی اول} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$$

۱۷۴. **گزینه ۳**

$$2^{-a}, 2\sqrt{2}, 8 \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} (2\sqrt{2})^2 = 2^{-a} \times 8$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4 \times 2 = 2^{-a} \times 8 \Rightarrow 1 = 2^{-a} \xrightarrow{1=2^0} 2^0 = 2^{-a} \Rightarrow a = 0$$

$$2\sqrt{2}, 8, 4^b \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} 8^2 = 2\sqrt{2} \times 4^b$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو توانی کن}} (2^3)^2 = 2 \times 2^2 \times (2^2)^b$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 2^6 = 2^2 \times 2^{2b} \Rightarrow 2^6 = 2^{2+2b} \Rightarrow 6 = 2 + 2b \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow 2b = 6 - 2 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 0 + 2 = 2$$

۱۷۵. **گزینه ۲** چهار جمله‌ی اول این دنباله را با t_1, t_2, t_3, t_4 نمایش

می‌دهیم. اگر t_1 کوچک‌ترین آن‌ها باشد، طبق فرضیات مسئله داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_3 + t_4 = 75 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمله‌ها رو بازن کن}} \begin{cases} t_1 + t_1 r = 3 \\ t_1 r^2 + t_1 r^3 = 75 \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{t_1 r^2 + t_1 r^3}{t_1 + t_1 r} = \frac{75}{3} \Rightarrow \frac{t_1 r^2(1+r)}{t_1(1+r)} = 25 \xrightarrow{\text{ساده کن}} r^2 = 25$$

$$\xrightarrow{\text{جملات مثبت هستند}} r = 5 \xrightarrow{t_1 + t_1 r = 3} t_1 + 5t_1 = 3$$

$$\Rightarrow 6t_1 = 3 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

حال با داشتن $t_1 = \frac{1}{2}$ و $r = 5$ ، جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{25}{2}, \frac{125}{2}$$

اگر t_1 بزرگ‌ترین جمله بین چهار جمله‌ی اول دنباله باشد، روش حل باز هم به همین صورت است.

۱۷۶. **گزینه ۳** قدرنسبت دنباله‌ی حسابی 6 است ($d=6$). پس دنباله‌ی

هندسی به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{r=6, t_1=\frac{8}{27}} \frac{8}{27}, \frac{16}{9}, \frac{32}{3}, 64, 384, \dots$$

جملات این دنباله از جمله‌ی پنجم به بعد، مضرب صحیح ۳ هستند از آن‌جا که دنباله‌ی

حسابی موردنظر به صورت $t_n = 4 + 6(n-1)$ است، بنابراین فقط عدد 64 چون صحیح است و مضرب صحیح ۳ نیست، می‌تواند بین دو دنباله مشترک باشد. در نتیجه:

$$4 + 6(n-1) = 64 \Rightarrow 6(n-1) = 60 \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

۱۸۰. **گزینه ۴** - روش اول سعی می‌کنیم یک الگوی مناسب برای اولین و آخرین جمله‌ی هر دسته پیدا کنیم:

شماره‌ی دسته	۱	۲	۳	۴	...	n
اولین عدد دسته	۱	۳	۷	۱۳	...	
الگوی مناسب	$1^2 - 0$	$2^2 - 1$	$3^2 - 2$	$4^2 - 3$...	$n^2 - (n-1)$

\Rightarrow اولین عدد هر دسته $= n^2 - n + 1$

شماره‌ی دسته	۱	۲	۳	۴	...	n
آخرین عدد دسته	۱	۵	۱۱	۱۹	...	
الگوی مناسب	$1^2 + 0$	$2^2 + 1$	$3^2 + 2$	$4^2 + 3$...	$n^2 + (n-1)$

\Rightarrow آخرین عدد هر دسته $= n^2 + n - 1$

پس به‌طور کلی، اگر اولین عدد در دسته‌ی n ام را با a_n و آخرین عدد دسته‌ی n ام را با b_n نشان دهیم، داریم:

$$\begin{cases} a_n = n^2 - n + 1 \\ b_n = n^2 + n - 1 \end{cases} \xrightarrow[n=10]{\text{دسته‌ی دهم}} \begin{cases} a_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91 \\ b_{10} = 10^2 + 10 - 1 = 109 \end{cases}$$

$\Rightarrow b_{10} - a_{10} = 109 - 91 = 18$

روش دوم اگر تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد در هر دسته را بنویسیم، به الگوی زیر می‌رسیم:

$$\begin{matrix} 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (1-1) \quad (5-3) \quad (11-7) \quad (19-13) \end{matrix}$$

دسته‌ی دهم

۱۸۱. **گزینه ۲** ابتدا اولین جمله‌ی مشترک این دو دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{matrix} +3 & +3 & +3 \\ 3 & 6 & 9 & 12, \dots \\ +4 & +4 \\ 4 & 8 & 12, \dots \end{matrix}$$

بنابراین اولین جمله‌ی مشترک این دو دنباله، ۱۲ است. اگر دقت کرده باشید، قدرنسبت دنباله‌ی اولی برابر ۳ و قدرنسبت دنباله‌ی دومی ۴ است. برای این که در ریاضی بین دو عدد، مقادیر مشترک را برداریم (ویژگی که هر دو عدد در آن نقش داشته باشند)، باید ک.م.م آن دو عدد را در نظر بگیریم. در اینجا ک.م.م ۳ و ۴، عدد ۱۲ می‌شود. پس برای داشتن جملات مشترک دو دنباله، دنباله‌ی جدیدی طراحی می‌کنیم که جمله‌ی اول آن ۱۲ و قدرنسبت آن هم ۱۲ (ک.م.م ۳ و ۴) باشد؛ بنابراین جملات دنباله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$12, 24, 36, \dots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 12 \\ d = 12 \end{cases}$$

$t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_n = 12 + (n-1) \times 12 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_n = 12n$
(دنباله‌ای که جملات مشترک دو دنباله را تولید می‌کند)

حال باید جمله‌ی چهارم هر دو دنباله را بیابیم:

$$\begin{cases} 3, 6, 9, \dots \xrightarrow{t_1=3, d=3} t_4 = 3 + (4-1) \times 3 = 12 \\ 4, 8, 12, \dots \xrightarrow{t_1=4, d=4} t_4 = 4 + (4-1) \times 4 = 16 \end{cases}$$

بنابراین تا جمله‌ی چهارم دو دنباله، اگر جمله‌ی مشترکی وجود داشته باشد، آن جمله باید کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ باشد. (چرا؟)

۱۷۷. **گزینه ۳**

$$t_1, t_2, t_3, \dots \xrightarrow{\text{همه رو بازنکن}} t_1 + 2d, t_1 + 5d, t_1 + 9d$$

جملات از دنباله‌ی حسابی \rightarrow سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی

شرط واسطه‌ی هندسی $\rightarrow (t_1 + 5d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 9d)$

اتحادها رو انجام بده $\rightarrow t_1^2 + 10t_1d + 25d^2 = t_1^2 + 11t_1d + 18d^2$

ساده‌کن $\rightarrow 25d^2 - 18d^2 = 11t_1d - 10t_1d \Rightarrow 7d^2 = t_1d$

$\xrightarrow{\div d} t_1 = 7d$ Ⓜ

حال باید نسبت جمله‌ی یازدهم به جمله‌ی چهارم حسابی را بیابیم:

$$\frac{t_{11}}{t_4} = \frac{t_1 + 10d}{t_1 + 3d} \xrightarrow{\text{Ⓜ}} \frac{t_1}{t_4} = \frac{7d + 10d}{7d + 3d} = \frac{17d}{10d} = 1.7$$

۱۷۸. **گزینه ۲** با اطلاعات داده‌شده سه جمله‌ی دنباله‌ی حسابی را می‌نویسیم:

$$18 - d, 18, 18 + d \xrightarrow[\text{دنباله‌ی حسابی}]{\text{به جمله‌ی سوم ۷۵ واحد اضافه‌کن}} 18 - d, 18, 18 + 75 + d$$

سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی

ساده‌کن $\rightarrow 18 - d, 18, 93 + d$ Ⓜ

شرط واسطه‌ی هندسی $\rightarrow 18^2 = (18 - d)(93 + d)$

$\Rightarrow 18^2 = 18 \times 93 + 18d - 93d - d^2$

مرتب‌کن $\rightarrow d^2 + 93d - 18d + 18^2 - 18 \times 93 = 0$

$\Rightarrow d^2 + 75d + 18(18 - 93) = 0 \Rightarrow d^2 + 75d - 18 \times 75 = 0$

$18 \times 75 = 18 \times (5 \times 15) = 90 \times 15 \rightarrow d^2 + 75d - 90 \times 15 = 0$

تجزیه‌کن $\rightarrow (d + 90)(d - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -90 \\ d = 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} d = -90 \Rightarrow 18 + 90, 18, 93 - 90 \\ \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 108, 18, 3 \Rightarrow r = \frac{3}{108} = \frac{1}{36} \\ d = 15 \Rightarrow 18 - 15, 18, 93 + 15 \\ \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 3, 18, 108 \Rightarrow r = \frac{18}{3} = 6 \end{cases}$$

قرار بده در جملات Ⓜ

عدد ۶ در گزینه‌ها آمده است.

۱۷۹. **گزینه ۲** - روش اول در هر شکل تعداد نقاطها از شماره‌ی آن شکل یک واحد بیشتر است، پس در شکل n ام، n+1 نقطه وجود دارد. از طرفی در هر شکل، تعداد کل پاره‌خط‌های قابل رسم بین نقاط موجود رسم شده است. پس در شکل n ام که n+1 نقطه داریم، تعداد کل پاره‌خط‌های قابل رسم (t_n) بین این نقاط برابر است با:

$$t_n = \binom{n+1}{2} \xrightarrow{n=10} t_{10} = \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

روش دوم با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد پاره‌خط‌های رسم شده در شکل‌های داده‌شده، تشکیل یک دنباله‌ی مثلثی می‌دهند، ببینید: ۱، ۳، ۶، ۱۰، ...

در هر دنباله‌ی مثلثی، هر جمله از رابطه‌ی $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید. پس در شکل دهم تعداد پاره‌خطها برابر است با:

$$t_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$



طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه، اگر جملات l ام، m ام و n ام یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، قدرنسبت این دنباله از رابطه‌ی

$$r = \frac{n-m}{m-l} = \frac{7-2}{2-1} = 5$$

۱۸۵. **گزینه ۳** الگوی زیر را در نظر می‌گیریم:

مرحله	۱	۲	۳	...	n
شعاع دایره	R	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{4}$...	$\frac{R}{2^{n-1}}$
مساحت	S_1	S_2	S_3	...	S_n
اندازه‌ی مساحت	πR^2	$2 \times \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$	$4 \times \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2$...	?

حال مساحت دایره‌ها را در هر مرحله ساده می‌کنیم:

$$S_1 = \pi R^2, S_2 = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} S_1, S_3 = \frac{1}{16} \pi R^2 = \frac{1}{16} S_1, \dots$$

$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} S_1$$

۱۸۶. **گزینه ۱** زبان ریاضی مسئله، یعنی $t_n < 0$ را حل کن:

$$t_n < 0 \rightarrow \frac{n}{81} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n < 0$$

اگر n زوج باشد، همه‌ی جملات مثبت خواهند بود. (چرا؟) از طرفی

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$t_1 = \frac{1}{81} - \frac{1}{3} = \frac{1}{81} - \frac{27}{81} = -\frac{26}{81} \checkmark$$

$$t_3 = \frac{3}{81} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = 0 \text{ غق ق}$$

از جمله‌ی سوم به بعد، همه‌ی جملات مثبت می‌شوند. (چرا؟) پس در این دنباله، فقط جمله‌ی اول منفی است.

۱۸۷. **گزینه ۱** تعداد نقاط توپر در هر شکل را به صورت یک دنباله می‌نویسیم:

$$1, 5, 9, \dots$$

مشاهده می‌کنیم که هر جمله با عدد ثابت ۴ جمع می‌شود. پس این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است (رد **گزینه‌های ۲ و ۳**) و قدرنسبت آن هم همان ۴ است. جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_1=1, d=4} 397 = 1 + (n-1) \times 4$$

$$\xrightarrow{-1} 396 = 4(n-1) \xrightarrow{\div 4} n-1 = 99 \Rightarrow n = 100$$

۱۸۸. **گزینه ۱** ابتدا مخرج کسر t_n را گویا می‌کنیم. پس:

$$t_n = \frac{2(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})}{(n+4) - (n+2)} \xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n = 2(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})$$

حالا شروع می‌کنیم به نوشتن جمله‌ها و جمع کردن آن‌ها. اگر مجموع ۱۴۰ جمله‌ی اول را با A نمایش دهیم، داریم:

$$A = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{139} + t_{140}$$

$$\Rightarrow A = 2(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + 2(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + 2(\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \dots$$

$$+ 2(\sqrt{143} - \sqrt{142}) + 2(\sqrt{144} - \sqrt{143})$$

از طرفی اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله هم ۱۲ بود، پس با توجه به دنباله‌ی

$$12n = 12n \rightarrow 1 \leq n \leq 10 \rightarrow 12 \leq 12n \leq 120$$

یعنی این دو دنباله ۱۰ جمله‌ی مشترک دارند. این جملات عبارت‌اند از:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120$$

۱۸۲. **گزینه ۱** دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 64 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dots & & \dots \\ t_1 & & t_7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & & 64 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dots & & \dots \\ t'_1 & & t'_7 \end{array}$$

با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله‌های حسابی و هندسی داریم:

$$\begin{cases} 1 + 7 = 4 + 4 \rightarrow t_1 + t_7 = 2t_4 \\ 1 \times 64 = B^2 \rightarrow t'_1 t'_7 = t_4'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 64 = 2A \\ 1 \times 64 = B^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 65 \Rightarrow A = \frac{65}{2} = 32.5 \\ B^2 = 64 \Rightarrow B = \pm 8 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست **گزینه ۱** است؛ زیرا با انتخاب $B = 8$ داریم:

$$A + B = 32.5 + 8 = 40.5$$

۱۸۳. **گزینه ۲**

$$t_2, t_5, t_{11}$$

جملات از دنباله‌ی حسابی

$$\xrightarrow{\text{همه‌ی جمله‌ها را طبق جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی بازکن}} t_1 + d, t_1 + 4d, t_1 + 10d \quad \text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی رو اعمال کن}} (t_1 + 4d)^2 = (t_1 + d)(t_1 + 10d)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادها رو پیاده کن}} t_1^2 + 8t_1d + 16d^2 = t_1^2 + 11t_1d + 10d^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 16d^2 - 10d^2 = 11t_1d - 8t_1d$$

$$\Rightarrow 6d^2 = 3t_1d \xrightarrow{\div 3d} t_1 = 2d \quad \text{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{رودر ۱ قرار بده}} 2d + d, 2d + 4d, 2d + 10d$$

دنباله‌ی هندسی t_2, t_5, t_{11}

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 2d, 6d, 12d \xrightarrow{\text{جمله‌ی چهارم } r=2} t_4 = 12d \times 2 = 24d$$

می‌خواهیم ببینیم که ۲۴d چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی است. فرض کنیم جمله‌ی k ام از دنباله‌ی حسابی باشد، بنابراین:

$$t_k = t_1 + (k-1)d \xrightarrow{t_k=24d} 24d = 2d + (k-1)d$$

$$\xrightarrow{\div d} 24 = 2 + k - 1 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24 = k + 1 \Rightarrow k = 23$$

۱۸۴. **گزینه ۳** اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی را با t'_n و جمله‌ی عمومی

دنباله‌ی حسابی را با t_n نمایش دهیم، با توجه به مفروضات تست داریم:

$$\xrightarrow{\text{چهار جمله بین } t'_5, t'_4, t'_3 \text{ قرار بده}} t'_5, t'_4, t'_3 \Rightarrow \text{جملات دنباله‌ی هندسی گفته‌شده}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا به دنباله‌ی حسابی داری جملاتی رو بنویس}} t'_1, t'_4, t'_5, t'_6, t'_7$$

$$t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, t'_5, t'_6, t'_7$$

$$t'_1, t'_4, t'_5$$

بنابراین سؤال را می‌توان این گونه بیان کرد که جملات اول، دوم و هفتم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی‌اند؛ قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱۹۲. **گزینه ۲** فرض می‌کنیم جمله‌ی عمومی دنباله t_n باشد؛ در این صورت

$$t_n = t_1 r^{n-1} \quad \text{طبق فرض مسئله داریم:}$$

$$t_1 = 2 \quad t_{10} = 20 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_1 r^9 = 20 \xrightarrow{t_1=2} 2 \times r^9 = 20 \Rightarrow r^9 = 10$$

و اما حاصل ضرب ده جمله‌ی اول دنباله:

$$A = t_1 t_2 \dots t_{10} \xrightarrow{\text{جمله‌ها رو بازنکن}} A = t_1 (t_1 r) (t_1 r^2) \dots (t_1 r^9)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} A = t_1^{10} r^{(1+2+\dots+9)}$$

$$\frac{1+2+\dots+9 = \frac{9(9+1)}{2} = 45}{A = t_1^{10} r^{45}}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به } r^9 = 10 \text{ و } t_1 = 2} A = 2^{10} \times (r^9)^5 \xrightarrow{r^9=10} A = 2^{10} \times 10^5$$

$$A = 2^{10} \times 10^5 \xrightarrow{2^{10} = (2^2)^5 = 4^5} A = 4^5 \times 10^5 \Rightarrow A = 4 \cdot 10^5$$

۱۹۳. **گزینه ۲**

$$\frac{a, f, b}{\text{سه جمله‌ی دنباله‌ی حسابی}} \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی حسابی}} f = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 8 \quad \text{①}$$

$$\frac{a, f, fb}{\text{سه جمله‌ی دنباله‌ی هندسی}} \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} f^2 = a \times fb \xrightarrow{+f} ab = f \quad \text{②}$$

از رابطه‌ی ① مقدار b برابر است با $b = 8 - a$. با قراردادن b در رابطه‌ی ② داریم:

$$a(8-a) = f \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 8a - a^2 = f \Rightarrow a^2 - 8a + f = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دستور } \Delta} a = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times f}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48 - 4f}}{2}$$

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{16 \times 3}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2(4 \pm 2\sqrt{3})}{2} \Rightarrow a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

۱۹۴. **گزینه ۳**

$$f, a, b \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی واسطه‌ی هندسی}} a^2 = fb \quad \text{①}$$

$$f, a, b-1 \xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی واسطه‌ی حسابی}} a = \frac{f+b-1}{2} \Rightarrow 2a = b+3 \quad \text{②}$$

دستگاه شامل رابطه‌های ① و ② را باید حل کنیم:

$$\xrightarrow{\text{رابطه‌ی ② را در ① رادرف}} \lambda a = fb + 12 \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \lambda a = a^2 + 12$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} a^2 - \lambda a + 12 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a-6)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 & \text{در رابطه‌ی ① } 36 = fb \Rightarrow b = 9 \\ a = 2 & \text{قرار داده } 4 = fb \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

۱۹۵. **گزینه ۴** طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$t_2, t_5, t_{12} \xrightarrow{\text{اندیس‌ها را به ترتیب بنویس}} 2, 5, 12 \xrightarrow{\text{بذار تو فرمول}} r = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$$

۱۹۶. **گزینه ۴** در ناحیه‌ی سوم مختصات، x و y هر نقطه‌ای منفی است؛ بنابراین باید: $x_A < 0$ و $y_A < 0$

$$\begin{cases} x_A = \frac{m-3}{m-1} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 1 < m < 3 \quad \text{①} \\ y_A = m-2 < 0 \Rightarrow m < 2 \quad \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} \cap \text{②} = (1, 2) \Rightarrow 1 < m < 2 \quad \text{③}$$

با توجه به ③، مختصات نقطه‌ی B را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m > 1 \xrightarrow{-1} \frac{m-1}{x_B} > 0 \Rightarrow x_B > 0 \\ m < 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} m^2 < 4 \Rightarrow \frac{m^2-4}{y_B} < 0 \Rightarrow y_B < 0 \end{cases}$$

بنابراین نقطه‌ی B در ناحیه‌ی چهارم مختصات قرار دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جملات دوبه‌دو با هم حذف می‌شوند و در برانتز اولی و آخری جمله‌ای باقی می‌ماند:

$$\Rightarrow A = 2(-\sqrt{4}) + 2(\sqrt{44}) = 2(-2) + 2(12) = -4 + 24 = 20$$

۱۸۹. **گزینه ۲** جملات متوالی را t_n و t_{n+1} در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله داریم:

$$t_{n+1} - t_n = 6 \xrightarrow{t_n = an+b} (a(n+1) + b) - (an + b) = 6$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} an + a + b - an - b = 6 \Rightarrow a = 6 \quad \text{①}$$

از طرفی، مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۵۰ است، یعنی:

$$t_3 + t_5 = 50 \xrightarrow{t_n = an+b} 6 \times 3 + b + 6 \times 5 + b = 50$$

$$\Rightarrow 2b + 18 + 30 = 50 \Rightarrow 2b = 50 - 48 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \quad \text{②}$$

$$\xrightarrow{\text{① و ②}} t_n = 6n + 1 \xrightarrow{n=10} t_{10} = 6 \times 10 + 1 = 61$$

۱۹۰. **گزینه ۲**

$$t_1, t_2, t_3, t_4 \xrightarrow{\text{جمع کن}} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 15$$

$$\xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = 15$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 4t_1 + 6d = 15 \quad \text{①}$$

پنج جمله‌ی بعدی: t_5, t_6, t_7, t_8, t_9

$$\xrightarrow{\text{همه رو جمع کن}} t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 = 30$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو بازنکن}} (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 8d) = 30$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 5t_1 + 30d = 30$$

$$\xrightarrow{+5} t_1 + 6d = 6 \quad \text{②}$$

$$\xrightarrow{\text{با ① و ② دستگاه تشکیل بده}} \begin{cases} 4t_1 + 6d = 15 \\ t_1 + 6d = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو کم کن}} 3t_1 - 1d = 9 \Rightarrow 3t_1 = 9 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\xrightarrow{t_1 + 6d = 6} 3 + 6d = 6 \Rightarrow 6d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حالا با $d = \frac{1}{2}$ و $t_1 = 3$ جمله‌ی یازدهم را می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی یازدهم}} t_{11} = t_1 + 10d = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 5 = 8$$

۱۹۱. **گزینه ۲** جمله‌ها را می‌توان به صورت $a-d$ و $a+d$ و $a+2d$ و $a-2d$ در نظر گرفت. طبق فرض مسئله، مجموع سهم‌ها برابر ۱۰۰ است، بنابراین:

$$a-2d + a-d + a + a + d + a + 2d = 100$$

$$\Rightarrow 5a = 100 \Rightarrow a = 20$$

از طرف دیگر اگر $a-2d$ کوچک‌ترین سهم باشد، آن‌گاه:

$$\frac{1}{3} (\text{مجموع دو سهم کوچک‌تر}) = (\text{مجموع سه سهم بزرگ‌تر})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (a + a + d + a + 2d) = a - 2d + a - d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (3a + 3d) = 2a - 3d \Rightarrow a + d = 2a - 3d \Rightarrow d = \frac{a}{4} = 5$$

پس سهم‌ها به صورت زیر هستند:

$$10, 15, 20, 25, 30$$

↓
کوچک‌ترین سهم